MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig,
Prof. K. VonderMühll zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig. und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXII. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1883.

Inhalt des zweiundzwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen 1. Ordnung im System der confocalen Flächen 2. Grades.

Von

Otto Staude in Breslau.

Einleitung.

Indem die Theorie der hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung seit Jacobi's Formulirung des Umkehrproblems auf die Benutzung *zweier* unabhängiger complexer Variabler als der Elemente der Untersuchung hingewiesen worden war, hat sie diese Elemente bald in abstracter Form als *zwei Individua eines algebraischen Gebildes* vom Geschlechte 2, bald in geometrischer Form als *Punktepaare auf einer Riemann'schen Fläche oder einer algebraischen Curve* von gleichem Geschlechte vorgestellt. Neben diese Auffassungen, denen die simultane Betrachtung *zweier* unabhängiger Elemente in einem *zweifach* ausgedehnten Gebilde wesentlich ist, trat die Vorstellung *eines* Individuums in einer *vierfach* ausgedehnten Mannigfaltigkeit. So erschien die Vereinigung zweier unabhängiger complexer Variabler durch ein einziges geometrisches Element vertreten, sei es dass man, nach Analogie der Gauss'schen Darstellung einer complexen Veränderlichen, den reellen Punkt im Raume von vier Dimensionen, sei es dass man, mit Zuziehung complexer Bestandtheile des gewöhnlichen Raumes, den Punkt oder die Tangentialebene einer Fläche oder den Strahl eines Strahlensystems in's Auge fasste.

Wenn die Verwendung des reellen vierdimensionalen Raumes naturgemäss weniger geeignet schien, die analytische Vorstellung zu unterstützen, so gewann dagegen die Benutzung der im reellen Gebiete des gewöhnlichen Raumes zweifach, im complexen Gebiete vierfach ausgedehnten Gebilde um so höheres Interesse.

In unmittelbare Beziehung zu der Geometrie der *Flächen* tritt die Theorie der hyperelliptischen Functionen mit der von Herrn Weierstrass*) gegebenen Darstellung der Punktcoordinaten der *Fläche*

*) Vgl. Weierstrass, Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid, Monatsberichte der Kgl. Academie zu Berlin, Jahrg. 1861, S. 986. Diese Arbeit enthält implicite das im Text bezeichnete Resultat.

2. *Grades* durch Quotienten der hyperelliptischen ϑ-Functionen von 2 Variabeln. Durch Untersuchungen über Cyclidensysteme wird ferner Herr Darboux*) zur Darstellung der *Cycliden* und durch Specialisirung dieser Flächen 4. Ordnung zur Darstellung der *allgemeinen Fläche* 3. *Ordnung* durch hyperelliptische Functionen geführt. Hieran schliesst sich die Darstellung der *Kummer'schen Fläche*, auf welche, ausgehend von der Einführung der elliptischen Liniencoordinaten im System der confocalen Strahlencomplexe zweiten Grades, Herr Klein**) hinweist, und welche, gestützt auf die Theorie der identischen Relationen zwischen den ϑ-Functionen zweier Veränderlicher, die Herren Cayley***), Borchardt†) und Weber††) auffinden. Den Zusammenhang der verschiedenen Darstellungen der Kummer'schen Fläche zeigt Herr Rohn†††), indem er die Transformation 1. und 2. Ordnung der hyperelliptischen Functionen in Verbindung mit der Geometrie der Kummer'schen Fläche untersucht.

In dieses Gebiet geometrischer Deutungen der hyperelliptischen Functionen, bei welchen das Paar zweier unabhängiger Variabler durch ein Element eines vierfach ausgedehnten geometrischen Gebildes im complexen Gebiete des gewöhnlichen Raumes vertreten wird, fallen die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit.

Dieselbe beabsichtigt die Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen vom Geschlechte $p = 2$ im System der confocalen Flächen 2. Grades zu deuten und die bezüglichen functionentheoretischen Sätze an elementargeometrische Vorstellungen anzuknüpfen. Dass gerade die Additionssätze den Zielpunkt der Betrachtung bilden, mag seine Rechtfertigung in dem historischen Interesse derselben finden: nachdem die Theorie der hyperelliptischen Functionen aus wesentlich analytischen Gesichtspunkten nach Analogie mit der Theorie

*) Vgl. Darboux, Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques, Comptes Rendus, Bd. 69 (1869), S. 392; Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces, Comptes Rendus, Bd. 68 (1869), S. 1311; Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873, S. 148—150.

**) Vgl. Klein, Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen, Mathematische Annalen, Bd. V (1872), S. 302.

***) Vgl. Cayley, On the double Θ-functions in connexion with a 16-nodal quartic surface, Crelle's Journal, Bd. 83 (1877), S. 210.

†) Vgl. Borchardt, Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten durch die Göpel'sche biquadratische Relation etc., ibid. S. 234.

††) Vgl. Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den ϑ-Functionen mit 2 Veränderlichen, ibid. Bd 84 (1878), S. 332.

†††) Vgl. Rohn, Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche, Mathemat. Annalen, Bd. XV (1879), S. 315.

der elliptischen Functionen aufgebaut worden ist, scheint es berechtigt, die hyperelliptischen Functionen nachträglich nach denjenigen geometrischen Beziehungen zu verfolgen, aus welchen die Theorie der elliptischen Functionen ihre erste Anregung geschöpft hat. Die Tendenz geometrischer Anschaulichkeit mag ferner die *Beschränkung auf bestimmte Realitätsverhältnisse* der benutzten geometrischen Gebilde rechtfertigen, welche für die folgenden Ausführungen massgebend gewesen ist.

Es macht deshalb die Untersuchung keinen Anspruch darauf, den bearbeiteten Stoff in seiner ganzen Reichhaltigkeit erschöpft zu haben. Es bliebe einer weiteren Bearbeitung vorbehalten, die entwickelten Resultate nach allgemeineren Richtungen auszudehnen. An Stelle des *Systems der confocalen Flächen* würde als geometrische Grundlage die *allgemeine Flächenschaar* 2. *Grades*, sowie mit gleichem Rechte das reciproke Gebilde des *Flächenbüschels*, einzutreten haben.

Neben die Betrachtung der *Additionstheoreme* würde die analoge Behandlung aller der einzelnen Gebiete gestellt werden müssen, welche die analytische Theorie der hyperelliptischen Functionen darbietet. Darüber hinaus könnte man zu den von Jacobi*) eingeführten Systemen confocaler Flächen und den projectivischen Verallgemeinerungen derselben *in Räumen von* $p+1$ *Dimensionen* aufsteigen, und hier die hyperelliptischen Functionen *von beliebigem Geschlechte* p in entsprechender Weise deuten. Der unmittelbaren Weiterführung**) der von Jacobi***) angeregten Arbeiten über die geometrische Anwendung der elliptischen Functionen auf Kegelschnittsysteme würde damit ihre Grenze gesetzt sein.

Was die allgemeine Disposition der vorliegenden Arbeit angeht, so ist in Kapitel I die geometrische Bedeutung der symmetrischen *algebraischen Functionen* zweier unabhängiger Variabler (§§ 1. 3. 4) und der Differentiale der *Integralfunctionen* (§§ 5. 7) *eines hyperelliptischen Gebildes* vom Geschlecht $p=2$ abgeleitet, sowie die Mehrdeutigkeit der algebraischen Irrationalitäten des Gebildes (§§ 2. 6) geometrisch interpretirt.

In Kapitel II erscheint die durch die hyperelliptischen ϑ-Func-

*) Vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgeg. von Clebsch, S. 198.

**) Als ein Beitrag zu dieser Weiterführung schliesst sich die vorliegende Arbeit den früheren Aufsätzen des Verfassers: „Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides" (Math. Annalen, Bd. XX, S. 147) und: „Ueber geodätische Polygone auf den Flächen 2. Grades" (ibid. Bd. XXI, S. 219) an; über deren Absicht und Veranlassung vgl. Math. Annalen, Bd. XXI, S. 219.

***) Vgl. Jacobi, „Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie", Crelle's Journal, Bd. 3, S. 376.

tionen erreichte *Verknüpfung* der algebraischen und Integralfunctionen unter der Form von *Parameterdarstellungen* geometrischer Gebilde versinnlicht. Es wird dadurch eine *Weiterführung der Weierstrass-schen Darstellung der Fläche* 2. *Grades* in dem Sinne angestrebt, dass einerseits neben den 4 ϑ-Functionen, welche den homogenen Coordinaten der Punkte der Fläche proportional gesetzt sind, auch die 12 übrigen ϑ-Functionen ihre Bedeutung erhalten, andrerseits aber über die einzelne Fläche hinausgreifend, der ganze Raum der Behandlung mittels transcendenter Parameter zugänglich gemacht wird.

Den Hauptzielpunkt des Kapitel III bildet die geometrische Deutung der *einfachen Additionstheoreme* der hyperelliptischen Integrale, bei welchen es sich um die Reduction gegebener Summen von 3 Integralen auf Summen von 2 Integralen derselben Art handelt.

In Kapitel IV werden die mit dieser Deutung gewonnenen Hilfsmittel zur Ableitung geometrischer *Schliessungssätze innerhalb des Strahlensystems der gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen* benutzt.

Kapitel V endlich geht auf die geometrische Deutung des *Abel'schen Additionstheorems* aus, mittels welcher die Reduction gegebener Summen beliebig vieler Integrale auf Summen von je 2 Integralen derselben Art durch geometrische Construction geleistet wird.

Kapitel I.

Analytisch-geometrische Grundlagen.

§ 1.

Elementare Eigenschaften der gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen 2. Grades.

Ein System confocaler Flächen 2. Grades sei durch die Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\alpha-\varrho}+\frac{y^2}{\beta-\varrho}+\frac{z^2}{\gamma-\varrho}-1=0$$

mit dem Parameter ϱ gegeben, in welcher x, y, z gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten, und α, β, γ positive reelle Constanten $(\alpha>\beta>\gamma>0)$ bedeuten.

Die *elliptischen Coordinaten* λ, μ, ν eines Punktes sind die drei bei gegebenen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z desselben durch die Gleichung (1) bestimmten Werthe des Parameters ϱ; sie entsprechen in bekannter Weise den Ungleichungen:

$$(2)\qquad \alpha>\nu>\beta>\mu>\gamma>\lambda>-\infty.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z drücken sich vermöge der Formeln:

$$x = \frac{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\alpha-\nu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}}, \quad y = \frac{\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\beta-\nu}}{\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\beta-\alpha}},$$

$$z = \frac{\sqrt{\gamma-\lambda}\sqrt{\gamma-\mu}\sqrt{\gamma-\nu}}{\sqrt{\gamma-\lambda}\sqrt{\gamma-\beta}}$$

als *symmetrische mehrdeutige Functionen* der elliptischen Coordinaten aus.

Im Anschluss hieran gilt es zunächst, neben den Coordinaten der *Punkte* des Raumes die Bestimmungsstücke einer Reihe anderer geometrischer Elemente als Functionen der elliptischen Coordinaten von analogem Charakter darzustellen. Den Mittelpunkt der Betrachtung bilden die gemeinsamen *geradlinigen Tangenten* zweier confocaler Flächen, neben welche sich von selbst gewisse näher zu definirende *Ebenen* des Raumes stellen werden.

Die 4 gemeinsamen Tangenten zweier Flächen $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ des Systems (1), welche durch einen beliebigen Punkt mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und den elliptischen Coordinaten λ, μ, ν hindurchgehen, können als gemeinsame Erzeugende der beiden Berührungskegel vom Punkte x, y, z an die Flächen ϱ_1 und ϱ_2 durch die beiden Gleichungen:

$$(3) \quad \left(\frac{x^2}{\alpha-\varrho_\varkappa}+\frac{y^2}{\beta-\varrho_\varkappa}+\frac{z^2}{\gamma-\varrho_\varkappa}-1\right)\left(\frac{x'^2}{\alpha-\varrho_\varkappa}+\frac{y'^2}{\beta-\varrho_\varkappa}+\frac{z'^2}{\gamma-\varrho_\varkappa}-1\right)$$
$$-\left(\frac{xx'}{\alpha-\varrho_\varkappa}+\frac{yy'}{\beta-\varrho_\varkappa}+\frac{zz'}{\gamma-\varrho_\varkappa}-1\right)^2=0,$$
$$\varkappa = 1, 2,$$

in laufenden Coordinaten x', y', z' gemeinschaftlich dargestellt werden.

Um jede der 4 gemeinsamen Erzeugenden auch analytisch für sich allein definiren zu können, transformirt man die Gleichungen (3) zuerst auf ein neues Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Punkt x, y, z, und dessen Axen die Normalen N_λ, N_μ, N_ν der 3 durch ihn hindurchgehenden Flächen λ, μ, ν des confocalen Systems sind. Diese 3 Normalen mögen kurz als die „*Axen des Punktes* λ, μ, ν" bezeichnet werden. Die durch die verlangte Transformation einzuführenden neuen Coordinaten X, Y, Z drücken sich durch die früheren Coordinaten x', y', z' in folgender Weise aus*):

$$(4) \quad \begin{cases} X = -P_\lambda\left(\frac{xx'}{\alpha-\lambda}+\frac{yy'}{\beta-\lambda}+\frac{zz'}{\gamma-\lambda}-1\right), \\ Y = -P_\mu\left(\frac{xx'}{\alpha-\mu}+\frac{yy'}{\beta-\mu}+\frac{zz'}{\gamma-\mu}-1\right), \\ Z = -P_\nu\left(\frac{xx'}{\alpha-\nu}+\frac{yy'}{\beta-\nu}+\frac{zz'}{\gamma-\nu}-1\right). \end{cases}$$

---

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, I. Th., Art. 171 (3. Auflage 1879).

Hierin bedeuten P_λ, P_μ, P_ν die Längen der vom Anfangspunkte $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ des ursprünglichen Coordinatensystems auf die Tangentialebenen T_λ, T_μ, T_ν der Flächen λ, μ, ν im Punkte x, y, z gefällten Perpendikel.

Durch die Transformation (4) nehmen die Gleichungen (3) die folgende Form an:

$$\frac{X^2}{\varrho_\varkappa - \lambda} + \frac{Y^2}{\varrho_\varkappa - \mu} + \frac{Z^2}{\varrho_\varkappa - \nu} = 0, \quad \varkappa = 1, 2.$$

Hieraus ergiebt sich für die 4 gemeinsamen Erzeugenden der Berührungskegel vom Punkte x, y, z an die Flächen ϱ_1 und ϱ_2:

$$X:Y:Z = \pm\sqrt{\frac{(\varrho_1-\lambda)(\varrho_2-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}} : \pm\sqrt{\frac{(\varrho_1-\mu)(\varrho_2-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}} : \pm\sqrt{\frac{(\varrho_1-\nu)(\varrho_2-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}},$$

wo die 3 Terme rechter Hand in Folge der Identität:

$$(\mu-\nu)(\varrho_1-\lambda)(\varrho_2-\lambda) + (\nu-\lambda)(\varrho_1-\mu)(\varrho_2-\mu) + (\lambda-\mu)(\varrho_1-\nu)(\varrho_2-\nu)$$
$$= -(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)$$

unmittelbar die Richtungscosinus*) der 4 gemeinsamen Erzeugenden mit Bezug auf die Axen des Punktes λ, μ, ν vorstellen. Die 4 verschiedenen Vorzeichencombinationen, welche diese Proportion darbietet, entsprechen den 4 gemeinsamen Tangenten der Flächen ϱ_1 und ϱ_2 durch den Punkt x, y, z.

Im Folgenden sollen zur besseren Uebersicht der Realitätsverhältnisse für die Parameterwerthe ϱ_1 und ϱ_2 die besonderen Annahmen $\varrho_1 = \lambda_0$ und $\varrho_2 = \mu_0$ gemacht und über λ_0 und μ_0 die Verfügungen $-\infty < \lambda_0 < \gamma$ und $\gamma < \mu_0 < \beta$ getroffen werden. Das erhaltene Resultat lautet dann:

Die Gleichungen der 4 gemeinsamen Tangenten, welche an das Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$ und das einschalige Hyperboloid $\mu = \mu_0$ des confocalen Systems von einem Punkte λ, μ, ν gezogen werden können, bezogen auf die Axen des Punktes, sind in der Proportion:

$$(5)\quad X:Y:Z = \pm\sqrt{\frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}} : \pm\sqrt{\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{(\nu-\mu)(\mu-\lambda)}} : \pm\sqrt{\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}$$

enthalten, wo die Ausdrücke rechter Hand unmittelbar Richtungscosinus sind.

An diese Darstellungsweise der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 knüpfen sich sofort einige Folgerungen an.

Durch jeden Punkt, dessen elliptische Coordinaten λ, μ, ν den Ungleichungen:

$$(6)\qquad \alpha > \nu > \beta, \quad \mu_0 > \mu > \gamma, \quad \lambda_0 > \lambda > -\infty$$

*) Vgl. Liouville, Liouville's Journal, 1. Serie, Bd. XII, S. 423.

entsprechen, gehen 4 *reelle*, im Allgemeinen *getrennte* Tangenten an die beiden Flächen λ_0 und μ_0; ein solcher Punkt mag ein „äusserer Punkt mit Bezug auf die beiden Flächen λ_0 und μ_0" oder kurzweg ein *„äusserer Punkt"* genannt werden.

Da sich die Richtungscosinus der Winkel, welche die 4 Tangenten in dem äusseren Punkte λ, μ, ν mit den Axen des Punktes einschliessen, nur in den Vorzeichen unterscheiden, so hat das Quadrupel dieser Tangenten die Eigenschaft, durch Spiegelung an einer jeden der 3 Tangentialebenen T_λ, T_μ, T_ν der Flächen λ, μ, ν je in sich überzugehen, oder anders ausgedrückt:

Die 4 gemeinsamen Tangenten, die an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 von einem äusseren Punkte gelegt werden können, ordnen sich in Bezug auf jede der 3 Axen des Punktes in 2 Paare, so zwar, dass bei jeder der 3 Anordnungen die bevorzugte Axe den Winkel eines jeden Paares halbirt.

Mit Rücksicht hierauf sollen 2 durch den Punkt λ, μ, ν gehende gemeinsame Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 *„ein Paar in Bezug auf die Axe N_λ, N_μ oder N_ν conjugirter Tangenten im Punkte λ, μ, ν"* heissen, wenn ihr Winkel resp. durch die Axe N_λ, N_μ oder N_ν halbirt wird, oder was dasselbe ist, wenn sie durch Spiegelung resp. an den Ebenen T_λ, T_μ oder T_ν in einander übergehen.

Es können also die 4 Tangenten in dem äusseren Punkte λ, μ, ν auf 3 Weisen in Paare conjugirter Tangenten gruppirt werden. Von diesen 3 Gruppirungen wird später hauptsächlich diejenige zur Anwendung gelangen, bei welcher die Normale N_λ ausgezeichnet ist; wenn daher weiterhin von *„zwei einander conjugirten Tangenten im Punkte λ, μ, ν"* ohne nähere Bestimmung gesprochen wird, so sollen immer 2 solche Tangenten gemeint sein, deren Winkel von der Normale N_λ halbirt wird.

Rückt der Punkt λ, μ, ν auf die Fläche λ_0 oder μ_0, so fallen die in Bezug auf N_λ oder bezüglich N_μ conjugirten Tangenten jeweils in eine zusammen. Alle 4 Tangenten werden für einen Punkt der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0 coincident.

§ 2.

Vertheilung der einfachen Wurzelfunctionen auf die äusseren Punkte und die zugehörigen Normalebenen, sowie auf die gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0.

Wenn man die Gleichungen (5) der gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 auf das ursprüngliche Coordinatensystem des § 1 mit den laufenden Coordinaten x', y', z' zurücktransformirt,

so nehmen dieselben in Folge der Relationen (4) die folgende Gestalt an:

$$
(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&P_\mu\cdot\sqrt{\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}\cdot\left(\frac{xx'}{\alpha-\mu}+\frac{yy'}{\beta-\mu}-\frac{zz'}{\mu-\gamma}-1\right)\\
&\mp P_\nu\cdot\sqrt{\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{(\nu-\mu)(\mu-\lambda)}}\cdot\left(\frac{xx'}{\alpha-\nu}-\frac{yy'}{\nu-\beta}-\frac{zz'}{\nu-\gamma}-1\right)=0,\\
&P_\nu\cdot\sqrt{\frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}}\cdot\left(\frac{xx'}{\alpha-\nu}-\frac{yy'}{\nu-\beta}-\frac{zz'}{\nu-\gamma}-1\right)\\
&\mp P_\lambda\cdot\sqrt{\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}\cdot\left(\frac{xx'}{\alpha-\lambda}+\frac{yy'}{\beta-\lambda}+\frac{zz'}{\gamma-\lambda}-1\right)=0,\\
&P_\lambda\cdot\sqrt{\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{(\nu-\mu)(\mu-\lambda)}}\cdot\left(\frac{xx'}{\alpha-\lambda}+\frac{yy'}{\beta-\lambda}+\frac{zz'}{\gamma-\lambda}-1\right)\\
&\mp P_\mu\cdot\sqrt{\frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}}\cdot\left(\frac{xx'}{\alpha-\mu}+\frac{yy'}{\beta-\mu}-\frac{zz'}{\mu-\gamma}-1\right)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Von den durch diese 3 Gleichungen mit ihren doppelten Vorzeichen dargestellten 6 Ebenen gehen je 3 durch jede der 4 gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 im Punkte λ, μ, ν und je 2 durch jede der 3 Axen des Punktes. Jede der 6 Ebenen enthält eine Axe und zwei in Bezug auf diese Axe conjugirte Tangenten in sich; je 2 durch dieselbe Axe gehende Ebenen enthalten alle 4 Tangenten.

Die hiernach zu den gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 im Punkte λ, μ, ν einerseits und zu den Axen des Punktes andrerseits in naher Beziehung stehenden 3 Ebenenpaare (7) sollen *„die dem Punkte zugehörigen Normalebenenpaare“* heissen und mit E_λ, E_μ, E_ν bezeichnet werden, entsprechend den Axen N_λ, N_μ, N_ν des Punktes, die sie enthalten. Die beiden Ebenen eines Paares mögen dadurch unterschieden werden, dass dem Buchstaben E das in der entsprechenden Gleichung (7) zur Verbindung beider Terme geltende Vorzeichen als oberer Index beigefügt wird. Sonach sind E_λ^- und E_λ^+ die beiden durch die 1. Gleichung (7) dargestellten Ebenen, welche die Axe N_λ und je 2 in Bezug auf diese conjugirte Tangenten enthalten. Wo im Folgenden ausschliesslich das Ebenenpaar E_λ zur Verwerthung gelangt, werden die Elemente desselben schlechthin *„die Normalebenen des Punktes λ, μ, ν“* genannt werden.

Um über die Bedeutung der Vorzeichen in den Gleichungen (7) bestimmte Angaben machen zu können, muss man über die Richtung der Hauptaxen der confocalen Flächen, der Axen der äusseren Punkte und der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 bestimmte Festsetzungen einführen.

Die *Hauptaxen der confocalen Flächen* sollen in der gewöhnlichen Weise orientirt sein, so dass, von der positiven Hälfte der z-Axe aus

gesehen, die positive Hälfte der x-Axe in der umgekehrten Richtung des Uhrzeigers um 90^0 gedreht werden muss, um mit der positiven Hälfte der y-Axe zusammenzufallen.

Von der positiven z-Axe aus gesehen, soll ferner die positive Durchlaufungsrichtung des Hauptschnittes $\mu = \gamma$ ($z = 0$) des Ellipsoides λ_0 als die der Richtung des Uhrzeigers entgegengesetzte erscheinen. Diese Richtung überträgt sich durch Continuität auf alle *Krümmungscurven* $\mu = \mu$ ($\gamma < \mu < \mu_0$), welche *die Zone* $(\mu_0 \mu_0)$ *des Ellipsoides* λ_0 *zwischen den beiden Aesten der Krümmungscurve* $\mu = \mu_0$ durchziehen, und damit auf die *Axen* N_ν der äusseren Punkte des Ellipsoides λ_0. An der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ sind 4 Felder zu unterscheiden, für deren Punkte die Coordinaten x, y bezüglich die Vorzeichen: $++$, $-+$, $--$, $+-$ haben; innerhalb des einzelnen Feldes ist, in der positiven Richtung der Krümmungscurven $\mu = \mu$ gemessen, das Differential $d\nu$ positiv oder negativ, jenachdem das Product xy positiv oder negativ ist. Mit andern Worten gesagt, es nimmt die Variable ν längs der positiven Richtung der Krümmungscurven $\mu = \mu$ zu oder ab, jenachdem xy positiv oder negativ ist.

Die positive Richtung der z-Axe erscheint, wenn man auf der Aussenseite des Ellipsoides λ_0 den Hauptschnitt $\mu = \gamma$ durchläuft, beständig von der Rechten zur Linken laufend. In gleichem Sinne soll als die positive Richtung der einzelnen Stücke der *Krümmungscurven* $\nu = \nu$, welche die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ quer durchsetzen, die von der Rechten zur Linken führende Richtung gelten. Diese Richtung überträgt sich auf die *Axen* N_μ der Punkte der Zone. In der positiven Richtung der Krümmungscurven $\nu = \nu$ gemessen, ist das Differential $d\mu$ positiv oder negativ, jenachdem für die betreffende Stelle z positiv oder negativ ist.

Die Bestimmungen, welche über die positive Richtung der Krümmungscurven $\mu = \mu$ und der Stücke der Krümmungscurven $\nu = \nu$ auf der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ *des Ellipsoides* λ_0 getroffen wurden, sollen continuirlich auf die entsprechenden Zonen der das Ellipsoid λ_0 umschliessenden *Ellipsoide* λ übertragen werden. Die so für jeden äusseren Punkt P festgesetzte Richtung der Krümmungscurven $\nu = \nu$ und $\mu = \mu$ des betreffenden Ellipsoides λ theilt sich bezüglich den Axen N_μ und N_ν des Punktes mit, deren Anfangselemente im Punkte P mit den bezüglichen Krümmungscurven zusammenfallen.

Die *Normale* N_λ des Ellipsoides λ im Punkte P soll immer mit ihrer positiven Richtung in das Innere des Ellipsoides führen, sodass $d\lambda$, in dieser Richtung gemessen, positiv ist.

Auf einer *gemeinsamen Tangente* der Flächen λ_0 und μ_0 kann das Differential $d\nu$ nur dann aus einem positiven in einen negativen Werth oder umgekehrt übergehen, wenn die Tangente die Ebene $\nu = \beta$ oder

$\nu = \alpha$ durchsetzt, da sonst die Tangente eine Fläche $v = \nu$ berühren müsste, was nicht möglich ist. Demnach kann die *positive Richtung der Tangente* geradezu dadurch definirt werden, dass der Werth des in dieser Richtung gemessenen Differentials $d\nu$ positiv oder negativ sein soll, jenachdem an der betreffenden Stelle xy positiv oder negativ ist.

Die durch die Formeln:

$$(8) \quad x = \frac{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\alpha-\nu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}}, \quad y = \frac{\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}},$$

$$z = \frac{\sqrt{\gamma-\lambda}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}$$

als Functionen der λ, μ, ν definirten rechtwinkligen Coordinaten erhalten ihre verschiedenen Vorzeichen durch die Zweideutigkeit der Quadratwurzeln. Für die Punkte eines festen Ellipsoides $\lambda\,(\lambda < \lambda_0)$ wird man den Wurzeln mit der Variablen λ ein bestimmtes, etwa das positive Vorzeichen ertheilen; das Gleiche soll allgemein für die constanten Wurzeln $\sqrt{\alpha-\beta}$, $\sqrt{\alpha-\gamma}$, $\sqrt{\beta-\gamma}$ geschehen. Aber auch die Wurzeln $\sqrt{\alpha-\mu}$, $\sqrt{\beta-\mu}$, $\sqrt{\nu-\gamma}$ dürfen für äussere Punkte ein constantes positives Vorzeichen erhalten, da sie, als stetige Functionen des Ortes betrachtet, in Folge der Ungleichungen (6) im äusseren Raume ihr Vorzeichen nicht wechseln.

Die Zweideutigkeit der Coordinaten x, y, z der äusseren Punkte des Ellipsoides λ fällt daher auf die Quadratwurzeln $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, die im äusseren Raume verschwinden und somit ihr Vorzeichen wechseln können. Jenachdem diese 3 Wurzeln das positive oder negative Vorzeichen erhalten, werden die Coordinaten x, y, z beziehungsweise positiv oder negativ sein. Es sollen mit Rücksicht hierauf die Wurzeln $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, einschliesslich der betreffenden Vorzeichen, die *„dem Punkte x, y, z zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen"* heissen.

In analoger Weise, wie die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes P drücken sich die vom Coordinatenanfangspunkt auf die Tangentialebenen T_λ, T_μ, T_ν der Flächen λ, μ, ν im Punkte P gefällten Perpendikel P_λ, P_μ, P_ν durch die elliptischen Coordinaten des Punktes aus; es ist nämlich*):

$$(9) \quad P_\lambda = \frac{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}}, \quad P_\mu = \frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}},$$

$$P_\nu = \frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}}.$$

*) Vgl. Salmon-Fiedler a. a. O., Art. 165.

Es sollen nun hier unter $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ die dem Punkte P zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen verstanden, alle übrigen Quadratwurzeln aber positiv gerechnet werden, sodass P_λ immer positiv, dagegen P_μ positiv oder negativ, jenachdem z, und P_ν positiv oder negativ ist, jenachdem xy positiv oder negativ ausfällt. In dieser Bedeutung sollen P_λ, P_μ, P_ν auch in den Substitutionsformeln (4) genommen werden, nach welchen P_λ, P_μ, P_ν die Coordinaten des Mittelpunktes M der confocalen Flächen in Bezug auf die Axen des Punktes P sind. In Uebereinstimmung mit den obigen Festsetzungen über die Richtung der Axen N_λ, N_μ, N_ν liegt dann der Punkt M immer auf der positiven Seite der Ebene $N_\mu N_\nu$, d. i. auf der Seite der positiven Halbaxe N_λ, ferner auf der positiven oder negativen Seite der Ebene $N_\nu N_\lambda$, jenachdem z positiv oder negativ, endlich auf der positiven oder negativen Seite der Ebene $N_\lambda N_\mu$, jenachdem xy positiv oder negativ ist.

Auf Grund der gemachten Festsetzungen ist die Bedeutung der Vorzeichen in den Gleichungen (7) allgemein angebbar. Die Gleichung des 1. Ebenenpaares (7), welches die Normale N_λ als Axe hat, lautete in den Coordinaten X, Y, Z:

$$\frac{\sqrt{\nu - \lambda_0}\sqrt{\nu - \mu_0}}{\sqrt{\nu - \lambda}\sqrt{\nu - \mu}} \cdot Y \mp \frac{\sqrt{\mu - \lambda_0}\sqrt{\mu_0 - \mu}}{\sqrt{\nu - \mu}\sqrt{\mu - \lambda}} \cdot Z = 0.$$

Denkt man sich auch hier den beweglichen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ auf die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ eines festen Ellipsoides λ beschränkt, so kann von den vorkommenden Quadratwurzeln nur eine einzige, $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, als Function des Ortes λ, μ, ν betrachtet, ihr Vorzeichen wechseln. Das Gleiche würde gelten, indem der Punkt $P = \lambda$, μ, ν überhaupt in dem durch die Ungleichungen (6) bestimmten äusseren Raume sich bewegte, wenn nicht die Quadratwurzeln $\sqrt{\nu - \lambda}$ und $\sqrt{\mu - \lambda}$ beim Durchgang durch $\lambda = -\infty$ selbst unendlich würden; es hat indessen ein dabei bewirkter gleichzeitiger Vorzeichenwechsel der beiden Quadratwurzeln auf die vorliegende Gleichung keinen Einfluss. Demnach gehört das doppelte Vorzeichen in der Gleichung wesentlich zu der Quadratwurzel $\sqrt{\mu_0 - \mu}$.

Die positive Richtung der beiden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, welche in der Ebene E_λ^- oder E_λ^+ liegen, bildet nun nach der Definition dieser positiven Richtung mit der positiven Richtung der Normale N_ν im Punkte P immer einen spitzen Winkel; jenachdem sie daher mit N_μ einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet, gilt in der betrachteten Gleichung das obere oder untere Vorzeichen, sofern man $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, wie die übrigen Wurzeln, positiv denkt und das zu $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ gehörige doppelte Vorzeichen *explicite*

schreibt. *Es gilt daher auch in der* 1. *Gleichung* (7) *das obere oder untere Vorzeichen, jenachdem die in der dargestellten Ebene E_λ enthaltenen*) gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 mit N_μ einen spitzen oder stumpfen Winkel bilden.*

Mit Rücksicht hierauf soll unter der „*einer Normalebene E_λ zugehörigen einfachen Wurzelfunction*" der positive oder negative Werth von $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ verstanden werden, jenachdem die in der Ebene gelegenen*) Tangenten mit der Axe N_μ einen spitzen oder stumpfen Winkel bilden. Bedeutet dann in der 1. Gleichung (7) $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ die der darzustellenden Ebene E_λ zugehörige Wurzelfunction, so bleibt an Stelle des doppelten Zeichens $\mp$ nur das Zeichen $-$ explicite stehen.

Um die beiden durch den Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ gehenden und in einer der Normalebenen E_λ enthaltenen gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 ihrerseits zu unterscheiden, soll denselben je einer der beiden Werthe von $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ zugeordnet werden, der positive Werth derjenigen Tangente, welche mit der Axe N_λ einen spitzen, der negative derjenigen, welche mit N_λ einen stumpfen Winkel bildet. Diese Zuordnung rechtfertigt sich mittels der 2. Gleichung (7) in analoger Weise, wie die Zuordnung der Wurzel $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ zu den Ebenen E_λ mittels der 1. Gleichung (7).

Zusammenfassend kann man die vorstehenden Ergebnisse so aussprechen:

Einem den Ungleichungen (6) *entsprechenden Werthsystem λ, μ, ν der elliptischen Coordinaten entsprechen* 8 *äussere Punkte P, die sich durch die Vorzeichen der zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ unterscheiden.*

Zu jedem dieser 8 *Punkte gehören zwei Normalebenen E_λ, welche durch die Verschiedenheit des Vorzeichens der zugehörigen einfachen Wurzelfunction $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ auseinander zu halten sind.*

In jeder der beiden Normalebenen liegen zwei in dem betreffenden Punkte einander conjugirte Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, welche durch das Vorzeichen der zugehörigen einfachen Wurzelfunction $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ charakterisirt werden.

§ 3.

Die homogenen Coordinaten der beiden Normalebenen eines Punktes als Functionen seiner elliptischen Coordinaten.

Die 1. Gleichung (7) der dem Punkte $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ zugehörigen Normalebenen E_λ lautet, wenn man nach dem in § 2 ge-

*) In einer Ebene des Raumes liegen im Allgemeinen 4 gemeinsame Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0; es ist aber hier nur von der Anordnung der 4 *durch einen gegebenen Punkt* gehenden Tangenten die Rede.

troffenen Uebereinkommen nur das obere der beiden Vorzeichen explicite stehen lässt, ferner in homogener Schreibweise $x:t$, $y:t$, $z:t$ für x, y, z einführt und nach den laufenden Coordinaten x', y', z', t' ordnet:

$$
(10)\quad \begin{aligned}
&\left\{\frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}}\cdot P_\mu\cdot\frac{x}{\alpha-\mu}-\frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}}\cdot P_\nu\cdot\frac{x}{\alpha-\nu}\right\}x' \\
+&\left\{\frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}}\cdot P_\mu\cdot\frac{y}{\beta-\mu}+\frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}}\cdot P_\nu\cdot\frac{y}{\nu-\beta}\right\}y' \\
+&\left\{-\frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}}\cdot P_\mu\cdot\frac{z}{\mu-\gamma}+\frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}}\cdot P_\nu\cdot\frac{z}{\nu-\gamma}\right\}z' \\
+&\left\{-\frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}}\cdot P_\mu\cdot t\quad+\frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}}\cdot P_\nu\cdot t\right\}t'=0.
\end{aligned}
$$

Die in Klammern geschlossenen Coefficienten von x', y', z', t' mögen als die homogenen Coordinaten der Ebene E_λ mit ξ, η, ζ, τ bezeichnet werden, so dass die Gleichung der Ebene die Form erhält:

$$
(11)\qquad \xi\cdot x'+\eta\cdot y'+\zeta\cdot z'+\tau\cdot t'=0.
$$

Die Formeln (8) und (9) gestatten nun die in der Gleichung (10) gegebenen Verhältnisse der ξ, η, ζ, τ durch die elliptischen Coordinaten des Punktes P darzustellen. Indem man dabei zur Erleichterung für spätere Zwecke gewisse Factoren hinzufügt, die auf die Verhältnisse der ξ, η, ζ, τ ohne Einfluss sind, kann man das erhaltene Resultat so formuliren:

Die homogenen Coordinaten ξ, η, ζ, τ der beiden Normalebenen E_λ im Punkte $P = x, y, z, t = \lambda, \mu, \nu$ drücken sich, mit einem Proportionalitätsfactor $\varkappa$, in den elliptischen Coordinaten des Punktes folgendermaassen aus:

$$
(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varkappa\cdot\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot\xi=+\frac{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}}\times \\
&\frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}, \\
&\varkappa\cdot\sqrt{\beta-\lambda_0}\cdot\eta=+\frac{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}}\times \\
&\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}, \\
&\varkappa\cdot\sqrt{\gamma-\lambda_0}\cdot\zeta=-\frac{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}\times \\
&\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}, \\
&\varkappa\cdot\tau= \\
-&\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}.
\end{aligned}\right.
$$

Hier bedeuten $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ die dem Punkte P zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen und $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ die der einzelnen Ebene E_λ zugehörige einfache Wurzelfunction, während alle übrigen Wurzeln positiv gelten.

Die Ebenencoordinaten ξ, η, ζ, τ erscheinen hiernach als *mehrdeutige symmetrische Functionen der beiden elliptischen Coordinaten μ und ν.* Die besondere Stellung der elliptischen Coordinate λ hat ihren Grund in der Auswahl des durch die Axe N_λ gehenden Ebenenpaares E_λ unter den 3 dem Punkte P zugehörigen Ebenenpaaren E_λ, E_μ, E_ν.

Zu einem Werthetripel λ, μ, ν gehören im Allgemeinen 8 Werthsysteme der 3 in (8) definirten Verhältnisse der x, y, z, t, dagegen 16 Werthsysteme der 3 in (12) definirten Verhältnisse der ξ, η, ζ, τ. Die ersteren sind durch die Vorzeichen der einfachen Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$, die letzteren durch diese und überdies durch das Vorzeichen der Wurzelfunction $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ unterschieden.

Für die Punkte des einschaligen Hyperboloides μ_0 fallen die beiden zugehörigen Normalebenen E_λ in die Tangentialebene T_μ des Hyperboloides zusammen, und das analytische Unterscheidungsmoment, das Vorzeichen von $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, verschwindet.

Da die dem Punkte x, y, z, t zugehörigen Normalebenen E_λ beide ihrer Definition nach den Punkt enthalten, muss die Bedingung (11) der vereinigten Lage von Punkt und Ebene für $x', y', z', t' = x, y, z, t$ identisch erfüllt sein. In der That liefert die Substitution der Werthe (8) und (12) in die Gleichung (11) eine in Bezug auf λ, μ, ν, unabhängig vom Vorzeichen von $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, *identische* Gleichung.

§ 4.

Die homogenen Liniencoordinaten der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 als Functionen der elliptischen Coordinaten des Berührungspunktes mit der Fläche λ_0.

Zwei einander conjugirte gemeinsame Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, welche durch den äusseren Punkt $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ gehen und in einer der beiden Ebenen E_λ liegen, fallen in *eine* Tangente zusammen, wenn der Punkt P auf die Fläche des Ellipsoides zu liegen kommt. Die beiden in einem Punkte P der Fläche λ_0 noch vorhandenen getrennten Tangenten erscheinen daher als Schnittlinien der Tangentialebene des Ellipsoides λ_0 in dem Punkte x, y, z mit den beiden zugehörigen Normalebenen E_{λ_0}. Als solche stellen sich diese Tangenten durch die Gleichungen:

$$X = 0, \quad \frac{\sqrt{\nu - \mu_0}}{\sqrt{\nu - \mu}} \cdot Y - \frac{\sqrt{\mu_0 - \mu}}{\sqrt{\nu - \mu}} \cdot Z = 0 \qquad (14$$

in laufenden Coordinaten X, Y, Z (vgl. § 1, 5) oder:

$$\frac{xx'}{\alpha-\lambda_0}+\frac{yy'}{\beta-\lambda_0}+\frac{zz'}{\gamma-\lambda_0}-1=0,$$

$$\frac{\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\mu}}\cdot P_\mu\left(\frac{xx'}{\alpha-\mu}+\frac{yy'}{\beta-\mu}-\frac{zz'}{\mu-\gamma}-1\right)$$

$$-\frac{\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}}\cdot P_\nu\left(\frac{xx'}{\alpha-\nu}-\frac{yy'}{\nu-\beta}-\frac{zz'}{\nu-\gamma}-1\right)=0$$

in laufenden Coordinaten x', y', z' dar; dabei ist $\sqrt{\mu_0-\mu}$ die der Ebene E_{λ_0}, in der die einzelne Tangente liegt, zugehörige einfache Wurzelfunction.

Durch Combination beider Gleichungen ergiebt sich:

$$\sqrt{\nu-\mu_0}\,.\,P_\mu(\mu-\lambda_0)\left\{\frac{xx'}{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\mu)}+\frac{yy'}{(\beta-\lambda_0)(\beta-\mu)}-\frac{zz'}{(\gamma-\lambda_0)(\mu-\gamma)}\right\}$$

$$-\sqrt{\mu_0-\mu}\,.\,P_\nu(\nu-\lambda_0)\left\{\frac{xx'}{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\nu)}-\frac{yy'}{(\beta-\lambda_0)(\nu-\beta)}-\frac{zz'}{(\gamma-\lambda_0)(\nu-\gamma)}\right\}=0,$$

und wenn man nach x', y', z' ordnet und die Werthe (8) und (9) der x, y, z und der P_μ, P_ν einsetzt:

$$px'+qy'+rz'=0, \tag{13}$$

wo die Verhältnisse der Coefficienten p, q, r, mit einem Proportionalitätsfactor $\varkappa$, durch folgende *symmetrische Functionen der beiden elliptischen Coordinaten* μ *und* ν gegeben werden können:

$$\tag{14}\left\{\begin{aligned}
\varkappa.\sqrt{\alpha-\lambda_0}.p&=+\frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\
\varkappa.\sqrt{\beta-\lambda_0}.q&=+\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\
\varkappa.\sqrt{\gamma-\lambda_0}.r&=-\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}.
\end{aligned}\right.$$

Die in Rücksicht auf spätere Zwecke den Ausdrücken rechter Hand zugefügten gemeinsamen Factoren sind auf die Verhältnisse der p, q, r ohne Einfluss. Unter $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$ sind, wie oben, die dem Punkte P zugehörigen Wurzelfunctionen, unter $\sqrt{\mu_0-\mu}$ die der Ebene E_{λ_0}, welche die betrachtete Tangente enthält, zugehörige Wurzelfunction verstanden; alle übrigen Wurzeln sind positiv.

Das Resultat ist zunächst dies:

Eine gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 *und* μ_0 *in einem Punkte* $P=x, y, z=\lambda_0, \mu, \nu$ *der ersteren Fläche ist in laufenden Coordinaten* x', y', z' *durch die beiden Gleichungen:*

$$(15) \qquad \frac{xx'}{\alpha-\lambda_0}+\frac{yy'}{\beta-\lambda_0}+\frac{zz'}{\gamma-\lambda_0}-1=0,$$

$$(13) \qquad px'+qy'+rz'=0$$

dargestellt, wo x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P, p, q, r aber die in (14) definirten Functionen seiner elliptischen Coordinaten sind. Die dargestellte Tangente bildet mit der Krümmungscurve $v = v$ des Ellipsoides λ_0 einen spitzen oder stumpfen Winkel, jenachdem in (14) $\sqrt{\mu_0-\mu}$ positiv oder negativ ist.

Die Gleichung (13) kann als Gleichung eines *Ebenenbündels* mit den homogenen Coordinaten p, q, r betrachtet werden. Jedem Punkte P der Fläche λ_0 gehören 2 Ebenen dieses Bündels zu, welche die beiden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 in dem Punkte enthalten. Der Punkt P liegt in jeder der beiden ihm in diesem Sinne zugehörigen Ebenen des Bündels, und entsprechend ist die Gleichung (13) *identisch* erfüllt, wenn man darin für x', y', z' die Werthe (8) der Coordinaten des Punktes P (mit $\lambda = \lambda_0$) und für p, q, r die Werthe (14) substituirt, gleichviel ob daselbst $\sqrt{\mu_0-\mu}$ positiv oder negativ ist.

Durch die elliptischen Coordinaten μ, v des Punktes P der Fläche λ_0 ist die Ebene p, q, r achtdeutig bestimmt; denn von den 16 Combinationen der Vorzeichen der 4 Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha-v}$, $\sqrt{v-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, $\sqrt{\mu_0-\mu}$ geben die durch gleichzeitige Umkehr der 4 Vorzeichen auseinander hervorgehenden Combinationen dieselbe Ebene. Geometrisch entspricht diesem Umstande, dass die 16 gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, welche zu 8 Punkten der Fläche λ_0 mit gleichen μ, v gehören, paarweise in derselben Ebene p, q, r liegen; jedoch so, dass 2 Tangenten, die in demselben Punkte berühren, in verschiedenen Ebenen liegen, und 2 Tangenten, die in derselben Ebene liegen, in verschiedenen Punkten berühren.

Für die Punkte $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, $v = v$ der Durchdringungscurve der beiden Flächen λ_0 und μ_0 verschwinden die zweiten Glieder im Zähler der Ausdrücke (14), und damit die Unterscheidung der beiden einem Punkte x, y, z im Allgemeinen zugehörigen zwei Ebenen p, q, r, entsprechend dem Umstande, dass in den Punkten der Durchdringungscurve die beiden Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 zusammenfallen.

Die Darstellung (13), (15) der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 vermittelt den Uebergang zu den *Plücker'schen Liniencoordinaten dieser Tangenten.*

Die Tangenten bilden eine Liniencongruenz 4. Ordnung und 4. Classe. In den 6 homogenen Strahlencoordinaten p_{ik} der geraden Linie, die sich als Functionen zweier beliebiger Punkte x, y, z und x', y', z' der Linie in der bekannten Weise:

$$\text{(16)}\quad \begin{cases} p_{12} = x - x', & p_{13} = y - y', \quad p_{14} = z - z', \\ p_{34} = yz' - zy', & p_{42} = zx' - xz', \quad p_{23} = xy' - yx' \end{cases}$$

ausdrücken, stellt sich die Liniencongruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, zuzüglich der zwischen den Liniencoordinaten bestehenden Identität, durch folgende 3 Gleichungen dar:

$$\text{(17)}\quad \begin{cases} p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0, \\ \dfrac{p_{12}^2}{\alpha - \lambda_0} + \dfrac{p_{13}^2}{\beta - \lambda_0} + \dfrac{p_{14}^2}{\gamma - \lambda_0} - \dfrac{p_{34}^2}{(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0)} - \dfrac{p_{42}^2}{(\gamma - \lambda_0)(\alpha - \lambda_0)} - \dfrac{p_{23}^2}{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)} = 0, \\ \dfrac{p_{12}^2}{\alpha - \mu_0} + \dfrac{p_{13}^2}{\beta - \mu_0} - \dfrac{p_{14}^2}{\mu_0 - \gamma} + \dfrac{p_{34}^2}{(\beta - \mu_0)(\mu_0 - \gamma)} + \dfrac{p_{42}^2}{(\mu_0 - \gamma)(\alpha - \mu_0)} - \dfrac{p_{23}^2}{(\alpha - \mu_0)(\beta - \mu_0)} = 0. \end{cases}$$

Um die Coordinaten p_{ik} der Congruenzstrahlen von den elliptischen Coordinaten μ, ν der Berührungspunkte mit der Fläche λ_0 abhängig zu machen, entnimmt man zunächst aus (13), (15) für die Verhältnisse der Liniencoordinaten die Werthe:

$$\begin{aligned} \varkappa' \cdot p_{12} &= \frac{yr}{\beta - \lambda_0} - \frac{zq}{\gamma - \lambda_0}, & \varkappa' \cdot p_{34} &= p, \\ \varkappa' \cdot p_{13} &= \frac{zp}{\gamma - \lambda_0} - \frac{xr}{\alpha - \lambda_0}, & \varkappa' \cdot p_{42} &= q, \\ \varkappa' \cdot p_{14} &= \frac{xq}{\alpha - \lambda_0} - \frac{yp}{\beta - \lambda_0}, & \varkappa' \cdot p_{23} &= r, \end{aligned}$$

wo $\varkappa'$ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Indem man alsdann die Coordinaten x, y, z des Berührungspunktes und die Coordinaten p, q, r der den Strahl enthaltenden Ebene des Bündels von den μ, ν abhängig ausdrückt, erhält man die gewünschte Form der Liniencoordinaten. Das Resultat kann in folgender Form ausgesprochen werden:

Sind μ, ν die elliptischen Coordinaten des Berührungspunktes einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 mit der Fläche λ_0, so hängen die Liniencoordinaten der Tangente von μ, ν in dieser Weise ab:

$$\text{(18)}\quad \begin{cases} \varkappa \cdot \dfrac{p_{12}}{\sqrt{\alpha - \lambda_0}} = + \dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} + \sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\ \varkappa \cdot \dfrac{p_{13}}{\sqrt{\beta - \lambda_0}} = - \dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} - \sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\ \varkappa \cdot \dfrac{p_{14}}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} = - \dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} + \sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\ \varkappa \cdot \dfrac{p_{34}}{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = - \dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} - \sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \end{cases}$$

$$(18)\begin{cases} \varkappa \cdot \dfrac{p_{42}}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = -\dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\[2ex] \varkappa \cdot \dfrac{p_{23}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda_0}} = +\dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \end{cases}$$

Hier ist $\varkappa$ ein Proportionalitätsfactor, und bedeuten $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$ die dem Berührungspunkte zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen, und ist $\sqrt{\mu_0-\mu}$ positiv oder negativ, jenachdem die positive Richtung des Strahles p_{ik} mit der positiven Richtung der Krümmungscurve $\nu=\nu$ einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet.

Die einem Werthepaare μ, ν entsprechenden 16 Tangenten erhalten ihre Liniencoordinaten p_{ik}, indem jeweils in den Definitionsgleichungen (18) die 16 Vorzeichencombinationen der 4 Quadratwurzeln $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, $\sqrt{\mu_0-\mu}$ benutzt werden.

§ 5.

Differentialgleichungen der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0.

Die Gleichungen (5) des § 1, welche in den §§ 2—4 zur Darstellung der *algebraischen Bestimmungsstücke* der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch elliptische Coordinaten benutzt wurden, führen andrerseits auf die *Differentialgleichungen* der bezeichneten Tangenten in elliptischen Coordinaten.*)

Sei auf einer der 4 vom Punkte $P=x, y, z=\lambda, \mu, \nu$ an die Flächen λ_0 und μ_0 gelegten Tangenten ein Element dS durch den Punkt λ, μ, ν und den in der positiven Richtung (vgl. § 2) der Tangente folgenden Nachbarpunkt $\lambda+d\lambda$, $\mu+d\mu$, $\nu+d\nu$ abgegrenzt.

Die Proportion (5), der die Coordinaten X, Y, Z der Punkte der Tangente genügen, muss im Besonderen erfüllt werden, wenn man für X, Y, Z die Projectionen $d\sigma_\lambda$, $d\sigma_\mu$, $d\sigma_\nu$ des Elementes dS auf die Axen N_λ, N_μ, N_ν des Punktes P substituirt. Diese Projectionen hängen von den Differentialen $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ in folgender Weise ab:**)

$$d\sigma_\lambda = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}\cdot d\lambda}{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\gamma-\lambda}}, \quad d\sigma_\mu = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}\cdot d\mu}{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}},$$

$$d\sigma_\nu = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}\cdot d\nu}{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}},$$

*) Eine Andeutung hierüber findet sich bei Liouville, Liouville's Journal, Bd. XII (1847), S. 255.

**) Vergl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch, S. 205, 210.

wo wiederum unter $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$ die dem Punkte P zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen zu verstehen sind, alle übrigen Wurzeln aber positiv gelten sollen.

Es bleibt dann in Uebereinstimmung mit den Anschauungen des § 2 für äussere Punkte des Ellipsoides $\lambda \cdot d\sigma_\nu$ immer positiv; dagegen wird $d\sigma_\mu$ positiv oder negativ, jenachdem $d\mu$ und $\sqrt{\mu-\gamma}$ gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, und stimmt das Vorzeichen von $d\sigma_\lambda$ mit dem von $d\lambda$ überein, d. h. sind $d\sigma_\lambda$ und $d\lambda$ gleichzeitig von positivem oder von negativem Werthe.

Indem man bei der dreigliedrigen Proportion (5) die doppelten Vorzeichen, die nur an 2 Stellen beibehalten zu werden brauchen, im Sinne des § 2 in die Wurzeln $\sqrt{\lambda_0-\lambda}$ und $\sqrt{\mu_0-\mu}$ hineingelegt denkt und alle andern Wurzeln positiv nimmt, gewinnt die Proportion mit Einsetzung der Werthe von $d\sigma_\lambda$, $d\sigma_\mu$, $d\sigma_\nu$ die Form:

$$\frac{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}\cdot d\lambda}{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\gamma-\lambda}} : \frac{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}\cdot d\mu}{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}} : \frac{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}\cdot d\nu}{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda_0-\lambda}\sqrt{\mu_0-\lambda}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}} : \frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}} : \frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}}.$$

Hier unterscheidet das Vorzeichen von $\sqrt{\mu_0-\mu}$ die beiden Paare in Bezug auf N_λ conjugirter Tangenten im Punkte P, und das Vorzeichen von $\sqrt{\lambda_0-\lambda}$ die beiden Tangenten des einzelnen Paares. Mit den Abkürzungen:

$$\mathsf{\Lambda}' = \sqrt{\alpha-\lambda}\,\sqrt{\beta-\lambda}\,\sqrt{\gamma-\lambda}\,\sqrt{\lambda_0-\lambda}\,\sqrt{\mu_0-\lambda},$$

$$\mathsf{M}' = \sqrt{\alpha-\mu}\,\sqrt{\beta-\mu}\,\sqrt{\mu-\gamma}\,\sqrt{\mu-\lambda_0}\,\sqrt{\mu_0-\mu},$$

$$\mathsf{N}' = \sqrt{\alpha-\nu}\,\sqrt{\nu-\beta}\,\sqrt{\nu-\gamma}\,\sqrt{\nu-\lambda_0}\,\sqrt{\nu-\mu_0}$$

schreibt sich die Proportion in der einfacheren Gestalt:

$$\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}'} : \frac{d\mu}{\mathsf{M}'} : \frac{d\nu}{\mathsf{N}'} = \nu-\mu : \nu-\lambda : \mu-\lambda.$$

Da für äussere Punkte die rechts stehenden Differenzen immer positiv sind, dasselbe aber von $\frac{d\nu}{\mathsf{N}'}$ gilt, so müssen auch $\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}'}$ und $\frac{d\mu}{\mathsf{M}'}$ positiv ausfallen.

Das Resultat ist somit dieses:

Wählt man für einen äusseren Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ eine der beiden Normalebenen $E_\lambda^{\mp}$ und in dieser eine der beiden conjugirten gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 aus, so lauten die Differentialgleichungen dieser Tangente T:

$$\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}'} : \frac{d\mu}{\mathsf{M}'} : \frac{d\nu}{\mathsf{N}'} = \nu-\mu : \nu-\lambda : \mu-\lambda,$$

wo in den Producten $\mathsf{\Lambda}'$, M', N' $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$ die dem

Punkte P, $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ *die der Ebene* E_λ *und* $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ *die der Tangente zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen sind, und alle andern Factoren positiv gelten.*

Geht man von den *Producten* $\mathsf{\Lambda}'$, M', N' *der einfachen Wurzelfunctionen* zu den *zusammengesetzten Wurzelfunctionen:*

$$\mathsf{\Lambda} = \sqrt{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)},$$
$$\mathsf{M} = \sqrt{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)(\mu_0 - \mu)},$$
$$\mathsf{N} = \sqrt{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)},$$

über und schreibt die Differentialgleichungen der Tangente in der Form:

$$(19) \qquad \frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}} : \frac{d\mu}{\mathsf{M}} : \frac{d\nu}{\mathsf{N}} = \nu - \mu : \nu - \lambda : \mu - \lambda,$$

so hat man die Vorzeichen der zusammengesetzten Wurzelfunctionen allgemein so zu bestimmen, dass die Differentiale $\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}}$, $\frac{d\mu}{\mathsf{M}}$, $\frac{d\nu}{\mathsf{N}}$ alle positiv oder alle negativ ausfallen. Aus der erhaltenen Proportion gehen nun in Folge der Identitäten:

$$(\nu - \mu) - (\nu - \lambda) + (\mu - \lambda) = 0,$$
$$\lambda(\nu - \mu) - \mu(\nu - \lambda) + \nu(\mu - \lambda) = 0$$

die hyperelliptischen Differentialgleichungen hervor:

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}} - \dfrac{d\mu}{\mathsf{M}} + \dfrac{d\nu}{\mathsf{N}} = 0, \\[2ex] \dfrac{\lambda\, d\lambda}{\mathsf{\Lambda}} - \dfrac{\mu\, d\mu}{\mathsf{M}} + \dfrac{\nu\, d\nu}{\mathsf{N}} = 0. \end{cases}$$

Es sind dies also die Differentialgleichungen der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 *und* μ_0 *in elliptischen Coordinaten.*

§ 6.

Vertheilung der zusammengesetzten Wurzelfunctionen auf die äusseren Punkte.

Die Fortschreitungsrichtung von einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ zu einem Nachbarpunkte $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ giebt nach § 5 die Richtung einer gemeinsamen Tangente T an die Flächen λ_0 und μ_0, wenn die Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ den Gleichungen (20) mit einer der 4 verschiedenen Combinationen in den Vorzeichen der Verhältnisse der Quadratwurzeln $\mathsf{\Lambda}$, M, N genügen. In diesem Sinne gehört jedem durch seine Endpunkte λ, μ, ν und $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ charakterisirten Linienelement dS einer solchen Tangente T eine bestimmte Combination in den Vorzeichen der Verhältnisse der Quadratwurzeln

Λ, M, N zu. Man kann aber darüber hinaus dem Elemente dS eine bestimmte Combination der Vorzeichen der Quadratwurzeln Λ, M, N selbst zuordnen.

Nach den Festsetzungen des § 2 haben nämlich die Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, von einem äusseren Punkte P in der positiven Richtung einer Tangente T gemessen, durchaus bestimmte Vorzeichen, d. h. es ist völlig bestimmt, ob ein jedes derselben für das Element dS einen positiven oder negativen Werth hat. Diejenigen Werthe der Quadratwurzeln Λ, M, N, welche ihrem Vorzeichen nach bezüglich mit $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ übereinstimmen, sollen *die dem Elemente* dS oder auch *die dem Punkte* λ, μ, ν, *als einem Punkte der Tangente* T, *zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen* heissen.

Der Zusammenhang dieser zusammengesetzten mit den früheren einfachen Wurzelfunctionen ist nach § 5 ersichtlich. Es hat nämlich N für das Element dS das Vorzeichen des Productes der dem Punkte P zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha - \nu}$ und $\sqrt{\nu - \beta}$; es hat M das Vorzeichen des Productes der dem Punkte $\dot{P}$ zugehörigen Wurzelfunction $\sqrt{\mu - \gamma}$ und der der Ebene E_λ der Tangente T zugehörigen Wurzelfunction $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, endlich Λ das Vorzeichen der der Tangente T selbst zugehörigen Wurzelfunction $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$. Durch die 5 *einfachen Wurzelfunctionen* $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$, $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν, welche der Vereinigung dreier geometrischer Elemente: eines Punktes P, einer seiner beiden Normalebenen E_λ und einer der beiden in dieser enthaltenen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch P, eigenthümlich sind, sind also die dem Punkte P, als einem Punkte der Tangente T, zugehörigen *zusammengesetzten Wurzelfunctionen* völlig bestimmt; aber nicht umgekehrt. In der That gehören zu einem Werthetripel λ, μ, ν 8 Punkte mit je 4 Tangenten T; um die 32 Tangenten zu unterscheiden, müssen an Stelle der 8 Vorzeichencombinationen der zusammengesetzten Wurzelfunctionen Λ, M, N die 32 Vorzeichencombinationen der 5 einfachen Wurzelfunctionen eintreten. Da indessen die zusammengesetzten Wurzelfunctionen in Kapitel II zur Definition der Irrationalität eines hyperelliptischen Gebildes nöthig sein werden, soll die Vertheilung derselben im äusseren Raume noch kurz betrachtet werden.

Lässt man den Anfangspunkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Elementes dS längs der betreffenden Tangente T stetig fortlaufen, so werden sich die den successiven Elementen zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen beibehalten, solange keines der Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ sein Vorzeichen wechselt, d. h. aus einem positiven in einen negativen Werth oder umgekehrt übergeht.

Es liegen aber, wie aus der Natur des confocalen Systems (1)

ersichtlich ist, auf jeder Tangente 6 Punkte, in denen ein derartiger Zeichenwechsel stattfindet, nämlich die beiden Berührungspunkte der Tangente mit den Flächen λ_0 und μ_0 und die 4 Schnittpunkte der Tangente mit den Ebenen des Coordinatentetraeders, auf welches die Gleichung (1) bezogen ist. Diese 6 Punkte sind durch die Werthe: $\lambda = -\infty$, $\lambda = \lambda_0$; $\mu = \gamma$, $\mu = \mu_0$; $\nu = \beta$, $\nu = \alpha$ je einer ihrer elliptischen Coordinaten charakterisirt, und es bilden die Werthepaare: $-\infty\,\lambda_0$, $\gamma\mu_0$, $\beta\alpha$ nach (6) zugleich die Grenzen, innerhalb deren die Coordinaten λ, μ, ν eines Punktes einer reellen Tangente der beiden Flächen λ_0 und μ_0 beziehungsweise sich bewegen.

Wenn also der Anfangspunkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Elementes dS der Tangente T die ganze im Unendlichen geschlossen gedachte Tangente durchläuft, so wechselt jede der zugehörigen Wurzelfunctionen $\mathsf{\Lambda}$, M, N, *indem sie durch* 0 *oder* ∞ *hindurchgeht, zweimal das Vorzeichen.*

Nimmt daher auch jede der Variablen λ, μ, ν längs der Tangente jeden der ihr durch die Ungleichungen (6) zugewiesenen Werthe je *zweimal* an, so *unterscheiden sich* doch zwei Stellen, in denen die Variable den *nämlichen* Werth hat, durch das *Vorzeichen* der gleichbezeichneten Quadratwurzel $\mathsf{\Lambda}$, M oder N, welche den Stellen zugehört. Was im Besonderen das Verhalten der Quadratwurzel $\mathsf{\Lambda}$ angeht, der späterhin eine ausgezeichnete Rolle zufallen wird, so wird jede gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 durch ihren Berührungspunkt mit λ_0 einerseits und ihren Durchschnitt mit der unendlich fernen Ebene andrerseits in 2 Hälften getheilt; auf der einen, der vom Unendlichen her auf den Berührungspunkt zulaufenden Hälfte, ist $\mathsf{\Lambda}$ positiv, auf der andern, vom Berührungspunkt fortlaufenden negativ. Um dem gewöhnlichen Gebrauche zu folgen, nach welchem die vom Nullpunkt fortlaufende Hälfte einer Geraden positiv genannt wird, hat man also *an jeder gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 eine positive und eine negative Hälfte zu unterscheiden; auf jener ist* $\mathsf{\Lambda}$ *negativ, auf dieser positiv.*

Wenn im Vorstehenden jedem Punkte einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 von bestimmter Richtung die 3 Wurzelfunctionen $\mathsf{\Lambda}$, M, N mit bestimmten Vorzeichen als zugehörig angesehen wurden, so wurde davon abstrahirt, dass jeder in Bezug auf die Flächen λ_0 und μ_0 äussere Punkt des Raumes auf 4 solchen Tangenten liegt, und dass ihm in diesem Sinne 4 durch ihre Vorzeichen verschiedene Werthsysteme $\mathsf{\Lambda}$, M, N zukommen, die sich auf die 4 von ihm ausgehenden Tangentenelemente dS vertheilen. Nach der Definition der positiven Richtung der Tangenten (§ 2) *stimmen in den* 4 *einem Punkte λ, μ, ν (als einem Punkte auf* 4 *gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0) zugehörigen Tripeln zusammengesetzter Wurzelfunctionen* $\mathsf{\Lambda}$, M, N *immer die* 4 *Wurzelfunctionen* N *im Vorzeichen überein.* Die

Vorzeichen der 4 Tripel Λ, M, N fallen also unter den Typus: $+, +, \varepsilon$; $-, +, \varepsilon$; $+, -, \varepsilon$; $-, -, \varepsilon$; wo $\varepsilon = +$ oder $-$ ist, jenachdem für den Punkt λ, μ, ν xy positiv oder negativ ausfällt.

Was die Vertheilung der 4 dem Punkte zugehörigen Tripel zusammengesetzter Wurzelfunctionen auf die Elemente dS der 4 Tangenten durch den Punkt angeht, *so unterscheiden sich immer die Elemente dS zweier in dem Punkte mit Bezug auf N_λ oder N_μ oder N_ν conjugirter Tangenten bezüglich im Vorzeichen von Λ oder von M oder von Λ und M zugleich.*

§ 7.

Darstellung des Längenelementes der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch hyperelliptische Differentiale 2. oder 3. Gattung.

Die beabsichtigte functionentheoretische Deutung gewisser Maassverhältnisse innerhalb der Schaar der confocalen Flächen lässt es zweckmässig erscheinen, neben der gewöhnlichen Maassbestimmung auch die allgemeine projectivische Maassbestimmung*) in Betracht zu ziehen. Jene wählt als Fundamentalfläche eine der 4 *uneigentlichen* Flächen der Schaar, den *imaginären Kugelkreis;* für diese mag eine *eigentliche* Fläche der Schaar, etwa das *Ellipsoid* $\lambda = \omega$ $(-\infty < \omega < \lambda_0)$, als Fundamentalfläche herausgegriffen werden. Die Aufgabe des vorliegenden § 7 ist es, das Längenelement der gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 mit Bezug auf die beiden *vertretungsweise* gewählten Maassbestimmungen in elliptischen Coordinaten darzustellen. Die Entfernung zweier Punkte x, y, z und x', y', z' stellt sich in den auf die Flächen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = \omega$ bezogenen Maassbestimmungen bezüglich durch die Formeln:

$$E = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{21}$$

und

$$E' = c \cdot \log \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2} \tag{21'}$$

dar, wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Omega_1 = \frac{xx'}{\alpha - \omega} + \frac{yy'}{\beta - \omega} + \frac{zz'}{\gamma - \omega} - 1,$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{(x-x')^2}{\alpha-\omega} + \frac{(y-y')^2}{\beta-\omega} + \frac{(z-z')^2}{\gamma-\omega} - \frac{(yz'-zy')^2}{(\beta-\omega)(\gamma-\omega)} - \frac{(zx'-xz')^2}{(\gamma-\omega)(\alpha-\omega)} - \frac{(xy'-yx')^2}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)}}.$$

Die willkürliche Constante der ersteren Maassbestimmung ist hierbei im Sinne der Euklid'schen Geometrie bestimmt gedacht; die will-

---

*) Vergl. Cayley, A sixth memoir upon quantics, Philosophical Transactions, vol. 149 (1859), S. 61. Klein, Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Mathematische Annalen, Bd. IV (1871), S. 573.

kürliche Constante c der letzteren Maassbestimmung sei als reell vorausgesetzt*), sodass zwei Punkte *innerhalb* des Ellipsoides $\lambda = \omega$ eine *reelle* Distanz besitzen.

Die Ausdrücke für das Linienelement des Raumes lauten, entsprechend den beiden Maassbestimmungen:

$$dE = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

und:

$$dE' = 2c \cdot \frac{\sqrt{\frac{dx^2}{\alpha-\omega} + \frac{dy^2}{\beta-\omega} + \frac{dz^2}{\gamma-\omega} - \frac{(y\,dz - z\,dy)^2}{(\beta-\omega)(\gamma-\omega)} - \frac{(z\,dx - x\,dz)^2}{(\gamma-\omega)(\alpha-\omega)} - \frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)}}}{\frac{x^2}{\alpha-\omega} + \frac{y^2}{\beta-\omega} + \frac{z^2}{\gamma-\omega} - 1}.$$

Die Einführung der *elliptischen* Coordinaten liefert für das Quadrat von dE den bekannten Ausdruck:

$$(22)\quad dE^2 = \frac{1}{4}\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)\,d\lambda^2}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)} + \frac{1}{4}\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)\,d\mu^2}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)} + \frac{1}{4}\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)\,d\nu^2}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}.$$

Um auch dE'^2 in elliptischen Coordinaten darzustellen, benutzt man die identischen Transformationsformeln:

$$\frac{x^2}{\alpha-\omega} + \frac{y^2}{\beta-\omega} + \frac{z^2}{\gamma-\omega} - 1 = -\frac{(\lambda-\omega)(\mu-\omega)(\nu-\omega)}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)};$$

$$\frac{dx^2}{\alpha-\omega} + \frac{dy^2}{\beta-\omega} + \frac{dz^2}{\gamma-\omega} - \frac{(y\,dz - z\,dy)^2}{(\beta-\omega)(\gamma-\omega)} - \frac{(z\,dx - x\,dz)^2}{(\gamma-\omega)(\alpha-\omega)} - \frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)}$$

$$= \frac{1}{4(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}\left\{\frac{(\mu-\omega)(\nu-\omega)(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}\,d\lambda^2 + \frac{(\nu-\omega)(\lambda-\omega)(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}\,d\mu^2 \right.$$
$$\left. + \frac{(\lambda-\omega)(\mu-\omega)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\,d\nu^2\right\}.$$

Hiermit wird:

$$(22')\, dE'^2 = c^2\frac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\lambda-\omega)^2(\mu-\omega)^2(\nu-\omega)^2}\left\{\frac{(\mu-\omega)(\nu-\omega)(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}d\lambda^2 + \frac{(\nu-\omega)(\lambda-\omega)(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}d\mu^2\right.$$
$$\left. + \frac{(\lambda-\omega)(\mu-\omega)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}d\nu^2\right\}$$

I. *Die Formeln* (22) *und* (22') *geben also die allgemeinen Werthe des räumlichen Linienelementes in elliptischen Coordinaten mit Bezug auf die beiden Fundamentalflächen* $\lambda = -\infty$ *und* $\lambda = \omega$.

Gehört im Besonderen das Linienelement einer *gemeinsamen Tangente der Flächen* λ_0 *und* μ_0 an, sodass die Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ den Gleichungen (20) entsprechen, so lassen sich in den Ausdrücken für das Linienelement, welches dann mit dS, resp. dS' bezeichnet sei, die Variabeln λ, μ, ν *separiren*.

*) Vergl. Klein, a. eben angef. O. S. 608.

Trägt man, um diese Separation zu erreichen, zunächst in die Darstellung (22) von dE^2 die Abkürzungen $\mathsf{\Lambda}$, M, N ein, so wird:

$$\begin{aligned} dE^2 = {} & \frac{1}{4}(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda^2}{\mathsf{\Lambda}^2} \\ & +\frac{1}{4}(\nu-\mu)(\mu-\lambda)(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)\frac{d\mu^2}{\mathsf{M}^2} \\ & +\frac{1}{4}(\nu-\lambda)(\nu-\mu)(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\frac{d\nu^2}{\mathsf{N}^2}. \end{aligned}$$

Vermöge der Formeln (19) kann man hier, falls es sich um ein Element dS handelt, $\frac{d\mu^2}{\mathsf{M}^2}$ und $\frac{d\nu^2}{\mathsf{N}^2}$ durch $\frac{d\lambda^2}{\mathsf{\Lambda}^2}$ ausdrücken und erhält, indem man unter Benutzung der Identität:

$$\begin{aligned} (\mu-\nu)(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)+(\nu-\lambda)(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)+(\lambda-\mu)(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0) \\ = -(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu) \end{aligned}$$

zusammenzieht:

$$dS^2 = \frac{1}{4}(\mu-\lambda)^2(\nu-\lambda)^2\frac{d\lambda^2}{\mathsf{\Lambda}^2}.$$

Der *positive* Werth des Linienelementes ist daher:

$$dS = \frac{1}{2}(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}},$$

sofern das Vorzeichen der Quadratwurzel $\mathsf{\Lambda}$ so bestimmt wird, dass $\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}}$ positiv ausfällt. Diese Formel löst sich unter abermaliger Benutzung der eben angewandten Identität rückwärts auf, wie folgt:

$$\begin{aligned} dS = {} & \frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}}+\frac{1}{2}\frac{\nu-\lambda}{\nu-\mu}(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}} \\ & +\frac{1}{2}\frac{\mu-\lambda}{\nu-\mu}(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}}. \end{aligned}$$

Hierfür kann man schliesslich mit Rücksicht auf (19) schreiben:

$$(23)\qquad \begin{aligned} dS = {} & \frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}}+\frac{1}{2}(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)\frac{d\mu}{\mathsf{M}} \\ & +\frac{1}{2}(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}}. \end{aligned}$$

In den Gleichungen (20) waren bei positivem $\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}}$ nothwendig auch $\frac{d\mu}{\mathsf{M}}$ und $\frac{d\nu}{\mathsf{N}}$ positiv, sodass in dem gefundenen Ausdrucke für dS alle 3 Terme positiv sind.

Bei analoger Behandlung der Formel (22') für dE'^2, unter Benutzung der Identität:

$$\begin{aligned} (\mu-\omega)(\nu-\omega)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)(\nu-\mu)+(\nu-\omega)(\lambda-\omega)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)(\lambda-\nu) \\ +(\lambda-\omega)(\mu-\omega)(\lambda_0-\nu)(\mu_0-\nu)(\mu-\lambda) \\ = -(\nu-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)(\lambda_0-\omega)(\mu_0-\omega), \end{aligned}$$

erhält man für das Linienelement der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 in der auf die Fundamentalfläche $\lambda = \omega$ bezogenen Maassbestimmung:

$$(23') \quad dS' = c \cdot \sqrt{\frac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\lambda_0-\omega)(\mu_0-\omega)}} \left\{ \frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{\lambda-\omega} \cdot \frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}} + \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{\mu-\omega} \cdot \frac{d\mu}{\mathsf{M}} \right.$$
$$\left. + \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{\nu-\omega} \cdot \frac{d\nu}{\mathsf{N}} \right\}.$$

Auch hier sind alle 3 Terme in der Klammer einzeln von positivem Werthe, und soll über den *vor* der Klammer stehenden constanten Factor dasselbe angenommen werden. Das Resultat ist dies:

II. *Der positive Werth des Linienelementes der gemeinsamen Tangenten der Flächen* λ_0 *und* μ_0 *ist, jenachdem der Kugelkreis* $\lambda = -\infty$ *oder das Ellipsoid* $\lambda = \omega$ *als Fundamentalfläche der Maassbestimmung gilt, bezüglich durch die Formeln* (23) *oder* (23′) *dargestellt, wo die Vorzeichen der Quadratwurzeln* $\mathsf{\Lambda}$, M, N *so zu bestimmen sind, dass die Differentiale* $\frac{d\lambda}{\mathsf{\Lambda}}$, $\frac{d\mu}{\mathsf{M}}$, $\frac{d\nu}{\mathsf{N}}$ *positiv werden.*

III. Es sind also, wenn $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ in der positiven Richtung der Tangente gemessen werden, $\mathsf{\Lambda}$, M, N die dem Elemente zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen.

Die Ausdrücke (23) und (23′) gelten überdies auch für das Längenelement derjenigen *geodätischen Linien* auf den Flächen λ_0 und μ_0, welche die Durchdringungscurve der Flächen berühren, und für das Längenelement der *Durchdringungscurve* selbst*).

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass der *eine algebraische Unendlichkeitspunkt* des hyperelliptischen Integrals 2. Gattung:

$$\int \frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\, d\lambda}{2\mathsf{\Lambda}}$$

dem *einen unendlich fernen Punkte* entspricht, den die gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 nach der Auffassung der Euklid'schen Geometrie besitzt. Ebenso fallen die *beiden logarithmischen Unendlichkeitspunkte* des Integrals 3. Gattung:

$$\int \frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\, d\lambda}{(\lambda-\omega)\mathsf{\Lambda}}$$

auf *die Durchstosspunkte* der genannten Tangente *mit der Fundamentalfläche* ω *der allgemeinen projectivischen Maassbestimmung.*

*) Vergl. Mathematische Annalen, Bd. XX, S. 158

Kapitel II.

Darstellung der Gebilde im confocalen Flächensystem durch hyperelliptische Functionen.

§ 8.

Einführung transcendenter Parameter an Stelle der elliptischen Coordinaten.

Das doppelte Ziel der analytisch-geometrischen Entwicklungen des Kapitels I war einerseits *die einheitliche algebraische Parameterdarstellung* einer Reihe geometrischer Gebilde im confocalen Flächensystem (§§ 1—4), andererseits die Feststellung der geometrischen Bedeutung der *hyperelliptischen Differentialgleichungen* vom Geschlecht 2 (§§ 5—6) und der entsprechenden Differentialausdrücke 2. und 3. Gattung (§ 7). Der Nachtheil der gefundenen algebraischen Parameterdarstellungen ist die durchgehends auftretende *Mehrdeutigkeit* der Bestimmung der abhängigen Elemente durch die unabhängigen. Es bleibt als Aufgabe des vorliegenden Kapitels II, die bisher benutzten algebraischen Irrationalitäten durch *eindeutige* Functionen transcendenter Parameter zu ersetzen. Zu diesem Zwecke sollen an Stelle der *elliptischen Coordinaten* λ, μ, ν vier Parameter v_1, v_2, u_1, u_2 eintreten, von denen die beiden letzten völlig unabhängig, die beiden ersten aber durch *eine Relation* aneinander gebunden sind, sodass die 4 Parameter nur 3 unabhängigen Parametern äquivalent bleiben. Die Parameter v_1, v_2, u_1, u_2 werden unter Vermittlung der durch gliedweise Integration der Differentialgleichungen (20) hervorgehenden Integrale und Integraldifferenzen:

$$(24)\quad \begin{cases} V_1 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} \frac{dz}{Z}, & V_2 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} \frac{z\,dz}{Z}, \\ U_1 = \int\limits_{\beta}^{\nu, N} \frac{dz}{Z} - \int\limits_{\gamma}^{\mu, M} \frac{dz}{Z}, & U_2 = \int\limits_{\beta}^{\nu, N} \frac{z\,dz}{Z} - \int\limits_{\gamma}^{\mu, M} \frac{z\,dz}{Z} \end{cases}$$

mit der Abkürzung:

$$Z = \sqrt{(\alpha - z)(\beta - z)(\mu_0 - z)(\gamma - z)(\lambda_0 - z)}$$

definirt, und zwar durch folgende Formeln:

$$(25)\quad \begin{cases} v_1 = \dfrac{V_1 B_2 - V_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \dfrac{\pi i}{2}, & v_2 = \dfrac{A_1 V_2 - A_2 V_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \dfrac{\pi i}{2}, \\ u_1 = \dfrac{U_1 B_2 - U_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \dfrac{\pi i}{2}, & u_2 = \dfrac{A_1 U_2 - A_2 U_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \dfrac{\pi i}{2}. \end{cases}$$

Hierin haben die Coefficienten A, B, neben welche noch 4 weitere Constanten C, D gestellt werden mögen, folgende Bedeutung:

$$
(26)\quad\begin{cases}
A_1=\int\limits_{\gamma}^{\mu_0}\frac{dz}{\sqrt{Z^2}}, & B_1=-\int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{dz}{\sqrt{Z^2}}, \quad C_1=\int\limits_{\lambda_0}^{\gamma}\frac{dz}{\sqrt{-Z^2}}, \quad D_1=-\int\limits^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{-Z^2}},\\
A_2=\int\limits_{\gamma}^{\mu_0}\frac{z\,dz}{\sqrt{Z^2}}, & B_2=-\int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{z\,dz}{\sqrt{Z^2}}, \quad C_2=\int\limits_{\lambda_0}^{\gamma}\frac{z\,dz}{\sqrt{-Z^2}}, \quad D_2=-\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{z\,dz}{\sqrt{-Z^2}},\\
A_1+B_1=\int\limits_{-\infty}^{\lambda_0}\frac{dz}{\sqrt{Z^2}}, & C_1-D_1=\int\limits_{\mu_0}^{\beta}\frac{dz}{\sqrt{-Z^2}},\\
A_2+B_2=\int\limits_{-\infty}^{\lambda_0}\frac{z\,dz}{\sqrt{Z^2}}, & C_2-D_2=\int\limits_{\mu_0}^{\beta}\frac{z\,dz}{\sqrt{-Z^2}},
\end{cases}
$$

wo die Integrale mit *positivem* Werthe von $\sqrt{Z^2}$ oder $\sqrt{-Z^2}$ auf *reellem* Wege zwischen ihren beiden Grenzen zu berechnen sind. Zwischen den Constanten (26) besteht die *bilineare Relation:*

$$A_1C_2-A_2C_1+B_1D_2-B_2D_1=0.$$

Wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(27)\quad d\omega_1=\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{B_2-B_1z}{A_1B_2-A_2B_1}\cdot\frac{dz}{Z},\qquad d\omega_2=\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{A_1z-A_2}{A_1B_2-A_2B_1}\cdot\frac{dz}{Z},$$

so stellen sich die Parameter v_1, v_2, u_1, u_2 als Integrale und Integraldifferenzen also dar:

$$
(28)\quad\begin{cases}
v_1=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda}d\omega_1, & v_2=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda}d\omega_2,\\
u_1=\int\limits_{\beta}^{\nu,N}d\omega_1-\int\limits_{\gamma}^{\mu,M}d\omega_1, & u_2=\int\limits_{\beta}^{\nu,N}d\omega_2-\int\limits_{\gamma}^{\mu,M}d\omega_2.
\end{cases}
$$

Wie man erkennt, sind die aus den Integralfunctionen (24) durch lineare Combination hervorgegangenen Parameter v_1, v_2, u_1, u_2 *gewisse Normalintegrale des hyperelliptischen Gebildes* z, Z*). Man denke sich, um hierauf näher einzugehen, die *Riemann'sche Fläche des Gebildes* mit den 6 reellen Windungspunkten**) $z, Z=\lambda_0, \gamma, \mu_0, \beta, \alpha, \infty$ und etwa den 3 geradlinigen Uebergangslinien**) $\lambda_0\gamma, \mu_0\beta, \alpha\infty$ durch das in Fig. 1 angedeutete Querschnittsystem in eine einfach zusammenhängende**) Fläche verwandelt.

---

*) Die oberen Grenzen λ, Λ; μ, M; ν, N der Integrale in (24) und (28) sind drei verschiedene, variable Stellen des Gebildes z, Z. Es bezeichnen dabei Λ, M, N bezüglich die Werthe, welche Z für $z=\lambda, \mu, \nu$ annimmt.

**) Die Terminologie nach C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen, S. 165, 166, 294.

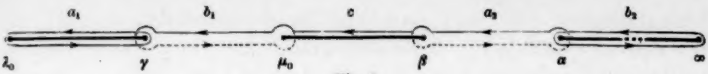


Fig. 1.

Das Querschnittsystem besteht aus 4 Querschnitten a_1, b_1, a_2, b_2 und dem unwesentlichen Verbindungsstück c; die einzelnen Schnitte oder Ströme sind durch ausgezogene oder punktirte Linien angedeutet, jenachdem sie im oberen oder unteren Blatte der Fläche verlaufen, und mit einer bestimmten durch die Pfeile angedeuteten Richtung versehen, sodass ein rechtes und linkes Ufer derselben unterschieden werden kann; die Schnitte sollen in bekannter Weise dicht an die reelle Axe herangedrängt sein. Die Quadratwurzel Z sei auf der reellen Axe zwischen γ und μ_0 im oberen Blatte positiv.

Alsdann ergeben sich die Periodicitätsmoduln, welche die vorkommenden Integrale beim Ueberschreiten der Ströme a und b vom rechten zum linken Ufer erhalten, aus folgender Tabelle:

(29)

	a_1	b_1	a_2	b_2
$\int \frac{dz}{Z}$	$2A_1$	$2iC_1$	$2iD_1$	$-2B_1$
$\int \frac{z\,dz}{Z}$	$2A_2$	$2iC_2$	$2iD_2$	$-2B_2$
$\int d\omega_1$	πi	a_{11}	a_{12}	0
$\int d\omega_2$	0	a_{21}	a_{22}	$-\pi i$

Dabei haben die *reellen* Grössen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ die Werthe:

$$
(29') \quad \begin{cases} a_{11} = -\dfrac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\cdot\pi, \quad a_{22} = -\dfrac{A_1D_2 - A_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\cdot\pi, \\ a_{12} = a_{21} = -\dfrac{D_1B_2 - D_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\cdot\pi = -\dfrac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\cdot\pi, \end{cases}
$$

und ist, wenn n_1 und n_2 irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, die Form:

$$
(30) \qquad a_{11}n_1^2 + 2a_{12}n_1n_2 + a_{22}n_2^2
$$

immer negativ.

Die in (29) gegebene Vertheilung der Normalperioden auf die Querschnitte a und b entspricht nicht genau dem gewöhnlichen Gebrauche, welcher bei der angenommenen Zerschneidung der Riemann'schen Fläche den Querschnitten a_1 und a_2 die Periodenpaare $\pi i, 0$ und $0, \pi i$ und den Querschnitten b_1 und b_2 die Periodenpaare a_{11}, a_{21} und a_{12}, a_{22} zuertheilt. Der Zusammenhang der eingeführten

Normalintegrale $\int d\omega_1$ und $\int d\omega_2$ und Periodicitätsmoduln a_{11}, a_{12}, a_{22} mit den gewöhnlichen*) Normalintegralen und Periodicitätsmoduln, welche letzteren für den Augenblick mit $\int d\omega_1'$, $\int d\omega_2'$ und $a_{11}', a_{12}', a_{22}'$ bezeichnet seien, geben die Transformationsformeln:

$$d\omega_1 = d\omega_1' - \frac{a'_{12}}{a'_{22}} \cdot d\omega_2', \qquad d\omega_2 = -\frac{\pi i}{a'_{22}} \cdot d\omega_2',$$

$$a_{11} = \frac{a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{12}}{a'_{22}}, \qquad a_{12} = -\frac{a'_{12}}{a'_{22}} \cdot \pi i, \qquad a_{22} = \frac{\pi^2}{a'_{22}}.$$

Die Abweichung von der gewöhnlichen Normirung ist im vorliegenden Falle *im Anschluss an Herrn Weierstrass***) geschehen und durch den Umstand geboten, dass die Vertheilung der reellen und imaginären Perioden der *gegebenen* Integrale $\int \frac{dz}{Z}$ und $\int \frac{z\,dz}{Z}$, wie sie die beiden ersten Zeilen in (29) geben, die Querschnitte a_1 und b_2 einerseits, b_1 und a_2 andererseits als zusammengehörig kennzeichnet.

Die Eigenschaft der Form (30) ist bekanntlich nöthig, damit die zweifach unendliche ϑ-Reihe:

$$\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' \, \varepsilon_2'\end{pmatrix}(w_1 \mid w_2) =$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} e^{a_{11}\left(n_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2 + 2a_{12}\left(n_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(n_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right) + a_{22}\left(n_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2 + 2\left(n_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(w_1+\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i\right) + 2\left(n_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(w_2+\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i\right)}$$

für alle endlichen Werthe der beiden complexen Variablen $w_1 \mid w_2$ convergire.***)

Da die in (25) oder (28) definirten Parameter v_1 und v_2 zwei linear unabhängige Normalintegrale *zwischen den nämlichen Grenzen* sind, so besteht zwischen denselben eine identische Relation. Es entspricht nämlich der besondern Auswahl des Querschnittsystems (Fig. 1) und der Vertheilung der Normalperioden auf die einzelnen Querschnitte (29) eine bestimmte wechselseitige Zuordnung der 6 *ungeraden* ϑ-Functionen und der 6 Windungspunkte der Riemann'schen Fläche. Diese Zuordnung kann dadurch charakterisirt werden, dass identisch in Bezug auf z, Z die Gleichungen bestehen†):

---

*) Vgl. Prym, in den Denkschriften der k. Academie der Wissenschaften zu Wien, 24. Band (1864), S. 28.

**) Vgl. Weierstrass, Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid. Monatsberichte der Kgl. Academie zu Berlin, Jahrg. 1861, S. 986.

***) Ueber die Bezeichnung vgl. die zu § 9 citirte Schrift von Krazer, S. 1.

†) Vgl. Riemann, Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, Ges. Werke, herausg. von Weber, S. 198, oder Prym, a. a. O. S. 37, oder Neumann, a. a. O. S. 490.

$$
(31)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\left(\int_{\lambda_0}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\lambda_0}^{z,Z} d\omega_2\right)=0, \quad \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\left(\int_{\gamma}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\gamma}^{z,Z} d\omega_2\right)=0,\\
\qquad\qquad \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\left(\int_{\mu_0}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\mu_0}^{z,Z} d\omega_2\right)=0,\\
\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\left(\int_{\beta}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\beta}^{z,Z} d\omega_2\right)=0, \quad \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\left(\int_{\alpha}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\alpha}^{z,Z} d\omega_2\right)=0,\\
\qquad\qquad \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\left(\int_{\infty}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\infty}^{z,Z} d\omega_2\right)=0.
\end{array}
\right.
$$

Im Besonderen *genügen also die Parameter* v_1 *und* v_2 *nach ihrer Definition* (28) *der Relation:*

$$
(32)\qquad \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1 \,|\, v_2) = 0.
$$

§ 9.

Darstellung der homogenen Punktcoordinaten im Raume durch Producte zweier ϑ-Functionen.

Die in den Ausdrücken (8) für die rechtwinkligen Coordinaten $x = x : t$, $y = y : t$, $z = z : t$ auftretenden einfachen Wurzelfunctionen der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν stellen sich, vermöge der in den Formeln (28) festgelegten Abhängigkeit der Parameter $v_1 \,|\, v_2$ und der Parameter $u_1 \,|\, u_2$ von λ und bezüglich von μ und ν, ihrerseits als Quotienten von ϑ-Functionen der Variabeln $v_1 \,|\, v_2$ und $u_1 \,|\, u_2$ dar. Es ist nämlich, vorausgesetzt, dass $v_1 \,|\, v_2$ der Relation (32) genügen:

$$
(\mathrm{a})\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\sqrt{\alpha-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)},\\[3ex]
\dfrac{\sqrt{\beta-\lambda}}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)},\\[3ex]
\dfrac{\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)},
\end{array}
\right.
$$

und ferner:

$$
(b)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\alpha-\mu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}} &= \frac{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)},\\
\frac{\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\beta-\mu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}} &= \frac{\vartheta\binom{0\,0}{0\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,1}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)},\\
\frac{\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} &= \frac{\vartheta\binom{1\,1}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{1\,0}{1\,1}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)}.
\end{aligned}\right.
$$

Dabei sind dem gewöhnlichen Gebrauche entsprechend für die ohne Argumente geschriebenen ϑ-Functionen die Argumente $0|0$ hinzuzudenken*).

Die Verbindung dieser beiden Formelsysteme mit den Gleichungen (8) führt, indem sich die Nullwerthe der ϑ-Functionen ganz fortheben, zu dem Resultat:

Die homogenen Punktcoordinaten x, y, z, t der Punkte des Raumes stellen sich in Abhängigkeit von den 4 Parametern $v_1|v_2$ und $u_1|u_2$ in folgender Weise dar:

$$
(33)\quad \left\{\begin{aligned}
\varkappa\cdot\frac{x}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} &= \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2),\\
\varkappa\cdot\frac{y}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} &= \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2),\\
\varkappa\cdot\frac{z}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} &= \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2),\\
\varkappa\cdot t &= \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2),\\
&\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Dabei bedeutet $\varkappa$, wie auch fernerhin, einen Proportionalitätsfactor.

Dieses Gleichungssystem (33) kann, indem man darin die Parameter $v_1|v_2$ der Reihe nach die der Gleichung (32) entsprechenden Werthe annehmen und alsdann jedesmal die Parameter $u_1|u_2$ beliebig variiren lässt, als *eine Darstellung der verschiedenen Flächen λ* des confocalen Systems (1) durch die Parameter $u_1|u_2$ betrachtet werden.

*) Die Umkehrformeln (a) sind, nur in veränderter Bezeichnung und mit veränderter Bestimmung der unteren Integralgrenzen, die von Prym, a. a. O. S. 57, die Umkehrformeln (b) die von Prym ebenda S. 50, sowie von Rosenhain in dem Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes (Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences, t. XI) S. 422 gegebenen.

Indem λ auf reellem Wege von $-\infty$ bis λ_0 wächst, laufen $V_1 | V_2$ durch immer reelle Werthe von $\pm(A_1 + B_1) \,|\, \pm(A_2 + B_2)$ bis $0|0$ und $v_1 | v_2$ durch immer rein imaginäre Werthe von $\pm\frac{\pi i}{2}\Big|\pm\frac{\pi i}{2}$ bis $0|0$. Es entspricht daher dem Werthepaare $v_1 | v_2 = \pm\frac{\pi i}{2}\Big|\pm\frac{\pi i}{2}$ das unendlich grosse Ellipsoid des confocalen Systems, und dem Werthepaare $v_1 | v_2 = 0|0$ das Ellipsoid λ_0. Mit Bezug auf das letztere ergiebt sich also:

Die homogenen Coordinaten der Punkte des Ellipsoides λ_0 stellen sich in Abhängigkeit von den beiden unabhängigen Parametern $u_1 | u_2$ in folgender Weise dar):*

$$(34)\quad \begin{cases} \varkappa \cdot \dfrac{x}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ \varkappa \cdot \dfrac{y}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} = \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ \varkappa \cdot \dfrac{z}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ \varkappa \cdot t = \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2). \end{cases}$$

Indem man hier die Quotienten der Nullwerthe der ϑ-Functionen durch die Constanten $\alpha, \beta, \mu_0, \gamma, \lambda_0$ ausdrückt, wie folgt:

$$\frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}} = \sqrt[4]{\frac{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\mu_0)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}, \qquad \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}} = \sqrt[4]{\frac{(\beta-\lambda_0)(\beta-\mu_0)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}},$$

$$\frac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}} = \sqrt[4]{\frac{(\gamma-\lambda_0)(\mu_0-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}},$$

wird man auf die *Weierstrass'sche Darstellung der Fläche 2. Grades* geführt**).

Diese Darstellung (34) beruht auf der identischen Relation:

$$(35)\quad \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2) + \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)$$
$$+ \vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2) - \vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2) = 0,$$

welche zwischen den 4 ersten Functionen des Rosenhain'schen Sechsersystems***):

*) Den Formeln (33) und (34) gehen die Formeln (43) und (46) parallel, welche mit jenen zusammen die *Hauptresultate des vorliegenden Kapitels* bilden (vgl. die Schlussbemerkung des Kapitels).

**) Vgl. Weierstrass, a. a. O., ferner v. Braunmühl, Mathematische Annalen, Bd. XX, S. 557.

***) Vgl. über diese Terminologie: Krazer, Theorie der zweifach unendlichen ϑ-Reihen auf Grund der Riemann'schen ϑ-Formel (Leipzig 1882), S. 30.

$$(36)\quad \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2),\quad \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2),\quad \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2),$$
$$\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2),\quad \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2),\quad \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)$$

besteht*).

Die Darstellung der einzelnen Fläche λ des confocalen Systems durch die Parameter $u_1 \mid u_2$, welche die Formeln (33) bei constant bleibenden $v_1|v_2$ leisten, ist im Allgemeinen dadurch charakterisirt, dass die Schnittcurven der Fläche λ mit den Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$ bezüglich durch die Gleichungen:

$$(37)\quad \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,\quad \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,$$
$$\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,\quad \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0$$

repräsentirt werden. Aber auch das Verschwinden der beiden noch übrigen ϑ-Functionen des Sechsersystems (36), und damit die Gleichungen:

$$(37')\quad \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,\quad \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,$$

haben ihre einfache Bedeutung.

Setzt man nämlich $\mu=\mu_0$, so erhalten die Parameter $u_1|u_2$ die Werthe:

$$u_1|u_2=\int_\beta^{\nu,N}d\omega_1-\int_\gamma^{\mu_0}d\omega_1\,\Big|\int_\beta^{\nu,N}d\omega_2-\int_\gamma^{\mu_0}d\omega_2$$
$$=\int_\beta^{\nu,N}d\omega_1-\frac{\pi i}{2}\,\Big|\int_\beta^{\nu,N}d\omega_2;$$

die hiermit gesetzten Beziehungen:

$$\int_\beta^{\nu,N}d\omega_1\,\Big|\int_\beta^{\nu,N}d\omega_2=u_1+\frac{\pi i}{2}\mid u_2$$

haben mit Rücksicht auf (31) zur Folge:

$$\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}\left(u_1+\frac{\pi i}{2}\mid u_2\right)=0\quad\text{oder:}\quad \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0.$$

Es ist also die 1. Gleichung (37′) die Gleichung der Schnittcurve des Ellipsoides λ mit dem Hyperboloid μ_0. In analoger Weise ergiebt

*) Vgl. Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den ϑ-Functionen mit 2 Veränderlichen, Crelle's Journal, Bd. 84, S. 334, Formelsystem A.

sich, dass die 2. Gleichung (37′) die Gleichung der nicht reellen Schnittcurve des Ellipsoides λ mit dem Ellipsoid λ_0 ist.

Zu demselben Resultat führt auch die Betrachtung der Formen:

$$\varphi_1 = \frac{x^2}{\alpha - \mu_0} + \frac{y^2}{\beta - \mu_0} - \frac{z^2}{\mu_0 - \gamma} - 1,$$

$$\varphi_2 = \frac{x^2}{\alpha - \lambda_0} + \frac{y^2}{\beta - \lambda_0} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda_0} - 1,$$

deren Quadratwurzeln sich in den λ, μ, ν einerseits und den $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$ andrerseits so darstellen:

$$\sqrt{\varphi_1} = \frac{\sqrt{\mu_0 - \lambda}}{\sqrt{\mu_0 - \gamma}} \cdot \frac{\sqrt{\nu - \mu_0}\sqrt{\mu_0 - \mu}}{\sqrt{\alpha - \mu_0}\sqrt{\beta - \mu_0}},$$

$$\sqrt{\varphi_2} = \frac{\sqrt{\lambda_0 - \lambda}}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} \cdot \frac{\sqrt{\nu - \lambda_0}\sqrt{\mu - \lambda_0}}{\sqrt{\alpha - \lambda_0}\sqrt{\beta - \lambda_0}},$$

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \sqrt{\varphi_1} &= \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)},\\ \sqrt{\varphi_2} &= \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}.\end{aligned}\right.$$

Zusammenfassend hat man den Satz:

Werden in den Formeln (33), *bei constantem* $v_1 \mid v_2$, *die Parameter* $u_1 \mid u_2$ *einer der Gleichungen* (37) *und* (37′) *unterworfen, so stellen die Formeln beziehungsweise die Coordinaten der Punkte der Schnittcurve des Ellipsoides* $v_1 \mid v_2$ *oder* λ *mit den 4 Coordinatenebenen und den 2 Flächen* μ_0 *und* λ_0 *dar.*

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die Gleichstellung der beiden Flächen λ_0 und μ_0 mit den 4 Coordinatenebenen in der Natur der Parameter $u_1 \mid u_2$ ihren natürlichen Grund hat. Denn die elliptischen Coordinaten $-\infty$, γ, β, α und λ_0, μ_0 der 4 Ebenen einerseits und der beiden genannten Flächen andererseits sind in dem hyperelliptischen Gebilde z, Z durch die 6 völlig gleichberechtigten Windungspunkte vertreten.

§ 10.

Vertheilung der transcendenten Parameter auf die Punkte des äusseren Raumes.

Die Darstellung (34) des Ellipsoides λ_0 liefert zu jedem Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ einen einzigen Punkt x, y, z, t. Dagegen gehören umgekehrt zu jedem Punkt x, y, z, t mehrere Parameterpaare. Da nämlich*) als die *gemeinsamen* Periodenpaare der Verhältnisse der 16 ϑ-Functionen

*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 1, Formeln 1 und 2.

nicht die einfachen, sondern die *doppelten* Periodicitätsmoduln der Integrale $\int d\omega_1 \mid \int d\omega_2$ auftreten, also die Werthepaare:

$$2\pi i \mid 0, \quad 0 \mid 2\pi i, \quad 2a_{11} \mid 2a_{21}, \quad 2a_{12} \mid 2a_{22},$$

so hat man bei der Betrachtung der ϑ-Quotienten im Allgemeinen die 16 Werthepaare auseinanderzuhalten, welche in der Form:

$$(39) \quad u_1 + \varepsilon_1' \pi i + \varepsilon_1 a_{11} + \varepsilon_2 a_{12} \mid u_2 + \varepsilon_2' \pi i + \varepsilon_1 a_{21} + \varepsilon_2 a_{22}$$

enthalten sind, insofern die 4 Zahlen $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_1, \varepsilon_2$ auf die 16 möglichen Weisen aus den Zahlen 0 und 1 ausgewählt werden. Ausserdem ist bei jeder Auswahl dieser Zahlen die vermöge der Unbestimmtheit der Vorzeichen von N und M in dem Parameterpaare

$$u_1 \mid u_2 = \int_\beta^{\nu,N} d\omega_1 - \int_\gamma^{\mu,M} d\omega_1 \mid \int_\beta^{\nu,N} d\omega_2 - \int_\gamma^{\mu,M} d\omega_2$$

gelegene Vierdeutigkeit zu berücksichtigen. Es gehören daher, von Multiplis der *doppelten* Perioden abgesehen, zu jedem Werthepaare ν, μ 64 *Werthepaare* $u_1 \mid u_2$. Diese vertheilen sich auf die 8 zu ν, μ gehörigen Punkte der Fläche λ_0, und zwar so, dass die Verhältnisse der 4 ϑ-Functionen in (34) für je 8 der 64 Werthepaare $u_1 \mid u_2$ dieselben Werthe $x:y:z:t$ haben.

Im Allgemeinen kommen daher jedem Punkte x, y, z, t der Fläche λ_0 8 Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ zu, die nach den doppelten Perioden incongruent sind.

Wenn die oberen Grenzen ν und μ der vorliegenden Integrale mit den gewöhnlichen elliptischen Coordinaten ν und μ identificirt werden, so verlieren sie ihre unbegrenzte Variabilität. Beschränkt man im Besonderen die Betrachtung des Ellipsoides λ_0 auf die zwischen den beiden Zweigen der Durchdringungscurve mit dem Hyperboloid μ_0 gelegene Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides, deren Punkte als Berührungspunkte *reeller* gemeinsamer Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 erscheinen, so entsprechen die elliptischen Coordinaten ν und μ den Ungleichungen (6), und können sich daher auch die Punkte ν, N und μ, M der Riemann'schen Fläche des Gebildes z, Z beziehungsweise nur zwischen den Verzweigungspunkten β und α oder γ und μ_0 bewegen. *Die Parameter $u_1 \mid u_2$ sind dann beständig rein imaginär.* Ueberdies beschränkt sich ihre Vieldeutigkeit auf die Vorzeichen von N und M und auf Multipla der rein imaginären Periodicitätsmoduln $0 \mid \pi i$ und $\pi i \mid 0$, welche den Umgängen der Variablen ν und μ um die Verzweigungspunkte β und α einerseits, γ und μ_0 andererseits entsprechen.

Bei dieser Beschränkung der Variablen ν und μ bleiben von den 64 Werthepaaren (39) nur 16, und von den 8 im Allgemeinen zu einem Punkte x, y, z, t gehörigen Parameterpaaren nur 2 übrig.

Es liefert dann auch umgekehrt *jedes Paar rein imaginärer Werthe* $u_1 \mid u_2$ *einen reellen äusseren Punkt des Ellipsoides* λ_0. Die quadratische Gleichung nämlich, von welcher die Lösungen $z = \nu$ und $z = \mu$ des Umkehrproblems:

$$\int_{\beta}^{\nu, N} d\omega_1 - \int_{\gamma}^{\mu, M} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\beta}^{\nu, N} d\omega_2 - \int_{\gamma}^{\mu, M} d\omega_2 = u_1 \mid u_2$$

abhängen, kann in folgenden 3 gleichberechtigten Formen gegeben werden*):

$$\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-z} + \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\beta-z} = 1,$$

$$\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha-z} + \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\beta-\mu_0}{\mu_0-z} = 1,$$

$$\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha-z} - \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\gamma-z} = 1.$$

Nun ist bei rein imaginären Werthen der Argumente $u_1 \mid u_2$ und reellen Werthen der Moduln a_{11}, a_{12}, a_{22} die in § 8 definirte ϑ-Function für jede Charakteristik von reellem Werthe. Man schliesst daher nach einer aus der Theorie der elliptischen Coordinaten bekannten Schlussweise aus der 1. der 3 Gleichungen, dass von den Wurzeln $z = \nu$ und $z = \mu$ die eine zwischen den reellen Grenzen β und α, die andre zwischen den reellen Grenzen $-\infty$ und β liegt; aus der 2. Gleichung ebenso, dass die eine Wurzel zwischen μ_0 und α, die andre zwischen $-\infty$ und μ_0 liegt; aus der 3. Gleichung endlich, dass, wenn die eine Wurzel zwischen den reellen Grenzen γ und α liegt, dasselbe auch von der andern gilt. Die Verbindung dieser 3 Schlüsse führt zu der Einsicht, dass die eine Wurzel zwischen β und α, die andre zwischen γ und μ_0 eingeschränkt bleibt, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Zur näheren Orientirung über die nun eintretende Vertheilung der Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ auf die Punkte der Zone $(\mu_0\,\mu_0)$ dienen die folgenden Sätze, die sich aus der Unterscheidung der geraden und ungeraden ϑ-Functionen, aus den Periodicitätseigenschaften der ϑ-Quotienten und aus der Betrachtung der einfachen Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, $\sqrt{\mu_0-\mu}$ und der entsprechenden ϑ-Quotienten auf der Riemann'schen Fläche ergeben.

---

*) Vgl. Weierstrass, zur Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 47, S. 292.

I. *Die Vertauschung von* $u_1 | u_2$ *mit* $-u_1 | -u_2$ *bedeutet eine simultane Spiegelung an den Ebenen* $y=0$ *und* $z=0$ (vgl. Fig. 3).

II. *Der Vermehrung der Argumente* $u_1 | u_2$ *um* $0 | \pi i$ *entspricht eine simultane Spiegelung an den Ebenen* $x=0$ *und* $y=0$, *der Vermehrung der Argumente um* $\pi i | 0$ *eine Spiegelung an der Ebene* $z=0$. Die Punkte $u_1 | u_2$ und $u_1 + 0 + \pi i | u_2 + \pi i + 0$ liegen also diametral.

III. *Die Aenderung des Vorzeichens von* M *in den Integraldifferenzen* $u_1 | u_2$ (vgl. die Definition (28)) *bewirkt eine Spiegelung an der Ebene* $z=0$, *die Aenderung des Vorzeichens von* N *eine Spiegelung an der Ebene* $y=0$.

IV. *Die Aenderung des Vorzeichens von* M *mit gleichzeitiger Vermehrung der Argumente* $u_1 | u_2$ *um* $\pi i | 0$ *lässt den Punkt* x, y, z, t *ungeändert, wechselt aber das Vorzeichen der Function* $\sqrt{\varphi_1}$ *in* (38); *die Aenderung des Vorzeichens von* N *mit gleichzeitiger Vermehrung der Argumente* $u_1 | u_2$ *um* $0 | \pi i$ *bedeutet eine Spiegelung an der Ebene* $x=0$.

Bei diesen Sätzen, sowie bei den später anzuführenden Sätzen von ähnlicher Tendenz, liegt die *elementare* Auffassung der Integraldifferenzen $u_1 | u_2$ zu Grunde. Es sind also in:

$$u_1 | u_2 = \int_\beta^{\nu, \pm N} d\omega_1 - \int_\gamma^{\mu, \pm M} d\omega_1 \,\Big|\, \int_\beta^{\nu, \pm N} d\omega_2 - \int_\gamma^{\mu, \pm M} d\omega_2$$

die Integrationswege auf der reellen Axe von β resp. γ bis zum oberen Grenzpunkte zu nehmen, und zwar mit denjenigen Vorzeichen der Wurzeln $Z = \mathsf{N}$ resp. $Z = \mathsf{M}$, (vgl. (27)), welche den oberen Grenzen explicite beigeschrieben sind.

Es ist dann im Besonderen der Uebergang von $\int_\gamma^{\mu, +M} d\omega$ zu $\int_\gamma^{\mu, -M} d\omega$ so zu verstehen, dass der im oberen Blatte der Riemann'schen Fläche (vgl. die Festsetzungen in § 8) von γ bis μ, $+\mathsf{M}$ laufende Weg (vgl. Fig. 2, wo der betreffende Weg auf die reelle Axe zusammengezogen zu denken ist) wieder rückwärts gemacht, und hierauf der Weg von γ bis μ, $-\mathsf{M}$ im unteren Blatte angeschlossen wird. Dabei ändert die einfache Wurzelfunction $\sqrt{\mu - \gamma}$ ihr Vorzeichen, was der 1. Theil des Satzes III aussagt. In analoger Weise versteht man den 2. Theil des Satzes. Es ist ferner

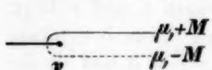


Fig. 2

der Uebergang von $\int_\gamma^{\mu, +M} d\omega_1 \,\Big|\, \int_\gamma^{\mu, +M} d\omega_2$ zu $\int_\gamma^{\mu, -M} d\omega_1 - \pi i \,\Big|\, \int_\gamma^{\mu, -M} d\omega_2 - 0$ so zu denken, dass man von der Stelle μ, $+M$ im oberen Blatte den Weg bis γ zurückmacht, alsdann von γ im unteren Blatte bis μ_0, von hier im oberen wieder bis γ zurück und nochmals im unteren Blatte von γ bis μ, $-\mathsf{M}$ hinläuft. Dabei hat $\sqrt{\mu - \gamma}$ zweimal, $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ einmal

das Vorzeichen gewechselt, was der 1. Theil des Satzes IV aussagt; der 2. Theil wird in ähnlicher Weise verständlich.

Die angeführten Sätze bestimmen die Vertheilung der Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ auf die durch die ebenen Schnitte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und die Krümmungscurven $\mu = \mu_0$ begrenzten 8 Felder der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0, wenn man hinzunimmt, dass für die Argumente

$$u_1 \mid u_2 = \int_\beta^{\nu,+N} d\omega_1 - \int_\gamma^{\mu,+M} d\omega_1 \,\Big|\, \int_\beta^{\nu,+N} d\omega_2 - \int_\gamma^{\mu,+M} d\omega_2$$

die x, y, z alle positiv werden ($x = x : t$, $y = y : t$, $z = z : t$). Die Form der den einzelnen Feldern zugehörigen Parameter ist in Fig. 3 angegeben, welche die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ in schematischer Ausbreitung auf die Ebene vorstellt:

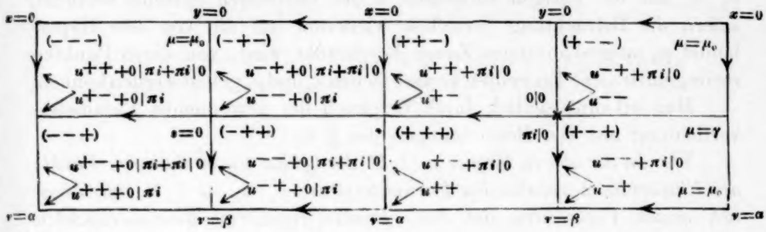


Fig. 3.

Dabei bedeuten die Symbole $u^{\pm\pm}$ die Parameter

$$u_1 \mid u_2 = \int_\beta^{\nu,\pm N} d\omega_1 - \int_\gamma^{\mu,\pm M} d\omega_1 \,\Big|\, \int_\beta^{\nu,\pm N} d\omega_2 - \int_\gamma^{\mu,\pm M} d\omega_2,$$

und geben die oberen Indices von $u^{\pm\pm}$ die entsprechend gestellten Vorzeichen von N und M. Unter dem Symbol $u + 0 \mid \pi i + \pi i \mid 0$ ist ferner das Parameterpaar $u_1 + 0 + \pi i \mid u_2 + \pi i + 0$ zu verstehen.

Die den einzelnen Feldern eingeschriebenen und in Klammern geschlossenen 3 Vorzeichen beziehen sich auf die Werthe der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Punkte der betreffenden Felder in dem Sinne, dass z. B. innerhalb des mit $(+ + -)$ markirten Feldes x und y positiv und z negativ ist.

Die den Grenzlinien $\mu = \mu_0$, $\mu = \gamma$ $(z = 0)$, $x = 0$, $y = 0$ der Felder beigefügten Pfeile charakterisiren die in § 2 festgesetzte positive Richtung dieser Linien. Die Winkelpfeile innerhalb der Felder werden in § 13 ihre Erklärung finden.

Die beiden einem Punkte zugehörigen Parameterpaare sind, von dem Periodenpaare $\pi i \mid 0$ abgesehen, im Vorzeichen von M unterschieden. Für die Mittellinie $\mu = \gamma$ der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ fällt der Unterschied in dem Vorzeichen von M fort, indem $M = 0$ wird, und die beiden Parameterpaare unterscheiden sich nur mehr um $\pi i \mid 0$.

Für $\mu = \mu_0$ fallen die beiden Parameterpaare eines Punktes in eines zusammen.

Den Punkten der Krümmungscurven $\nu = \beta$ und $\nu = \alpha$ entsprechen, wie im Allgemeinen, zwei verschiedene Parameterpaare.

Zusammenfassend erhält man das Resultat:

V. *Jedem Punkte der Zone* $(\mu_0\, \mu_0)$ *des Ellipsoides* λ_0 *kommen zwei mod.* $2\pi i \,|\, 0$ *und* $0 \,|\, 2\pi i$ *verschiedene rein imaginäre Parameterpaare* $u_1 \,|\, u_2$ *zu, die sich im Allgemeinen um* $\pi i \,|\, 0$ *und, falls* M *nicht* 0 *ist, im Vorzeichen von* M *unterscheiden; die Punkte der Durchdringungscurve der Flächen* λ_0 *und* μ_0 *erhalten nur ein Parameterpaar.*

In analoger Weise, wie auf dem Ellipsoid λ_0, sind die Parameter $u_1 \,|\, u_2$ auf die übrigen Ellipsoide λ des confocalen Systems vertheilt, sofern die Betrachtung derselben wiederum auf die von dem Hyperboloid μ_0 ausgeschnittenen Zonen beschränkt wird, von deren Punkten reelle gemeinsame Tangenten an die Flächen λ_0 und μ_0 gelegt werden können.

Man erkennt endlich durch Vergleich der gewonnenen Parametervertheilung mit den Betrachtungen des § 6:

VI. *In der oberen Grenze* $v_1 \pm \mathsf{N}$ *der beiden einem äusseren Punkte des Ellipsoides* λ *zufallenden Parameterpaare* $u_1 \,|\, u_2$ *ist* $\pm \mathsf{N}$ *einschliesslich seines Vorzeichens die dem Punkte zugehörige zusammengesetzte Wurzelfunction* N.

§ 11.

Darstellung der homogenen Ebenencoordinaten im Raume durch Producte zweier ϑ-Functionen.

Die transcendenten Parameter $u_1 \,|\, u_2$, $v_1 \,|\, v_2$, welche zur Darstellung der homogenen Punktcoordinaten x, y, z, t in den Formeln (33) benutzt wurden, gestatten in ganz analoger Form auch die homogenen Ebenencoordinaten ξ, η, ζ, τ auszudrücken, welche in § 3, 12 durch die elliptischen Coordinaten definirt wurden. Es bestehen nämlich zwischen den Parametern $v_1 \,|\, v_2$, $u_1 \,|\, u_2$ und den Wurzelfunctionen der λ, μ, ν auf Grund der Beziehungen (28) die folgenden Relationen*):

$$
(\mathrm{a}') \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}} &= \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1 \,|\, v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1 \,|\, v_2)}, \\
\frac{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}} &= \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1 \,|\, v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1 \,|\, v_2)}, \\
\frac{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} &= \frac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1 \,|\, v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1 \,|\, v_2)},
\end{aligned}
\right.
$$

*) Vgl. Prym, a. a. O. S. 68, 69. Rosenhain, a. a. O. S. 423.

und ferner:

$$
(\mathrm{b}')\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} \\
&\qquad=\frac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_3)}, \\
&\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} \\
&\qquad=\frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\
&\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} \\
&\qquad=\frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\
&\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} \\
&\qquad=\frac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}.
\end{aligned}\right.
$$

Führt man hiernach an Stelle der algebraischen Functionen der λ, μ, ν die ϑ-Functionen in die Definition der ξ, η, ζ, τ in (12) ein, so gelangt man zu dem Satze:

Die homogenen Coordinaten ξ, η, ζ, τ der Ebenen des Raumes stellen sich in Abhängigkeit von den 4 Parametern $v_1 \mid v_2$ und $u_1 \mid u_2$ in folgender Weise dar:

$$
(43)\left\{
\begin{aligned}
\varkappa\cdot\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot\xi &= \quad\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\
\varkappa\cdot\sqrt{\beta-\lambda_0}\cdot\eta &= \quad\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\
\varkappa\cdot\sqrt{\gamma-\lambda_0}\cdot\zeta &= -\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\
\varkappa\cdot\tau &= -\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\
&\quad\ \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Die in diesen Formeln dargestellten Ebenen ξ, η, ζ, τ sind bei

constantem $v_1 \mid v_2$ die den einzelnen Punkten des Ellipsoides λ im Sinne des § 2 zugehörigen Normalebenen E_λ.

Die Formeln verlieren in der vorliegenden Form ihre Anwendbarkeit für das ausgezeichnete Ellipsoid λ_0, indem dann $v_1 \mid v_2 = 0 \mid 0$ wird, und die ϑ-Functionen der Variabeln $v_1 \mid v_2$ alle 4 verschwinden. Man kann indessen die Verhältnisse dieser 4 ungeraden ϑ-Functionen durch die Verhältnisse von 4 geraden ϑ-Functionen ersetzen. Dazu bedient man sich solcher dreigliedriger Productrelationen*) zwischen den ϑ-Functionen, welche die Function $\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)$ enthalten und wegen des Verschwindens dieser Function für die vorliegenden Variablen auf 2 Glieder herabkommen. Es ergeben sich dann die weniger einfachen Formeln:

$$(43)' \quad \left\{ \begin{aligned} & \varkappa' \cdot \sqrt{\alpha-\lambda_0} \cdot \xi \\ = \; & \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ & \varkappa' \cdot \sqrt{\beta-\lambda_0} \cdot \eta \\ = \; & \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ & \varkappa' \cdot \sqrt{\gamma-\lambda_0} \cdot \zeta \\ = - & \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ & \varkappa' \cdot \tau \\ = - & \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2), \end{aligned} \right.$$

die auch für $v_1 \mid v_2 = 0 \mid 0$ unmittelbar anwendbar bleiben.

Die Ausdrücke (12) des § 2 ergaben für $\mu = \mu_0$ bei variabel bleibendem ν und λ die Tangentialebenen des Hyperboloides μ_0; die Coordinaten ξ, η, ζ, τ der letzteren gehen daher aus (43) hervor, wenn $u_1 \mid u_2$ der Bedingung genügen (vgl. § 9):

$$(44) \qquad \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) = 0.$$

Aehnlich könnte man in der Gleichung:

$$(44') \qquad \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) = 0$$

---

*) Vgl. Weber, Crelle's Journal, Bd. 84, S. 336, Formelsystem B; ferner: Krazer, a. a. O., S. 39, Formelsystem (C_4).

die Tangentialgleichung des Ellipsoides λ_0 mit Bezug auf die Formeln (43) erblicken. Hierzu mag zum Vergleiche mit den entsprechenden Betrachtungen des § 9 bemerkt werden, dass die 4 ϑ-Functionen der Argumente $u_1 \mid u_2$ in (43) zusammen mit den beiden unter (44), (44′) auftretenden ϑ-Functionen wiederum ein Rosenhain'sches Sechsersystem bilden.

Die Darstellung (43) der homogenen Ebenencoordinaten im Raume liefert zu jedem Parametersystem $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$ eine einzige Ebene. Dagegen gehören, wenn man selbst $v_1 \mid v_2$ als constant ansieht, *bei unbeschränkter Variabilität von $u_1 \mid u_2$ zu jeder Ebene 4 Parameterpaare $u_1 \mid u_2$.*

Beschränkt man aber, wie in § 10, die oberen Grenzen ν und μ der Integraldifferenzen $u_1 \mid u_2$ durch die Ungleichungen (6), sodass bei gegebenem ν und μ nur noch 16 incongruente Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ (mod. $2\pi i \mid 0$ und $0 \mid 2\pi i$) hervorgehen, so kommt auf jede der 16 einem Werthepaare ν, μ entsprechenden Ebenen ξ, η, ζ, τ *nur mehr ein Werthepaar $u_1 \mid u_2$.*

Um die Vertheilung der *beschränkten Parameterpaare* $u_1 \mid u_2$ auf die Normalebenen E_λ in den Punkten der Zone $(\mu_0\,\mu_0)$ eines festen Ellipsoides und zugleich den Zusammenhang der Parameterdarstellungen (33) und (43) zu übersehen, hat man die wechselseitige Abhängigkeit der Vorzeichen in den Formeln (b) und (b′) der §§ 9 und 11 zu beachten, welche, solange ν und μ den Ungleichungen (6) entsprechen, den folgenden Regeln gehorcht:

I. *Bedeutet in den beiden Formelsystemen* (b) *und* (*b′*) *$u_1 \mid u_2$ das nämliche der 16 rein imaginären und nach den doppelten Perioden incongruenten Werthepaare $u_1 \mid u_1$, die zu gegebenem ν, μ gehören, so haben auch die Quadratwurzeln $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ in beiden Formelsystemen die nämlichen* (*impliciten*) *Vorzeichen.* (Dabei gelten mit Ausnahme der 3 genannten und der Wurzel $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, wie früher, alle einzelnen Wurzeln positiv).

II. *Die Aenderung des Vorzeichens von* M *in den oberen Grenzen der $u_1 \mid u_2$ mit gleichzeitiger Zufügung der Perioden $\pi i \mid 0$, welche die linken Seiten der Formeln* (b) *ungeändert lässt, ändert in den Formeln* (b′) *durchgehends das Vorzeichen von $\sqrt{\mu_0 - \mu}$* (vgl. § 10, IV).

Was endlich die Formeln (b′) für sich angeht, so gilt noch ferner:

III. *Jenachdem in den oberen Grenzen der Integrale $u_1 \mid u_2$ die Wurzelfunction* M *positiv oder negativ ist, sind auf den linken Seiten der Formeln die Wurzelfunctionen $\sqrt{\mu - \gamma}$ und $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen.*

Aus diesem Verhalten der Formelsysteme (b) und (b′) geht in Rücksicht auf die zur Definition der ξ, η, ζ, τ in (12) gemachten Bemerkungen hervor:

IV. *Die den* ***Normalebenen*** E_λ *eines äusseren Punktes des Ellipsoides* λ *für die Darstellung* (43) *zugehörigen Parameterpaare* $u_1 \mid u_2$ *sind zugleich die beiden dem* ***Punkte*** *selbst für die Darstellung* (33) *zugehörigen Punktepaare* $u_1 \mid u_2$.

Die beiden Normalebenen E_λ enthalten je 2 der durch P gehenden Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0. Den Anfangselementen dS je zweier in derselben Ebene gelegenen Tangenten gehören auch dieselben zusammengesetzten Wurzelfunctionen N und M zu (vgl. § 6). Demnach ergiebt sich mit Hinblick auf Satz III:

V. *In den oberen Grenzen* $\nu, \pm \mathsf{N}$ *und* $\mu, \pm \mathsf{M}$ *des Parameterpaares* $u_1 \mid u_2$ *einer Ebene* E_λ *im Punkte* P *sind* $\pm \mathsf{N}$ *und* $\pm \mathsf{M}$ *einschliesslich der gerade geltenden Vorzeichen diejenigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen* N *und* M, *welche dem Punkte* P *als einem Punkte der in* E_λ *enthaltenen Tangenten der Flächen* λ_0 *und* μ_0 *angehören.*

Da der Punkt λ, μ, ν in jeder der beiden zugehörigen Normalebenen E_λ gelegen ist und als Punkt einer jeden von ihnen, je die nämlichen Parameter, wie die Ebene, besitzt, so muss *die Bedingung* (11) *der vereinigten Lage von Punkt und Ebene* mit Substitution der Werthe (33) und (43) für x, y, z, t und ξ, η, ζ, τ in Bezug auf $v_1 \mid v_2$ und $u_1 \mid u_2$ identisch erfüllt sein, solange $v_1 \mid v_2$ der Bedingung (32) genügt.

In der That besteht zwischen den ϑ-Functionen der Formelsysteme (33) und (43) die *identische Relation**):

$$(45)\quad \begin{cases} \quad\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2) \\ +\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2) \\ -\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2) \\ -\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0, \end{cases}$$

deren *geometrische Bedeutung* für das confocale Flächensystem hiermit gegeben ist.

§ 12.

Darstellung der homogenen Liniencoordinaten der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch ϑ-Functionen.

Vermöge der in § 8 gesetzten Beziehung zwischen den elliptischen Coordinaten ν, μ und den Integraldifferenzen $u_1 \mid u_2$ lassen sich in den Formeln (18) die Variabeln ν, μ durch die Parameter $u_1 \mid u_2$ ersetzen. Dazu dienen die Formeln:

*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 37, Formelsystem C_2.

$$
(\mathrm{b}'')\quad\left\{\begin{aligned}
&+\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\
&\qquad=+\frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)},\\
&-\frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\
&\qquad=-\frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)},\\
&-\frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\
&\qquad=-\frac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)},\\
&-\frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\
&\qquad=+\frac{\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)},\\
&-\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\
&\qquad=-\frac{\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)},\\
&+\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\
&\qquad=+\frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}.
\end{aligned}\right.
$$

Indem man dieselben mit den Formeln (18) verbindet, gewinnt man das Resultat:

Die 6 homogenen Liniencoordinaten einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 stellen sich in Abhängigkeit von den Parametern $u_1 \mid u_2$ in folgender Weise dar:

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
\varkappa\cdot\frac{p_{12}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} &= +\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa\cdot\frac{p_{13}}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} &= -\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa\cdot\frac{p_{14}}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} &= -\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa\cdot\frac{p_{34}}{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda_0}} &= +\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}\cdot\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa\cdot\frac{p_{42}}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda_0}} &= -\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa\cdot\frac{p_{23}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda_0}} &= +\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}(u_1\mid u_2).
\end{aligned}\right.$$

Um die gleichberechtigte Beziehung der gemeinsamen Tangenten zu der einen und der anderen der beiden Flächen λ_0 und μ_0 auch analytisch zum Ausdruck zu bringen, hat man zu bemerken, dass in Folge der Gleichungen:

$$\frac{\sqrt{\alpha-\lambda_0}}{\sqrt{\alpha-\mu_0}}=\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}\cdot\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}}{\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}},\qquad \frac{\sqrt{\beta-\lambda_0}}{\sqrt{\beta-\mu_0}}=\frac{\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}}{\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}\cdot\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}},$$

$$\frac{\sqrt{\gamma-\lambda_0}}{\sqrt{\mu_0-\gamma}}=\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}}{\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}\cdot\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}}$$

die Darstellung (46) auch in folgender Form gegeben werden kann:

$$(46')\quad \left\{\begin{aligned}
\varkappa'\cdot\frac{p_{12}}{\sqrt{\alpha-\mu_0}} &= +\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa'\cdot\frac{p_{13}}{\sqrt{\beta-\mu_0}} &= -\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa'\cdot\frac{p_{14}}{\sqrt{\mu_0-\gamma}} &= -\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}\cdot\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa'\cdot\frac{p_{34}}{\sqrt{\beta-\mu_0}\sqrt{\mu_0-\gamma}} &= +\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa'\cdot\frac{p_{42}}{\sqrt{\mu_0-\gamma}\sqrt{\alpha-\mu_0}} &= -\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}\cdot\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}(u_1\mid u_2),\\
\varkappa'\cdot\frac{p_{23}}{\sqrt{\alpha-\mu_0}\sqrt{\beta-\mu_0}} &= +\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}(u_1\mid u_2),
\end{aligned}\right.$$

bei der gegen die frühere Form (46) die Nullwerthe der ϑ-Functionen in den 3 ersten und den 3 letzten Zeilen entsprechend vertauscht sind.

Dieser Umstand bewirkt, dass die zwischen den Liniencoordinaten bestehende identische Gleichung:

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0,$$

gleichviel ob man die eine oder andere Darstellungsform, (46) oder (46′), substituirt, in die nämliche *identische ϑ-Relation*)*:

$$(47)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\\ +\vartheta\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\\ -\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)=0\end{cases}$$

übergeht.

Dass die Darstellung (46), (46′) auch den beiden Gleichungen (17) der Liniencongruenz genügt, beruht auf den durch die Substitution (46) resp. (46′) in die 2. resp. 3. Gleichung (17) hervorgehenden *identischen ϑ-Relationen:*

$$(48)\quad \begin{cases} \vartheta^2\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)+\vartheta^2\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\\ +\vartheta^2\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)-\vartheta^2\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\\ -\vartheta^2\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)-\vartheta^2\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}(u_1\; u_2)=0,\\ \vartheta^2\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)+\vartheta^2\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\\ -\vartheta^2\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)+\vartheta^2\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\\ +\vartheta^2\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)-\vartheta^2\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)=0.\end{cases}$$

Was die 3 Relationen (47) und (48) angeht, so sind dieselben nur eine einfachere Combination

(49) *dreier simultaner Göpel'scher Relationen**)*,

die je 2 der in der Relation (47) auftretenden 3 Paare von ϑ-Functionen verbinden.

Demnach ergiebt sich:

---

*) Weber, a. a. O., S. 336, Formelsystem *B*. Krazer, a. a. O., S. 39, Formelsystem C_4.

**) Göpel, Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis, Crelle's, Journal Bd. 35, S. 292. — Krazer, a. a. O., S. 55, Formelsystem IV′. Die Relationen (49) sind wegen ihrer weitläufigen Form nicht explicite angegeben.

Die Darstellung der speciellen Liniencongruenz 4. Ordnung und 4. Classe, welche von den gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 gebildet wird, gründet sich auf ein System dreier Göpel'scher biquadratischer Relationen zwischen 3 Paaren von ϑ-Functionen, welches in der einfacheren Form (47), (48) *geschrieben werden kann.*

In der Darstellung (46) ist im Besonderen die Darstellung der von den Tangenten der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0 gebildeten *developpablen Fläche* 8. *Ordnung* enthalten. Es gilt nämlich mit Zuziehung früherer Resultate (vgl. § 9, 37') der Satz (vgl. Satz I des folgenden Paragraphen):

Wenn zwischen den Parametern $u_1 \mid u_2$ die Relation:

$$\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) = 0$$

besteht, so geben die Gleichungen (46), (46') *die Liniencoordinaten der Tangenten der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0.*

§ 13.

Vertheilung der transcendenten Parameter auf die Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0.

Die Darstellung der Liniencongruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 ist im Allgemeinen dadurch charakterisirt, dass zu jedem Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ *ein* Congruenzstrahl, aber zu jedem Strahle *vier* nach den doppelten Perioden incongruente Parameterpaare vom Typus:

$$u_1 \mid u_2, \qquad u_1 + \pi i + a_{11} \mid u_2 + 0 + a_{21},$$
$$-u_1 + a_{12} \mid -u_2 + a_{22}, \qquad -u_1 + \pi i + a_{11} + a_{12} \mid u_2 + 0 + a_{21} + a_{22}$$

gehören.

Im reellen Gebiete des mit Bezug auf die Flächen λ_0 und μ_0 äusseren Raumes aber fällt, unter der früheren Beschränkung der Parameterpaare $u_1 \mid u_2$, auf jeden Strahl nur *ein* Parameterpaar.

Wenn bei dieser letzteren Auffassung in der Formel (b'') des § 12, ebenso wie in den Formeln (b') und (b) der §§ 11 und 9, mit Ausnahme der 4 Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, $\sqrt{\mu_0-\mu}$ alle einfachen Wurzelfunctionen positiv genommen werden, so gelten über die Zusammengehörigkeit der transcendenten Parameter und der Wurzelfunctionen wiederum die in § 11 über die Formeln (b') gegebenen Sätze I bis III. Es geht daher mit Zuziehung der zu der Definition (18) der Liniencoordinaten gemachten Bemerkung unmittelbar hervor:

I. *Diejenigen Parameterpaare, welche den beiden in einem Punkte P des Ellipsoides λ_0 berührenden Congruenzstrahlen für die Darstellungen*

(46), (46') *zugehören, sind die beiden Parameterpaare des Berührungspunktes für die Darstellung* (34).

II. *In den oberen Grenzen* v, $\pm \mathsf{N}$ *und* μ, $\pm \mathsf{M}$ *der Integrale des Parameterpaares* $u_1 \mid u_2$ *einer gemeinsamen Tangente der Flächen* λ_0 *und* μ_0 *sind* $\pm \mathsf{N}$ *und* $\pm \mathsf{M}$ *einschliesslich der gerade geltenden Vorzeichen diejenigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen* N *und* M, *welche dem Berührungspunkte mit der Fläche* λ_0 *als einem Punkte der Tangente im Sinne des* § 6 *zugehören.*

In Fig. 3 (§ 10) ist durch die Winkelpfeile innerhalb der einzelnen Felder der Zone $(\mu_0\,\mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 die Vertheilung der beiden Parameterpaare des Berührungspunktes auf die beiden zugehörigen Tangenten angegeben; es gehört der je in der 1. Zeile stehende Typus von $u_1 \mid u_2$ zu der Tangente, welche mit der Krümmungscurve $\nu = \nu$ einen stumpfen Winkel bildet; der in der 2. Zeile stehende Typus zu der Tangente, die mit derselben Krümmungscurve einen spitzen Winkel bildet.

Ist x, y, z, t der Berührungspunkt der Tangente p_{ik} mit dem Ellipsoid λ_0, so hat man als analytische Folgen der *vereinigten Lage von Punkt und Strahl die Gleichungen:*

$$\begin{aligned} xp_{34} + yp_{42} + zp_{23} &= 0, \\ yp_{14} - zp_{13} + tp_{34} &= 0, \\ zp_{12} - xp_{14} + tp_{42} &= 0, \\ xp_{13} - yp_{12} + tp_{23} &= 0. \end{aligned}$$

In diesen erkennt man, wenn die gemeinsamen Parameter $u_1 \mid u_2$ von Punkt und Strahl durch die Darstellungen (34) und (46) eingeführt werden, die *identischen* ϑ-*Relationen:*

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)\\ -&\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)\\ +&\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) = 0 \end{aligned}\right.$$

u. s. w.,

deren *geometrische Bedeutung* im confocalen Flächensystem hiermit gegeben ist.

Am Schlusse dieses Kapitels II sei es gestattet, einen kurzen *Rückblick* auf die Resultate desselben zu werfen.

Es ergab sich zuerst die *Darstellung der Punkte* (Formeln (33)) und *Ebenen des Raumes* (43) durch *vier* transcendente Parameter, von denen 2 durch eine Relation (32) von einander abhängig waren.

Aus diesen Darstellungen ging im Besonderen die *Darstellung der Punkte der Fläche* λ_0 (34) und *der beiden Normalebenen* dieser Punkte ((43′) mit $v_1|v_2 = 0|0$) durch *zwei* transcendente Parameter hervor. Hieran schloss sich die *Darstellung* (46), (46′) *der Liniencongruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen* λ_0 *und* μ_0 an. Mit den Formeln (34), (38) und (43′) für $v_1 \mid v_2 = 0 \mid 0$ und (46) wurde die *vollständige Deutung der 16 ϑ-Functionen der Argumente $u_1 \mid u_2$ im confocalen Flächensysteme* erreicht.

An diese Deutung reiht sich die Frage nach der *Bedeutung der identischen ϑ-Relationen im confocalen Flächensysteme* an. Auch die Beantwortung dieser Frage wurde im vorliegenden Kapitel begonnen.

Als Repräsentant der *quadratischen Relationen zwischen je* 4 *ϑ-Functionen eines Rosenhain'schen Sechsersystems* erscheint die Relation (35) mit ihrer Bedeutung für die *Darstellung der Fläche* 2. *Grades.* Als Repräsentanten der *Göpel'schen biquadratischen Relationen* zwischen 4 ϑ-Functionen bilden die unter (49) angedeuteten Relationen die Grundlage für die *Darstellung der speciellen Liniencongruenz* 4. *Ordnung und* 4. *Classe.*

Endlich sind die *vier- und dreigliedrigen Productrelationen* mit beziehungsweise *zwei* und *einem* Paare von Variablen durch die Formeln (45) und (50) mit ihren geometrischen Bedeutungen für die *vereinigte Lage gewisser Raumelemente* vertreten.

Kapitel III.

Bedeutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale im System der confocalen Flächen.

§ 14.

Die Addition der transcendenten Parameter.

Von einem äusseren Punkte $P = \lambda, \mu, \nu = x, y, z$ eines Ellipsoides, dessen Parameter λ der Bedingung $\lambda < \lambda_0$ entspricht, seien die 4 gemeinsamen Tangenten an die Flächen λ_0 und μ_0 gezogen; die Berührungspunkte mit dem Ellipsoid λ_0 seien in der gemeinsamen Bezeichnung $P' = \lambda_0 \mu' \nu' = x', y', z'$ zusammengefasst.

Die Gleichungen einer der beiden dem Punkte P zugehörigen Normalebenen E_λ, welche die 4 Tangenten PP' enthalten, ist nach § 3, 11 in laufenden (nicht homogenen) Punktcoordinaten x', y', z':

$$\xi x' + \eta y' + \zeta z' + \tau = 0,$$

wo ξ, η, ζ, τ als die homogenen Coordinaten der Ebene E_λ durch die Formeln (12) definirt wurden. Es ist ferner:

$$\frac{x x'}{\alpha - \lambda_0} + \frac{y y'}{\beta - \lambda_0} + \frac{z z'}{\gamma - \lambda_0} - 1 = 0$$

die Polarebene E_0 des Punktes P in Bezug auf das Ellipsoid λ_0. Die Schnittlinie der beiden Ebenen E_λ und E_0 trifft das Ellipsoid λ_0 oder

$$\frac{x'^2}{\alpha - \lambda_0} + \frac{y'^2}{\beta - \lambda_0} + \frac{z'^2}{\gamma - \lambda_0} - 1 = 0$$

in den Berührungspunkten P' der beiden in der Ebene E_λ enthaltenen gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch den Punkt P. Es folgt also:

I. *Sind x, y, z die gewöhnlichen Coordinaten eines äusseren Punktes P und ξ, η, ζ, τ die homogenen Coordinaten einer der beiden ihm zugehörigen Normalebenen E_λ, so bestimmen sich die Coordinaten x', y', z' der Berührungspunkte P' der beiden durch den Punkt P gehenden und in der Ebene E_λ enthaltenen gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 mit dem Ellipsoid λ_0 durch die Gleichungen:*

$$(51)\quad \begin{cases} \xi x' + \eta y' + \zeta z' + \tau = 0, \\ \dfrac{x x'}{\alpha - \lambda_0} + \dfrac{y y'}{\beta - \lambda_0} + \dfrac{z z'}{\gamma - \lambda_0} - 1 = 0, \\ \dfrac{x'^2}{\alpha - \lambda_0} + \dfrac{y'^2}{\beta - \lambda_0} + \dfrac{z'^2}{\gamma - \lambda_0} - 1 = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun mit $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$, die Parameter, welche der Punkt P mit der Ebene E_λ gemein hat, und mit $u_1' \mid u_2'$ die Parameter der beiden Punkte P', und führt mittels der Formeln (33), (34) und (43) diese Parameter in die Gleichungen (51) ein, so wird die dritte Gleichung identisch erfüllt, während die beiden anderen die Form erhalten:

$$(52)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1' \mid u_2') \\ +\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2') \\ -\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1' \mid u_2') \\ -\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2') = 0, \\ \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1' \mid u_2') \\ +\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1' \mid u_2') \\ +\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}(u_1' \mid u_2') \\ -\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u_1' \mid u_2') = 0. \end{cases}$$

Durch Vergleich dieser Formeln mit den folgenden Additionsformeln der ϑ-Functionen*):

$$
(53)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\vartheta\binom{00}{00}\cdot\vartheta\binom{10}{10}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{11}{10}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{01}{00}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2)\\
+&\vartheta\binom{00}{01}\cdot\vartheta\binom{10}{11}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{11}{11}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{01}{01}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2)\\
-&\vartheta\binom{11}{11}\cdot\vartheta\binom{01}{01}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{00}{01}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{10}{11}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2)\\
-&\vartheta\binom{01}{00}\cdot\vartheta\binom{11}{10}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{10}{10}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{00}{00}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2)=0,\\
&\vartheta\binom{00}{00}\cdot\vartheta\binom{00}{00}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{01}{00}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{01}{00}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2)\\
+&\vartheta\binom{00}{01}\cdot\vartheta\binom{00}{01}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{01}{01}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{01}{01}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2)\\
+&\vartheta\binom{11}{11}\cdot\vartheta\binom{11}{11}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{10}{11}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2)\\
-&\vartheta\binom{01}{00}\cdot\vartheta\binom{01}{00}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{00}{00}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{00}{00}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2)=0,
\end{aligned}\right.
$$

ergiebt sich, dass die Gleichungen (52) bei gegebenem $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$ für $u_1' \mid u_2'$ die beiden Lösungen $u_1' \mid u_2' = u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2$ zulassen. Mit Rücksicht auf die geometrische Bedeutung der Gleichungen (52) ergiebt sich hieraus der Satz**):

II. *Sind $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$ die Parameter, welche ein äusserer Punkt P mit einer der beiden ihm zugehörigen Normalebenen E_λ gemein hat, so haben die Berührungspunkte P' der in dieser Ebene gelegenen gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 mit dem Ellipsoid λ_0 beziehungsweise die Parameterpaare:*

$$
(54)\qquad u_1' \mid u_2' = u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2.
$$

Es verdient dabei hervorgehoben zu werden, dass jede der Gleichungen (52) für sich allein bei constantem $v_1 \mid v_2$, $u_2 \mid u_2$ einen *ebenen Schnitt* des Ellipsoides λ_0 in laufenden Parametern $u_1' | u_2'$ des Ellipsoides darstellt.

§ 15.

Das Additionstheorem der Integrale 1. Gattung.

Was den im vorigen Paragraphen gefundenen Satz II angeht, so gehören sowohl zu dem Punkte P des Ellipsoides λ, wie auch zu den Punkten P' des Ellipsoides λ_0 je *zwei* Parameterpaare $u_1 \mid u_2$; die

*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 34, Formelsystem B_1.

**) Vgl. die Behandlung des analogen Satzes der Kegelschnittstheorie bei Enneper, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte, S. 499.

beiden Parameterpaare des Punktes P vertheilen sich auf die Normalebenen E_λ im Punkte P, die der Punkte P' auf die gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 in den Punkten P'. Um in dieser Beziehung die Angaben des Satzes II zu vervollständigen und zu ermitteln, welches der beiden Parameterpaare eines Punktes P' den Werth (54) erhält, bedient man sich der Differentialgleichungen (20) des § 5.

Dem Punkte P kommen nach § 6 vier verschiedene Systeme zusammengesetzter Wurzelfunctionen $\mathsf{N}, \mathsf{M}, \Lambda$ zu, die sich auf die Elemente dS der 4 durch den Punkt gehenden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 vertheilen. Die Differentialgleichungen der 4 Tangenten sind in der gemeinsamen Form:

$$\frac{\nu^{\varkappa-1}\,d\nu}{\mathsf{N}} - \frac{\mu^{\varkappa-1}\,d\mu}{\mathsf{M}} + \frac{\lambda^{\varkappa-1}\,d\lambda}{\Lambda} = 0, \qquad \varkappa = 1, 2,$$

enthalten, wo $\mathsf{N}, \mathsf{M}, \Lambda$ jeweils die dem Punkte P als einem Punkte der betrachteten Tangente zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen bedeuten.

Diese Differentialgleichungen mag man sich für jedes Element der Tangente PP' niedergeschrieben und alsdann die succesiven Gleichungen addirt denken; man integrirt mit anderen Worten die Differentialgleichungen längs der Tangente von P bis P' hin. Das Resultat der Integration:

$$\int_{\nu,\mathsf{N}}^{\nu',\mathsf{N}'} \frac{\nu^{\varkappa-1}\,d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\mu,\mathsf{M}}^{\mu',\mathsf{M}'} \frac{\mu^{\varkappa-1}\,d\mu}{\mathsf{M}} + \int_{\lambda,\Lambda}^{\lambda_0} \frac{\lambda_{\varkappa-1}\,d\lambda}{\Lambda} = 0, \qquad \varkappa = 1, 2,$$

giebt zwei Relationen zwischen den elliptischen Coordinaten ν, μ und ν', μ' der Punkte P und P'. Die Integration ist, wie ihre ausdrücklich hervorgehobene Zergliederung erkennen lässt, für alle 3 Integrale in der Weise auszuführen, dass für jeden Punkt der betreffenden Tangente PP' die dem Punkte als einem Punkte dieser Tangente zugehörigen Wurzelfunctionen $\mathsf{N}, \mathsf{M}, \Lambda$ einschliesslich ihrer Vorzeichen in Rechnung gezogen werden. *Demnach sind im Besonderen unter* N', M' *die dem Punkte* P' *als einem Punkte der Tangente* PP' *zukommenden zusammengesetzten Wurzelfunctionen zu verstehen.*

Was die Anfangselemente dS der 4 gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 angeht, die durch den Punkt P hindurchlaufen, so kommt zweien derselben ein positives und zweien ein negatives Vorzeichen von Λ zu. Längs der Strecken PP' wechselt *das Vorzeichen von* Λ nicht, und es gehören von den 4 Strecken PP' stets zwei der negativen Hälfte der betreffenden Tangente an, so zwar, dass je eine positive und eine negative Strecke PP' im Punkte P einander conjugirt sind (vgl. § 6).

Ob die Vorzeichen von N′ *und* N *mit einander oder die von* M′ *und* M *mit einander* übereinstimmen oder nicht, das hängt nach § 6 davon ab, ob der Weg PP' die Ebene $\nu = \beta$, $\nu = \alpha$ oder $\mu = \gamma$ durchschneidet oder das Hyperboloid $\mu = \mu_0$ berührt, und ist also aus der geometrischen Anschauung unmittelbar ersichtlich.

Die gefundenen Relationen zwischen λ, μ, ν und μ', ν' können so aufgelöst werden:

$$\int_{\beta}^{\nu',N'} \frac{\nu^{\varkappa-1}\,d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu',M'} \frac{\mu^{\varkappa-1}\,d\mu}{\mathsf{M}} - \int_{\beta}^{\nu,N} \frac{\nu^{\varkappa-1}\,d\nu}{\mathsf{N}} + \int_{\gamma}^{\mu,M} \frac{\mu^{\varkappa-1}\,d\mu}{\mathsf{M}} - \int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda} \frac{\lambda^{\varkappa-1}\,d\lambda}{\Lambda} = 0,$$

worauf man das Resultat erhält:

III. *Zwischen den elliptischen Coordinaten* ν', μ' *des Berührungspunktes* P' *einer der 4 vom Punkte* P *an die beiden Flächen* λ_0 *und* μ_0 *laufenden gemeinsamen Tangenten mit der Fläche* λ_0 *einerseits und den elliptischen Coordinaten* λ, μ, ν *des Punktes* P *andererseits bestehen die Relationen:*

$$(55)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\beta}^{\nu,N} \frac{d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu,M} \frac{d\mu}{\mathsf{M}} + \int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda} \frac{d\lambda}{\Lambda} = \int_{\beta}^{\nu',N'} \frac{d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu',M'} \frac{d\mu}{\mathsf{M}}, \\[2ex] \displaystyle\int_{\beta}^{\nu,N} \frac{\nu\,d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu,M} \frac{\mu\,d\mu}{\mathsf{M}} + \int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda} \frac{\lambda\,d\lambda}{\Lambda} = \int_{\beta}^{\nu',N'} \frac{\nu\,d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu',M'} \frac{\mu\,d\mu}{\mathsf{M}}, \end{cases}$$

wo N, M, Λ *die dem Punkte* P *und* N′, M′ *die dem Punkte* P' *als Punkten der betrachteten Tangente zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen bedeuten.*

Dieser Satz enthält die geometrische Deutung des *einfachen Additionsproblems,* welches verlangt, bei gegebenen oberen Grenzen ν, μ, λ und gegebenen Vorzeichen von N, M, Λ die oberen Grenzen ν', μ' und die Vorzeichen von N′, M′ so zu bestimmen, dass von Multiplis der Perioden abgesehen die beiden Relationen (55) bestehen.

Die *constructive Lösung des Problems* ist folgende:

Man fixirt auf dem Ellipsoid λ einen der Punkte ν, μ, für welche die zugehörige Quadratwurzel N das gegebene Vorzeichen besitzt, und wählt unter den 4 durch diesen Punkt P gehenden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 diejenige aus, der im Punkte P die gegebenen Vorzeichen von M und Λ zukommen. Die elliptischen Coordinaten ν' und μ' des Berührungspunktes dieser Tangente mit dem Ellipsoid λ_0 sind die gesuchten oberen Grenzen und die dem Punkte als einem Punkte der Tangente zukommenden zusammengesetzten Wurzelfunctionen N′ und M′ sind die gesuchten Wurzelwerthe N′ und M′.

Indem man die Relationen (55) durch lineare Combination auf die in (28) eingeführten Normalintegrale überträgt, nehmen sie die Gestalt an:

$$(56)\qquad \left\{\int_{\beta}^{\nu',N'} d\omega_\varkappa - \int_{\gamma}^{\mu',M'} d\omega_\varkappa\right\} - \left\{\int_{\beta}^{\nu,N} d\omega_\varkappa - \int_{\gamma}^{\mu,M} d\omega_\varkappa\right\} = \int_{\lambda_0}^{\lambda,\varDelta} d\omega_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2.$$

Die nähere Betrachtung der Integrationswege der vorliegenden Integrale führt alsdann zu dem Schlusse, dass die linken Seiten dieser Gleichungen nicht nur modulo $\pi i \mid 0$ und $0 \mid \pi i$, sondern auch modulo $2\pi i \mid 0$ und $0 \mid 2\pi i$ als die Differenzen $u_1' - u_1 \mid u_2' - u_2$ eines Parameterpaares $u_1' \mid u_2'$ des Punktes P' und eines Parameterpaares $u_1 \mid u_2$ des Punktes P zu betrachten sind; und zwar ist $u_1 \mid u_2$ dasjenige Parameterpaar, welches der Punkt P mit der die Tangente PP' enthaltenden Ebene E_λ für die Darstellung (43) gemein hat (vgl. § 11, IV. V), und $u_1' \mid u_2'$ dasjenige Parameterpaar, welches der Punkt P' mit der Tangente PP' für die Darstellung (46) gemein hat (vgl. § 13, I. II). Hiernach ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass den Punkten der Strecke PP' der negative oder positive Werth von Λ zugehört, jenachdem dieselbe einen Theil der positiven oder negativen Hälfte der betreffenden Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 ausmacht, der Satz:

IV. *Zwischen einem Parameterpaare $u_1' \mid u_1'$ des Berührungspunktes P' einer der 4 vom Punkte P an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 laufenden gemeinsamen Tangenten einerseits und einem Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ des Punktes P andererseits bestehen die Beziehungen:*

$$(54)\qquad u_1' \mid u_2' = u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2;$$

dabei ist unter $u_1' \mid u_2'$ dasjenige Parameterpaar des Punktes P' verstanden, welches derselbe mit der Tangente PP' gemein hat, und unter $u_1 \mid u_2$ dasjenige Parameterpaar des Punktes P, welches er mit der die Tangente PP' enthaltenden Ebene E_λ gemein hat; endlich ist für $v_1 \mid v_2$ in der Definition (28) *jetzt unter Λ der positive Werth der Quadratwurzel verstanden: es gelten dann in* (54) *die oberen oder unteren Zeichen, jenachdem die Strecke PP' der negativen oder positiven Hälfte der betreffenden Tangente angehört.*

Damit ist der Satz II des vorigen Paragraphen in einer erweiterten Form wiedergefunden, aus welcher die Nothwendigkeit der genauen Vorzeichendiscussionen des Kapitel II zu erkennen ist.

§ 16.

Die Additionstheoreme der ϑ-Functionen als analytischer Ausdruck der vereinigten Lage gewisser Raumelemente.

Auf Grund des Satzes IV kann man unmittelbar die Parameter der *vier Punkte* angeben, in welchen die vier durch den Punkt P gehenden Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 die Fläche λ_0 berühren.

Bezeichnet man nämlich die beiden Parameterpaare $u_1 | u_2$ des Punktes P mit $u_1 | u_2$ und $\bar{u}_1 | \bar{u}_2$, so sind die Parameterpaare der vier Berührungspunkte P':

$$u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2, \quad \bar{u}_1 \pm v_1 \mid \bar{u}_2 \pm v_2.$$

Als weitere Folgerung geht hervor (vgl. § 13, I. II.):

V. *Sind $u_1 | u_2$ und $\bar{u}_1 | \bar{u}_2$ die beiden Parameterpaare eines äusseren Punktes P auf dem Ellipsoid $v_1 | v_2$ oder λ, so sind:*

$$(57) \quad \begin{cases} u_1 + v_1 \mid u_2 + v_2, & \bar{u}_1 + v_1 \mid \bar{u}_2 + v_2, \\ u_1 - v_1 \mid u_2 - v_2, & \bar{u}_1 - v_1 \mid \bar{u}_2 - v_2 \end{cases}$$

die Parameterpaare der 4 durch den Punkt P gehenden Strahlen S der Congruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 (für die Darstellung (46)).

Die je *über*einanderstehenden Parameterpaare in (57) kommen zweien in *derselben* Normalebene E_λ des Punktes P gelegenen, also einander conjugirten Strahlen S zu; die *neben*einanderstehenden Parameterpaare der oberen, resp. unteren Zeile in (57) gehören den Strahlen zu, die mit ihrer negativen, resp. positiven Hälfte durch den Punkt P gehen.

Zu einem äusseren Punkte P des Ellipsoides $v_1 | v_2$ gehörten 2 Normalebenen E_λ und 4 Congruenzstrahlen S. Die analytischen Folgen der vereinigten Lage von Punkt x, y, z, t und Strahl $p_{i\varkappa}$, resp. von Ebene ξ, η, ζ, τ und Strahl $p_{i\varkappa}$ sind:

$$\begin{aligned} x p_{34} + y p_{42} + z p_{23} &= 0, & \xi p_{12} + \eta p_{13} + \zeta p_{14} &= 0, \\ y p_{14} - z p_{13} + t p_{34} &= 0, & \eta p_{23} - \zeta p_{42} + \tau p_{12} &= 0, \\ z p_{12} - x p_{14} + t p_{42} &= 0, & \zeta p_{34} - \xi p_{23} + \tau p_{13} &= 0, \\ x p_{13} - y p_{12} + t p_{23} &= 0, & \xi p_{42} - \eta p_{34} + \tau p_{14} &= 0. \end{aligned}$$

In den transcendenten Parametern der betheiligten Elemente geschrieben, sind diese Relationen nichts anderes als die Additionstheoreme der ϑ-Functionen:

$$(58) \begin{cases} \vartheta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(v_1|v_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}(u_1|u_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}(u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2) \\ - \vartheta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(v_1|v_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}(u_1|u_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}(u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2) \\ + \vartheta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}(v_1|v_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}(u_1|u_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}(u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2) = 0 \end{cases}$$

und 3 analoge Formeln,

ferner:

$$
(58')\quad\left\{\begin{aligned}
&\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)\\
-&\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)\\
+&\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)=0
\end{aligned}\right.
$$

und 3 analoge Formeln.

Diese Additionstheoreme gelten *in Bezug auf* $u_1|u_2$ *identisch, in Bezug auf* $v_1|v_2$ *nur unter der Voraussetzung* (32). Diese letztere ist es, welche die im Allgemeinen *vier*gliedrigen Additionsformeln auf 3 Glieder reducirt; es würden nämlich beispielsweise die beiden ausgeschriebenen Additionsformeln (58), (58′) in *unverkürzter* Form so lauten:

$$
\begin{aligned}
&\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)\\
-&\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)\\
+&\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)\\
-&\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)=0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)\\
-&\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)\\
+&\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)\\
-&\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)=0.
\end{aligned}
$$

Mit $v_1|v_2=0|0$ gehen die 4 Additionsformeln (58) in die 4 Productrelationen (50) des § 13 über, während in den Formeln (58′) alle Glieder einzeln verschwinden.

§ 17.

Geometrische Bedeutung der Additionstheoreme der Integrale 2. und 3. Gattung.

Die vorstehenden §§ 14—16 bezogen sich auf das in den Gleichungen (55), (56) enthaltene Additionstheorem der hyperelliptischen Integrale 1. Gattung $p=2$. Der § 15 gab eine geometrische Inter-

pretation dieser Gleichungen, welche in § 14 mittels der Parameterdarstellungen des Kapitel II und in § 15 mittels der Differentialgleichungen (20) begründet wurde. Es ergaben sich ferner die den transcendenten Relationen (55) entsprechenden algebraischen Gleichungen (51), in welche mittels der Formeln (9) und (12) die oberen Grenzen λ, μ, ν, μ', ν' der Integrale der Relationen (55) eingeführt werden können, und zugleich die geometrische Bedeutung einer Gruppe von Additionstheoremen der ϑ-Functionen. Auf Grund der dabei benutzten geometrischen Vorstellungen sollen im vorliegenden § 17 die von dem Additionstheorem (55) der *Integrale* 1. *Gattung* abhängigen Additionstheoreme der *Integrale* 2. *und* 3. *Gattung* abgeleitet werden.

Sei zu dem Ende wiederum $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ ein auf dem Ellipsoide λ beliebig gegebener äusserer Punkt und $P' = x', y', z' = \lambda_0, \mu', \nu'$ einer der 4 Berührungspunkte der vom Punkte P an λ_0 und μ_0 gezogenen Tangenten mit λ_0; seien ferner N, M, Λ die dem Punkte P und N', M' die dem Punkte P' als Punkten der betrachteten Tangente zugehörigen Wurzelfunctionen.

Alsdann drückt sich die *Länge* einer solchen Tangente von P bis P' in gewöhnlicher Maassbestimmung nach § 7, 23 also aus:

$$PP' = \int\limits_{\nu,\mathsf{N}}^{\nu',\mathsf{N}'} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\mathsf{N}} - \int\limits_{\mu,\mathsf{M}}^{\mu',\mathsf{M}'} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\mathsf{M}} + \int\limits_{\lambda,\Lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\Lambda},$$

und zwar ist dies die positive oder negative Länge des betreffenden Linienstückes, jenachdem die dem Punkte P als einem Punkte der Tangente zugehörige Wurzelfunction Λ positiv oder negativ ist*). Andererseits hat man:

$$PP' = \pm\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Die Combination beider Gleichungen giebt:

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\limits_{\beta}^{\nu,\mathsf{N}} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\mathsf{N}} - \int\limits_{\gamma}^{\mu,\mathsf{M}} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\mathsf{M}} \\ &\qquad + \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda} \frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\Lambda} \\ &= \int\limits_{\beta}^{\nu',\mathsf{N}'} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\mathsf{N}} - \int\limits_{\gamma}^{\mu',\mathsf{M}'} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\mathsf{M}} \\ &\qquad \mp\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}, \end{aligned}\right.$$

*) Weil im ersteren Falle bei der Integration die positive, im letzteren die negative Richtung der Tangente verfolgt wird (vgl. § 7, III und § 6, Mitte von S. 22).

wobei im 3. Gliede rechter Hand das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem im 3. Gliede linker Hand, für die obere Grenze, Λ positiv oder negativ ist.

Ebenso wie hiernach die Anwendung der gewöhnlichen Maassbestimmung auf die Tangente PP' zu dem *Additionstheorem der Integrale* 2. *Gattung* führt, gelangt man mit Anwendung der projectivischen Maassbestimmung für die Fundamentalfläche ω zu dem *Additionstheorem der Integrale* 3. *Gattung*. Die entsprechende Formel lautet (vgl. § 7, (23')):

$$(60)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\lambda_0-\omega)(\mu_0-\omega)}}\left\{\displaystyle\int_\beta^{\nu,N}\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{(\nu-\omega)\,\mathsf{N}}\right. \\ \qquad\qquad \left.-\displaystyle\int_\gamma^{\mu,M}\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{(\mu-\omega)\,\mathsf{M}}+\int_{\lambda_0}^{\lambda,A}\frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{(\lambda-\omega)\,\Lambda}\right\} \\ =\sqrt{\dfrac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\lambda_0-\omega)(\mu_0-\omega)}}\left\{\displaystyle\int_\beta^{\nu',N'}\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{(\nu-\omega)\,\mathsf{N}}\right. \\ \qquad\qquad \left.-\displaystyle\int_\gamma^{\mu',M'}\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{(\mu-\omega)\,\mathsf{M}}\right\}\mp\log\frac{\Omega_1+\Omega_2}{\Omega_1-\Omega_2}, \\ \text{wo zur Abkürzung gesetzt ist:} \\ \Omega_1=\dfrac{xx'}{\alpha-\omega}+\dfrac{yy'}{\beta-\omega}+\dfrac{zz'}{\gamma-\omega}-1, \\ \Omega_2=\sqrt{\dfrac{(x-x')^2}{\alpha-\omega}+\cdots+\dfrac{(z-z')^2}{\gamma-\omega}-\dfrac{(yz'-zy')^2}{(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}-\cdots-\dfrac{(xy'-yx')^2}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)}}, \end{cases}$$

und das Vorzeichen des logarithmischen Gliedes dem von Λ entgegengesetzt zu nehmen ist.

In die erhaltenen Formeln (59) und (60) kann man an Stelle der x, y, z und x', y', z' vermittelst der Formeln (8) die λ, μ, ν und μ', ν' einführen oder auch vermittelst der Formeln (33) und (34) die von den Integralen der Gleichungen (56) abhängenden ϑ-Functionen eintreten lassen. Das letztere soll wenigstens für die Formel (59) explicite durchgeführt werden.

Sind wieder $u_1 \mid u_2$ die Parameter des Punktes P auf dem Ellipsoide $v_1 \mid v_2(\lambda)$ und der die Tangente PP' enthaltenden Ebene E_λ, ferner $u_1' \mid u_2'$ die Parameter des Punktes P' und der Tangente PP' selbst, so wird nach (33) und (34):

$$\frac{x-x'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}}=\frac{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\,|\,u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\,|\,u_2')}$$
$$-\frac{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(u_1'\,|\,u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\,|\,u_2')}.$$

Nun ist nach (54) $u_1'\,|\,u_2'=u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2$, wo die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, jenachdem PP' der negativen oder positiven Hälfte der betreffenden Tangente angehört. Benutzt man daher, indem man zunächst die oberen Vorzeichen annimmt, das Additionstheorem:

$$\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1+v_1\,|\,u_2+v_2)$$
$$-\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(u_1+v_1\,|\,u_2+v_2)$$
$$-\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(u_1+v_1\,|\,u_2+v_2)$$
$$-\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}\cdot\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}(u_1|u_2)\;\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}(u_1+v_1\,|\,u_2+v_2)=0,$$

in welchem das letzte Glied in Folge von (32) verschwindet, so erhält man:

(61)

$$\frac{x-x'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}}=+\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')};$$

hieran reihen sich die analogen Formeln:

$$\frac{y-y'}{\sqrt{\beta-\lambda_0}}=-\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')},$$

$$\frac{z-z'}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}}=-\frac{\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')},$$

$$\frac{yz'-zy'}{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda_0}}=+\frac{\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')},$$

$$\frac{zx'-xz'}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda_0}}=-\frac{\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')},$$

$$\frac{xy'-yx'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda_0}}=+\frac{\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')}.$$

Diese Formeln sind vollständig aufgestellt worden, weil sie *einen neuen Beweis der Darstellung* (46) *der Liniencongruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen* λ_0 *und* μ_0 *liefern*, der sich unmittelbar auf die Additionstheoreme der ϑ-Functionen und die geometrische Bedeutung der Addition der transcendenten Parameter stützt (vgl. § 4, (16); § 12, (46); § 13, I).

Zuzüglich der Formeln:

$$\frac{\sqrt{\beta-\lambda_0}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}}=\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,1}}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}},\qquad \frac{\sqrt{\gamma-\lambda_0}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}}=\frac{\vartheta\binom{1\,1}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}},$$

ergeben die 3 ersten Gleichungen (61):

$$\frac{x-x'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}}=+\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\,|\,u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\,|\,u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')},$$

$$\frac{y-y'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}}=-\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\,|\,u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\,|\,u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')},$$

$$\frac{z-z'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}}=-\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\,|\,v_1)\cdot\vartheta\binom{1\,1}{1\,1}\cdot\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\,|\,u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')}.$$

Die Bildung der Quadratsummen der rechten und linken Seiten führt unter Benutzung der identischen Relation*):

$$\begin{aligned}&\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1'|u_2')+\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1'|u_2')\\&+\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1'|u_2')-\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1'|u_2')=0\end{aligned}$$

zu dem Resultate**):

$$\sqrt{\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{\alpha-\lambda_0}}$$

$$=\pm\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\,\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1'|u_2')}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\cdot\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'|u_2')}.$$

Hiernach nimmt die Gleichung (59) die Form an:

---

*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 35, B_4.

**) Vgl. die analoge Formel aus der Anwendung der elliptischen Functionen auf die Geometrie der Kegelschnitte bei Enneper, a. a. O. S. 500.

$$(62)\left\{\begin{aligned} &\int_{\beta}^{\nu, N}\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{N}}-\int_{\gamma}^{\mu, M}\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{M}}+\int_{\lambda_0}^{\lambda, \varLambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \Lambda}\\ &\qquad\qquad=\int_{\beta}^{\nu', N'}\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{N}}-\int_{\gamma}^{\mu', M'}\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{M}}\\ &\qquad\mp\frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1+v_1|u_2+v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1+v_1|u_2+v_2)},\end{aligned}\right.$$

wo das Vorzeichen des 3. Gliedes rechter Hand so zu bestimmen bleibt, dass dieses Glied mit Einschluss seines Vorzeichens einen negativen oder positiven Werth erhält, jenachdem im 3. Gliede linker Hand, für die obere Grenze, Λ positiv oder negativ ist.

Trennt man die Integraldifferenzen $u_1 \mid u_2$ in ihre Bestandtheile und setzt etwa:

$$(63)\left\{\begin{aligned} &\int_{\beta}^{\nu, N} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\beta}^{\nu, N} d\omega_2 = s_1 \mid s_2, \quad \int_{\gamma}^{\mu, M} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\gamma}^{\mu, M} d\omega_2 = t_1 \mid t_2\\ &\qquad\qquad\text{und, wie früher:}\\ &\qquad\qquad\int_{\lambda_0}^{\lambda, \varLambda} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\lambda_0}^{\lambda, \varLambda} d\omega_2 = v_1 \mid v_2,\end{aligned}\right.$$

so bestehen zwischen den Variablen $s_1 \mid s_2$, $t_1 \mid t_2$, $v_1 \mid v_2$ nach (31) die Relationen:

$$\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(s_1 \mid s_2)=0, \quad \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(t_1 \mid t_2)=0, \quad \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)=0.$$

In Folge derselben fallen aus der für beliebige Werthepaare $s_1 \mid s_2$ und $t_1 \mid t_2$ geltenden Additionsformel:

$$\begin{aligned}&\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(s_1|s_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(t_1|t_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(s_1-t_1 \mid s_2-t_2)\\ -&\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(s_1|s_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(t_1|t_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(s_1-t_1 \mid s_2-t_2)\\ -&\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(s_1|s_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(t_1|t_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(s_1-t_1 \mid s_2-t_2)\\ -&\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(s_1|s_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(t_1|t_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(s_1-t_1 \mid s_2-t_2)=0\end{aligned}$$

im vorliegenden Falle die beiden letzten Glieder fort, und es folgt:

$$\frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}=\frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(s_1|s_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(t_1 \mid t_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(s_1|s_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(t_1 \mid t_2)}.$$

Demnach kann man das *Additionstheorem* (62) *der Integrale 2. Gattung* auch in der Form schreiben:

$$
(64)\left\{\begin{aligned}
&\int\limits_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{N}} - \int\limits_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{M}} + \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, \Delta} \frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \Lambda} \\
&\qquad = \int\limits_{\beta}^{\nu', N'} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{N}} - \int\limits_{\gamma}^{\mu', M'} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{M}} \\
&\mp \frac{\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(s_1|s_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(t_1|t_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(s_1-t_1+v_1\mid s_2-t_2+v_2)}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(s_1|s_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(t_1|t_2)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(s_1-t_1+v_1\mid s_2-t_2+v_2)},
\end{aligned}\right.
$$

wo $s_1 \mid s_2$, $t_1 \mid t_2$, $v_1 \mid v_2$ die Bedeutungen (63) haben, und zwischen ν, N; μ, M; λ, Λ; ν', N'; μ', M' die Relationen (55) bestehen.

§ 18.

Bestimmung des Schnittpunktes zweier sich schneidender Congruenzstrahlen.

An den Satz V des § 16 schliessen sich als leichte Folgerungen die ferneren Sätze an:

I. *Sind* $u_1 \mid u_2$ *die Parameter eines Strahles S der Congruenz* (46), *so wird das Ellipsoid* $v_1 \mid v_2$ *oder* λ *von dem positiven Halbstrahl S im Punkte:*

$$u_1 + v_1 \mid u_2 + v_2,$$

von dem negativen Halbstrahl im Punkte:

$$u_1 - v_1 \mid u_2 - v_2$$

geschnitten.

Hierbei sind unter $v_1 \mid v_2$ die Integrale aus (28) mit positivem Λ zu verstehen, wie solches auch für die beiden folgenden Sätze gilt:

II. *Die den Strahl* $u_1 \mid u_2$ *in seinen Schnittpunkten mit dem Ellipsoid* $v_1 \mid v_2$ *enthaltenden Normalebenen dieser Punkte sind* $u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2$ *mit der dem Satz* I *entsprechenden Bedeutung der Vorzeichen.*

III. *Ein vom Punkte* $u_1 \mid u_2$ *des Ellipsoides* $v_1 \mid v_2$ *ausgehender und in der Normalebene* $u_1 \mid u_2$ *des Punktes enthaltener Strahl S schneidet dasselbe Ellipsoid zum* 2. *Mal im Punkte:*

$$u_1 \pm 2v_1 \mid u_2 \pm 2v_2,$$

wo die positiven oder negativen Vorzeichen zu nehmen sind, jenachdem der 2. *Schnittpunkt auf dem positiven oder negativen Halbstrahl S liegt.*

An diese Sätze knüpft sich weiter die Frage, wann zwei reelle Congruenzstrahlen, die durch ihre, wie in § 10 beschränkten, Para-

meterpaare $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ gegeben werden, sich schneiden, und zwar sich so schneiden, dass sie in ihrem Schnittpunkte conjugirt sind, also die durch sie bestimmte Ebene eine der beiden ihrem Schnittpunkte zugehörigen Normalebenen des Ellipsoides ist, auf dem der Schnittpunkt liegt. Diese besondere Form des Schneidens zweier Strahlen soll als *„conjugirter Schnitt auf dem Ellipsoid“* bezeichnet werden*).

Seien unter der Voraussetzung, dass die gegebenen Strahlen sich auf dem Ellipsoid $v_1 \mid v_2$ conjugirt schneiden, $u_1 \mid u_2$ die Parameter ihres Schnittpunktes und zugleich der diesem Punkte zugehörigen Normalebene E_λ, welche die Strahlen enthält. Der Schnittpunkt mag etwa auf dem negativen Halbstrahl $u_1' \mid u_2'$ und auf dem positiven Halbstrahl $u_1'' \mid u_2''$ liegen. Dann müssen sich nach § 16, V die Parameter $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ in die Form setzen lassen:

$$u_1' \mid u_2' = u_1 + v_1 \mid u_2 + v_2, \qquad u_1'' \mid u_2'' = u_1 - v_1 \mid u_2 - v_2$$

oder, wie der Kürze halber geschrieben werde:

$$u' = u + v, \qquad u'' = u - v.$$

Diese Form angenommen, folgt:

$$u = \frac{u' + u''}{2} \qquad v = \frac{u' - u''}{2}.$$

Da nun $v_1 \mid v_2$ allgemein der Bedingung (32) genügen müssen, so ergiebt sich als *nothwendige* Bedingung für den conjugirten Schnitt der Strahlen u' und u'':

$$\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u_1' - u_1''}{2} \,\middle|\, \frac{u_2' - u_2''}{2}\right) = 0.$$

Diese Bedingung ist aber auch *hinreichend*. Ist sie nämlich erfüllt, so wird die gemeinsame obere Grenze λ, Λ der beiden einfachen Integrale $v_1 \mid v_2$ aus der Forderung:

$$(65) \qquad v_1 \mid v_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_1 \,\middle|\, \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_2 = \frac{u_1' - u_1''}{2} \,\middle|\, \frac{u_2' - u_2''}{2}$$

bestimmt, und zwar eindeutig. Da überdies aus dem Umkehrproblem (65) unter anderen die Relation:

$$\frac{\sqrt{\lambda_0 - \lambda}}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u_1' - u_1''}{2} \,\middle|\, \frac{u_2' - u_2''}{2}\right)}{\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\1\,1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}\left(\frac{u_1' - u_1''}{2} \,\middle|\, \frac{u_2' - u_2''}{2}\right)}$$

folgt, deren rechte Seite, bei der den Parametern $u_1 \mid u_2$ der reellen Strahlen auferlegten Beschränkung, immer reell ist, so muss die Lösung

*) Dabei liegt der Schnittpunkt der beiden Strahlen immer auf der *positiven* Hälfte des *einen* und der *negativen* Hälfte des *andern* Strahles (vgl. § 6).

λ des Umkehrproblems (65) immer zwischen den reellen Grenzen $-\infty$ und λ_0 liegen.

Es kann alsdann auch stets erreicht werden, dass in der Lösung λ, Λ die Wurzel Λ positiv ausfällt, indem man, falls dies bei der Forderung: $v = \frac{u' - u''}{2}$ nicht der Fall ist, die Forderung $v = \frac{u'' - u'}{2}$ stellt. Hat man die obere Grenze λ, Λ der beiden Integrale $v_1 \mid v_2$ bestimmt, und ist für $v = \frac{u' - u''}{2}$ das Λ positiv ausgefallen, so wird nach § 18, 1 das Ellipsoid λ von dem negativen Halbstrahl u' im Punkte $u' - v = \frac{u' + u''}{2}$ und von dem positiven Halbstrahl u'' im Punkte $u'' + v = \frac{u' + u''}{2}$ geschnitten. Die beiden Schnittpunkte fallen also zusammen; ferner liegen nach § 18, II die beiden Strahlen u' und u'' auch in derselben Normalebene des Ellipsoides λ im Punkte $\frac{u' + u''}{2}$. Da $u_1' \mid u_2'$ ein reeller Strahl der Congruenz und $v_1 \mid v_2$, wie bewiesen, ein reelles, λ_0 umschliessendes Ellipsoid ist, so folgt, dass auch der Schnittpunkt $u' - v = \frac{u' + u''}{2}$ ein reeller, äusserer Punkt sein wird.

Das Resultat ist dieses:

IV. a) *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei reelle Congruenzstrahlen $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ sich auf einem Ellipsoid λ conjugirt schneiden, lautet:*

$$(66) \qquad \vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \left(\frac{u_1' - u_1'}{2} \,\middle|\, \frac{u_2' - u_2'}{2} \right) = 0;$$

b) *Der Schnittpunkt liegt dann auf dem Ellipsoid:*

$$v_1 \mid v_2 = \pm \frac{u_1' - u_1''}{2} \,\Big|\, \pm \frac{u_2' - u_2''}{2};$$

c) *Die gemeinsamen Parameter des Schnittpunktes und der Ebene der beiden Strahlen sind:*

$$(67) \qquad u_1 \mid u_2 = \frac{u_1' + u_1''}{2} \,\Big|\, \frac{u_2' + u_2''}{2};$$

d) *Jenachdem sich in der Lösung des Umkehrproblems:*

$$(65) \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_2 = \frac{u_1' - u_1''}{2} \,\Big|\, \frac{u_2' - u_2''}{2}$$

für Λ das positive oder negative Vorzeichen ergiebt, liegt der Schnittpunkt der beiden Strahlen auf der negativen Hälfte von $u_1' \mid u_2'$ und der positiven von $u_1'' \mid u_2''$, oder umgekehrt.

Da die nicht symmetrische Verwendung der 3 elliptischen Coordinaten λ, μ, ν zur Definition (28) der Parameter u und v den *Ellipsoiden* des confocalen Systems eine ausgezeichnete Rolle zuweist, so kann der Gleichberechtigung der *drei Flächenarten* des confocalen Systems nicht in jeder Beziehung Rechnung getragen werden, ohne dass man die einmal gewählten Parameter verlässt. Um jedoch wenigstens die *einschaligen Hyperboloide* für spätere Zwecke der Betrachtung zugänglich zu machen, soll hier noch die Frage beantwortet werden, wann zwei Congruenzstrahlen u' und u'' *„sich auf einem Hyperboloid μ conjugirt schneiden“*, d. h. sich so schneiden, dass ihr Winkel von der Normale N_μ des einschaligen Hyperboloides, welches durch ihren Schnittpunkt geht, halbirt wird.

Sei $P = \lambda, \mu, \nu$ der Schnittpunkt der beiden Strahlen u' und u'', die in der bezeichneten Art sich schneidend angenommen werden. Bedeuten nun ε_1 und ε_2 nach Bedürfniss das Zeichen $+$ oder $-$, so sind die beiden Parameterpaare u und $\bar{u}$ (vgl. § 16) des Punktes im Allgemeinen von der Form:

$$u = u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \qquad \bar{u} = u^{\varepsilon_1, -\varepsilon_2} + (\pi i \mid 0),$$

wofern man von dem etwa zutretenden Periodenpaar $0 \mid \pi i$ absieht (vgl. Fig. 3). Dabei steht $u + (\pi i \mid 0)$ zur Abkürzung für $u_1 + \pi i \mid u_2 + 0$.

Die 4 Congruenzstrahlen durch den Punkt P haben nach § 16, IV die Parameterpaare:

$$\begin{aligned} &u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + v, \qquad && u^{\varepsilon_1, -\varepsilon_2} + v + (\pi i \mid 0), \\ &u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} - v, \qquad && u^{\varepsilon_1, -\varepsilon_2} - v + (\pi i \mid 0), \end{aligned}$$

und zwar gehören die je nebeneinanderstehenden Parameterpaare zu einem Paar in Bezug auf N_μ conjugirter Strahlen; denn die dem Punkte P als einem Punkte eines jeden der 4 Strahlen zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen sind bezüglich:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 \mathsf{N},\ \varepsilon_2 \mathsf{M},\ + \Lambda, \qquad && \varepsilon_1 \mathsf{N},\ - \varepsilon_2 \mathsf{M},\ + \Lambda, \\ &\varepsilon_1 \mathsf{N},\ \varepsilon_2 \mathsf{M},\ - \Lambda, \qquad && \varepsilon_1 \mathsf{N},\ - \varepsilon_2 \mathsf{M},\ - \Lambda \end{aligned}$$

(vgl. § 10, VI. § 11, V. § 15, IV). Zwei in Bezug auf N_μ im Punkte P conjugirte Strahlen u' und u'' haben also nothwendig die Parameterdifferenz:

$$u' - u'' = u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} - u^{\varepsilon_1, -\varepsilon_2} - (\pi i \mid 0),$$

und zwar gehört bei dieser Schreibweise dem Punkte P als einem Punkte auf u', resp. u'' die zusammengesetzte Wurzelfunction $\varepsilon_2 \mathsf{M}$, resp. $-\varepsilon_2 \mathsf{M}$ zu. Mit Rücksicht auf die Definition (28) der Parameter u und auf die Beziehung:

$$2 \int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_1 \,\Big|\, 2 \int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_2 = \pi i \mid 0,$$

wird hieraus:

$$u' - u'' = 2 \int_{\mu_0}^{\mu,\, -\varepsilon_2 M} d\omega_1 \;\Big|\; 2 \int_{\mu_0}^{\mu,\, -\varepsilon_2 M} d\omega_2 .$$

Setzt man also abkürzend:

$$(68) \qquad w = w_1 \mid w_2 = -\int_{\mu_0}^{\mu,\, M} d\omega_1 \;\Big|\; -\int_{\mu_0}^{\mu,\, M} d\omega_2 ,$$

so hat man den Satz:

Wenn sich die beiden Congruenzstrahlen u' und u'' im Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ „auf dem Hyperboloid μ conjugirt schneiden", so stehen ihre Parameter in der Beziehung:

$$(65') \qquad \frac{u' - u''}{2} = \pm\, w ,$$

wo w die Bedeutung (68) hat, und das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem die dem Punkte P als einem Punkte des Strahles u' zugehörige Wurzelfunction M das positive oder negative Vorzeichen besitzt.

Um der Vorzeichenregel einen anschaulicheren Ausdruck zu geben, wird man neben die in § 5 eingeführte Theilung jedes Congruenzstrahles in „*zwei Hälften*", eine positive und eine negative, eine zweite, von jener unabhängige Theilung jedes Congruenzstrahles in „*zwei Abschnitte*" treten lassen. *Der positive Abschnitt erstrecke sich, mit Bezugnahme auf die positive Richtung des Strahles, vom Berührungspunkt des Strahles mit dem Hyperboloid μ_0 bis zum Schnittpunkt mit der Ebene $\mu = \gamma$, der negative Abschnitt, ebenfalls mit Bezugnahme auf die positive Richtung des Strahles, von diesem bis zu jenem Punkte zurück.* Auf dem positiven Abschnitt ist dann nach § 6 M negativ, auf dem negativen M positiv.

Hiernach gilt in (65') das obere oder untere Zeichen, jenachdem der Punkt P auf dem negativen oder positiven Abschnitte des Strahles u' liegt.

Man kann nun ohne Schwierigkeit zeigen, dass die aus (65') nothwendig folgende Relation (vgl. Formeln (31)):

$$\vartheta \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix} \left(\frac{u_1' - u_1''}{2} \;\Big|\; \frac{u_2' - u_2''}{2} \right) = 0$$

umgekehrt auch die *hinreichende* Bedingung für den verlangten Schnitt der Strahlen u' und u'' ist. Damit erhält man das Resultat:

V. a) *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die 2 reellen Congruenzstrahlen $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ sich auf einem Hyperboloid μ conjugirt schneiden, lautet:*

$$(66') \qquad \vartheta\binom{0\,1}{1\,1}\left(\frac{u_1'-u_1''}{2}\,\middle|\,\frac{u_2'-u_2''}{2}\right)=0.$$

b) *Der Schnittpunkt liegt alsdann auf dem einschaligen Hyperboloid, dessen Parameter* μ *sich aus dem Umkehrproblem bestimmt:*

$$(65') \qquad w_1 \mid w_2 = -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_1 \,\Big|\, -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_2 = \frac{u_1'-u_1''}{2} \,\Big|\, \frac{u_2'-u_2''}{2}.$$

c) *Jenachdem die Lösung des letzteren für* M *das positive oder negative Vorzeichen ergiebt, liegt der Schnittpunkt der beiden Strahlen auf dem negativen Abschnitt von* u' *und dem positiven von* u'', *oder umgekehrt.*

Die Gültigkeit der Sätze dieses Paragraphen ist wesentlich gebunden an die *Beschränkung* auf die *reellen* Congruenzstrahlen und auf die von den *beschränkten* Variablen λ, μ, ν (vgl. § 1, 6) abhängigen Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ und $v_1 \mid v_2$. Bei völlig *unbegrenzter* Variabilität der λ, μ, ν im *complexen* Gebiete hört nicht nur die eindeutige Beziehung zwischen Strahl und Parameterpaar $u_1 \mid u_2$ auf, sondern geht auch die Unterscheidung der Ellipsoide und Hyperboloide des confocalen Systems durch die Bezeichnung ihrer Parameter λ, μ, ν verloren.*)

Um *bei dieser allgemeinen Auffassung* die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, dass zwei Congruenzstrahlen u' und u'' sich schneiden, gehe man von der algebraischen Form dieser Bedingung aus. Diese lautet, wenn p_{ik}' und p_{ik}'' die Liniencoordinaten der beiden Strahlen sind:

$$p_{12}'p_{34}'' + p_{13}'p_{42}'' + p_{14}'p_{23}'' + p_{12}''p_{34}' + p_{13}''p_{42}' + p_{14}''p_{23}' = 0.$$

Führt man in diese Gleichung mittels der Formeln (46) die transcendenten Parameter u' und u'' der beiden Strahlen ein und benutzt die identische Relation (wo allgemein $u = u_1 \mid u_2$ zu denken ist):

$$\begin{aligned}
&\vartheta\binom{00}{11}\cdot\vartheta\binom{01}{11}(u')\cdot\vartheta\binom{10}{01}\cdot\vartheta\binom{11}{01}(u'') + \vartheta\binom{00}{10}\cdot\vartheta\binom{01}{10}(u')\cdot\vartheta\binom{10}{00}\cdot\vartheta\binom{11}{00}(u'') \\
&-\vartheta\binom{11}{00}\cdot\vartheta\binom{10}{00}(u')\cdot\vartheta\binom{01}{10}\cdot\vartheta\binom{00}{10}(u'') + \vartheta\binom{00}{11}\cdot\vartheta\binom{01}{11}(u'')\cdot\vartheta\binom{10}{01}\cdot\vartheta\binom{11}{01}(u') \\
&+\vartheta\binom{00}{10}\cdot\vartheta\binom{01}{10}(u'')\cdot\vartheta\binom{10}{00}\cdot\vartheta\binom{11}{00}(u') - \vartheta\binom{11}{00}\cdot\vartheta\binom{10}{00}(u'')\cdot\vartheta\binom{01}{10}\cdot\vartheta\binom{00}{10}(u') \\
&= -4\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}\left(\frac{u'-u''}{2}\right)\cdot\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}\left(\frac{u'-u''}{2}\right)\cdot\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\left(\frac{u'+u''}{2}\right)\cdot\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}\left(\frac{u'+u''}{2}\right),
\end{aligned}$$

*) Vgl. die Dissertation des Verfassers (Leipziger Dissertationen 1881), S. 22.

welche ein Specialfall der Riemann'schen ϑ-Formel*) ist, so nimmt die obige Bedingung die Form an:

$$\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'-u''}{2}\right)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'-u''}{2}\right)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'+u''}{2}\right)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'+u''}{2}\right)=0.$$

Die den beiden Parameterpaaren $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ entsprechenden Congruenzstrahlen schneiden sich also, wenn die beiden Parameterpaare einer der 4 Relationen genügen:

$$(69)\qquad \begin{cases} \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\dfrac{u_1'-u_1''}{2}\,\Big|\,\dfrac{u_2'-u_2''}{2}\right)=0,\\[2ex] \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\left(\dfrac{u_1'+u_1''}{2}\,\Big|\,\dfrac{u_2'+u_2''}{2}\right)=0,\\[2ex] \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}\left(\dfrac{u_1'-u_1''}{2}\,\Big|\,\dfrac{u_2'-u_2''}{2}\right)=0,\\[2ex] \vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\left(\dfrac{u_1'+u_1''}{2}\,\Big|\,\dfrac{u_2'+u_2''}{2}\right)=0. \end{cases}$$

Unter diesen 4 gleichberechtigten Formen der Bedingung des Schnittes zweier beliebiger, reeller oder nicht reeller Congruenzstrahlen finden sich im Besonderen die in den Sätzen IV und V angegebenen Gleichungen wieder.

Das vorstehende Kapitel giebt in den Formeln (55), (59) und (60) die *einfachen Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale* 1., 2. *und* 3. *Gattung*, bei welchen es sich um die Reduction der Summen von nur 3 Integralen auf Summen von 2 Integralen derselben Art handelt, und entwickelt die geometrische Bedeutung dieser einfachen Additionstheoreme; es zeigt ferner, wie auch die *Additionstheoreme der ϑ-Functionen* ihre geometrische Bedeutung besitzen; es bereitet endlich in § 18 die weitere *geometrische Verwerthung des Zusammenhanges* vor, welcher zwischen den Additionstheoremen der hyperelliptischen Integrale einerseits und der Theorie des Systems der confocalen Flächen andererseits zu Tage trat.

(Fortsetzung folgt).

Breslau, im Januar 1883.

*) Vgl. Krazer, a. a. O., S. 2, Formel 8.

Gruppentheoretische Studien. II.

Ueber die Zusammensetzung einer Gruppe discreter Operationen, über ihre Primitivität und Transitivität.*)

Von

Walther Dyck in Leipzig.

Einleitung.

In den im Bande 20 dieser Annalen veröffentlichten „Gruppentheoretischen Studien, I“ habe ich versucht, die Definition einer Gruppe von discreten Operationen von der speciellen Darstellungsform der einzelnen Operationen unabhängig zu machen und dieselbe lediglich auf die zur Gruppenbildung wesentlichen Eigenschaften jener Substitutionen zu gründen. Das geometrische Gewand, in das ein Theil der dort gegebenen Untersuchungen gekleidet war, erschien, an verwandte andere Forschungsgebiete anknüpfend geeignet, den Uebergang zu jenen abstracteren Definitionen zu vermitteln.

Es ist die Absicht der hier folgenden Untersuchungen, die bisher studirten ***Eigenschaften einer Gruppe*** *in ihrer abstracten Formulirung zu verfolgen. Dabei wird insbesondere die Frage zur Geltung kommen, in wie weit diese Eigenschaften durch alle verschiedenen Erscheinungsformen der Gruppe einen invarianten Charakter tragen, was zur exacten Fixirung ihres eigentlichen gruppentheoretischen Inhaltes führt.*

Es sei dabei gleich hier hervorgehoben, dass durch diese Darstellung keineswegs ein Aufgeben derjenigen *individuellen* Vortheile angestrebt wird, die für jedes specielle Problem gerade in seiner speciellen Darstellungsform liegen können. Für jedes einzelne Problem

*) Die nachfolgenden Untersuchungen habe ich zum Theil in zwei, Winter 1881/82 und Sommer 1882 gehaltenen Vorlesungen „Ueber Gruppentheorie“ und „Ueber algebraische Gleichungen“ zum Vortrage gebracht.

[Ein kurzes Referat der auf Primitivität bezüglichen Untersuchungen ist in den Comptes rendus gegeben (Paris, 9. April 1882)].

steht uns ein Schatz individueller Kenntnisse zur Verfügung — ich brauche kaum an algebraische, an functionentheoretische und zahlentheoretische Fragen zu erinnern, die mit gruppentheoretischen Problemen in Verbindung stehen — die wir in jedem gegebenen Falle mit Vortheil verwenden. *Aber gerade solche specielle Beziehungen fordern die Discussion der Frage, in wie weit sie in rein gruppentheoretischen und in wie weit in anderen Eigenschaften des gestellten Problems ihre Begründung finden.*

Aus diesen Ueberlegungen sind die nachfolgenden Untersuchungen entstanden. Macht also der *stoffliche* Inhalt der folgenden Zeilen keineswegs den Anspruch auf Neuheit, so glaube ich doch, dass gerade die Form der Fragestellung *die bekannten Eigenschaften* einer Gruppe unter einem neuen Gesichtspunkt erscheinen lässt und deren Definition in grösserer Klarheit und Schärfe ergiebt.

Wir bezeichnen im Kurzen den Inhalt der folgenden Entwickelungen.

Da es zweckmässig schien, die vorliegenden Untersuchungen von den früheren Arbeiten so weit als möglich unabhängig zu machen, sind in § 1 die für unsere Gruppen vorausgesetzten Prämissen zusammengestellt.

Der I. Abschnitt handelt sodann *von der Zusammensetzung einer Gruppe* und enthält die Aufzählung aller in einer gegebenen Gruppe (von endlicher oder unendlich hoher Ordnung) enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen *aus den hierzu nothwendigen und hinreichenden Elementen.*

Es wird dabei die Eintheilung der Substitutionen einer Gruppe nach ihrer „Gleichberechtigung" zu Grunde gelegt, wonach mit einer Substitution S alle aus ihr durch Transformation abgeleiteten Substitutionen TST^{-1} gleichberechtigt sind. Die Kenntniss je eines Repräsentanten für die verschiedenen Arten der gleichberechtigten Substitutionen einer Gruppe lässt dann die Zusammensetzung dieser Gruppe auf einfachste Weise formuliren (§ 2). Aus dieser Formulirung fliesst aber unter Zugrundelegung der in meinen früheren Untersuchungen (Gruppentheoretische Studien I) gegebenen Form der Definition einer Gruppe — durch Relationen zwischen ihren erzeugenden Substitutionen — *ein einfacher Algorithmus*, welcher sofort die Aufzählung der gesuchten Untergruppen *aus den oben erwähnten, nothwendigen und hinreichenden Prämissen* ergiebt.

Dabei sei gleich hervorgehoben, dass damit die Schwierigkeit der Frage nach den in einer gegebenen Gruppe enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen nicht gelöst ist, sondern nur, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, in eine kanonische Form gebracht, in welcher der Hauptpunkt, die Frage nach den Repräsentanten gleichberechtigter Substitutionen unmittelbar hervortritt.

Der II. Abschnitt kennzeichnet die Eigenschaft *der Primitivität, bez. Imprimitivität einer Gruppe* und deren Beziehung zur Transitivität.

Die Definition dieser Eigenschaften ist an eine Darstellung der Gruppe durch Vertauschungen gewisser Elemente geknüpft*). Wir fragen nach dem eigentlichen, gruppentheoretischen Inhalte dieser Eigenschaften. Zu dem Ende beginnen unsere Entwicklungen mit der Herstellung der „einfach transitiven regulären Darstellungsform“ aus unserer Gruppe G, welche dabei *in irgend welcher Definition* gegeben vorausgesetzt ist (§ 6). Bezüglich der Primitivität oder Imprimitivität dieser regulären Form ergiebt sich dann (in § 7) der einfache Satz:

Die reguläre Form einer Gruppe G ist imprimitiv mit Bezug auf jede in ihr enthaltene Untergruppe G'.

Aus der regulären Form von G, welche durch Vertauschungen von N Symbolen dargestellt ist (N die Ordnung der Gruppe) ergeben sich nun weitere Darstellungen durch Vertauschungen von ν Symbolen, welche gewissen Untergruppen G'' der Ordnung $\frac{N}{\nu}$ von G zugehören**), und von denen jede in der auf diese Gruppe G'' bezüglichen „imprimitiven Schreibweise“ der regulären Form von G unmittelbar abgelesen werden kann (§ 8). Bezüglich der Primitivität dieser neuen Darstellungsformen unserer Gruppe G durch Vertauschungen von ν-Symbolen folgt dann (§ 9) der weitere Satz:

Eine solche Darstellung ist imprimitiv mit Bezug auf jede Gruppe G', welche G'' umfasst und in G enthalten ist.

Somit ist eine „imprimitive Darstellungsform“ einer Gruppe G lediglich eine Folge davon, dass in G gewisse Untergruppen G' und G'' enthalten sind; weiter lässt sich auch umgekehrt der Schluss auf das Vorhandensein der betreffenden Untergruppen aus einer imprimitiven Darstellungsform der Gruppe machen.

*) Und insofern handelt es sich hierbei um *endliche* Gruppen von der Ordnung N, eine Beschränkung, die indess den Entwickelungen des Abschnittes II zufolge unmittelbar aufgehoben werden kann, indem man sich eine Gruppe auch durch Vertauschungen von unendlich vielen Symbolen definirt denken kann; diese Vertauschungen können dann freilich nicht mehr *explicite* dargestellt werden, sondern liegen nur nach ihrem gruppentheoretischen Bildungsgesetz gegeben vor. Man denke etwa, im Sinne der neueren functionentheoretischen Untersuchungen, an die in einer „regulären Gebietseintheilung“ von unendlich hoher Ordnung enthaltenen Gruppen.

**) Wie dies aus den Untersuchungen bekannt ist über diejenigen Gruppen (von Buchstabenvertauschungen), welche isomorph auf eine gegebene Gruppe G bezogen werden können. Hier handelt es sich insbesondere um *„holoedrisch isomorphe“ Beziehungen*. Man vergleiche hierzu das C. Jordan'sche Werk „Traité des substitutions et des équations algébriques“ Paris 1870, pag. 56 ff. Ferner sei gleich hier auf eine Abhandlung „Sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni“ von A. Capelli im Giornale di Matematiche (Bd. 16, 1878) verwiesen, deren Untersuchungen sich mit den vorliegenden mannigfach berühren.

Die individuelle Stellung von G' in G lässt sich dabei gleichfalls aus *verschiedenartigen Formen der Imprimitivität*, die wir in natürlicher Weise unterscheiden können, erkennen (§ 10). In § 11 sind die Gruppen aufgezählt, welche niemals und diejenigen, welche nur in der regulären Form imprimitiv erscheinen können, Gruppen einfachster Art. Aus den Untersuchungen der Paragraphen 7 und 9 ergeben sich unmittelbar die Beziehungen der Primitivität bez. Imprimitivität einer Darstellungsform zu deren Transitivität, auf die wir in § 12 kurz eingehen. In § 4 des ersten und § 13 des zweiten Abschnittes sind die gegebenen Untersuchungen an zwei Beispielen einfachster Art, der „Gruppe des Oktaeders" und der „Gruppe des Ikosaeders" noch näher illustrirt und in § 13 noch auf zwei Beispiele zu den in § 11 aufgezählten Gruppen hingewiesen.

---

§ 1.

Allgemeine Voraussetzungen für die zu behandelnden Gruppen discreter Operationen.

Die Operationen unserer Gruppen, welche wir durch T_1, T_2, $T_3, \cdots, T_k \cdots$ andeuten, beziehen sich auf *ein* bestimmtes, symbolisch durch 1 bezeichnetes Object, in welchem sie gewisse Zustandsänderungen hervorrufen.

Wir achten dabei nicht auf den Uebergangsprocess von einem Zustande in einen anderen, sondern lediglich auf die *discrete* Reihe der verschiedenen Endzustände und insofern mag die Bezeichnung einer „Gruppe discreter Operationen" gerechtfertigt erscheinen. Wir können unmittelbar die verschiedenen Endzustände durch die Symbole T_1, T_2, $T_3, \cdots, T_k, \cdots$ derjenigen Operationen bezeichnen, welche den betreffenden Zustand aus dem Anfangszustande des Objectes herleiten. Dabei sei durch $T_1 = 1$ der Anfangszustand des Objectes und zugleich die „identische Operation" bezeichnet.

Wir treffen für unsere Operationen noch weiter die folgenden Festsetzungen:

1. *Die Operationen unserer Gruppen müssen in beliebiger Wiederholung und Aufeinanderfolge angewandt werden können.*

Wir gehen dann zur Bildung einer Gruppe von einer Reihe von „erzeugenden Operationen" aus, $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$, durch deren Iteration und Combination sich alle Operationen der Gruppe ergeben in der Form symbolischer Producte:

$$(1) \qquad A_1^{\mu_1} \cdot A_2^{\mu_2} \cdots A_n^{\mu_n} \cdot A_1^{\nu_1} \cdot A_2^{\nu_2} \cdots A_n^{\nu_n} \cdots,$$

die wir stets in der Reihenfolge *von links nach rechts* verstehen wollen.

Durch die Kenntniss gewisser Relationen, die bei der Zusammensetzung unserer erzeugenden Operationen auftreten, lässt sich dann jede Gruppe definiren durch eine Reihe symbolischer Gleichungen

$$(2) \qquad F_1(A_i) = 1, \quad F_2(A_i) = 1, \cdots, F_h(A_i) = 1;$$

hierbei sind die $F(A_i)$ specielle Producte der oben (in Formel 1) bezeichneten Art, welche, wie die Gleichungen $F(A_i) = 1$ besagen, auf unser Object 1 angewandt zu dem Anfangszustande 1 desselben zurückführen.

Die durch die Relationen 2 definirte Gruppe ist dann bestimmt als die Gesammtheit der aus den erzeugenden Operationen $A_1 \cdots A_n$ entstehenden Substitutionen

$$A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} \cdots A_n^{\mu_n} A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} \cdots A_n^{\nu_n} \cdots,$$

welche vermöge der Relationen 2 *von einander verschieden ausfallen*. Dabei kann die so bestimmte Gruppe eine endliche, oder auch eine unendlich hohe Zahl von Operationen umfassen.*)

Durch diese Definition sind sofort alle „holoedrisch isomorphen" Gruppen in eine einzige begriffen.

2. Die zu einer Operation T_k „inverse Operation" ist definirt durch die symbolische Gleichung:

$$T_k T_k^{-1} = 1.$$

Wir setzen nun für unsere Betrachtungen noch fest, dass eine Gruppe, welche die Operation T_k enthält, stets auch ihre inverse Operation T_k^{-1} mit einbegreifen soll, eine Festsetzung, die selbstverständlich erfüllt ist, wenn die Operation T_k eine „endliche Periode μ" besitzt, d. h. die symbolische Gleichung

$$T_k^{\mu} = 1$$

befriedigt.

Damit folgt eine wichtige Eigenschaft der hier betrachteten Gruppen:

Es ist möglich, von jedem Zustande des Objectes zu jedem anderen überzugehen.

Die Hervorhebung *eines* Zustandes als Anfangszustandes 1 erscheint eine willkürliche, von der wir sofort zu einer neuen Bezeichnung übergehen können. Wir beachten nämlich, dass die Anordnung der Operationen unserer Gruppe in der Reihenfolge

$$1, T_2, T_3, \cdots, T_k, \cdots$$

eine ganz bestimmte Gruppirung der Operationen zur identischen

*) Man vergl. die nähere Ausführung in den Gruppentheoretischen Studien I (Annalen Bd. 20), Einleitung, sowie §§ 1, 4, 5, 9, 10.

Operation bezeichnet, welche *in ganz derselben Weise* durch die Anordnung

$$A,\ AT_2,\ AT_3,\ \cdots,\ AT_k\ \cdots$$

für den Zustand A als Ausgangspunkt gekennzeichnet ist.

I. Abschnitt.

Von der Zusammensetzung einer Gruppe.

§ 2.

Allgemeine Sätze über die in einer gegebenen Gruppe enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen.

Wenn es sich um die Aufstellung der in einer gegebenen Gruppe enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen handelt, so kommen dabei ganz bestimmte Eigenschaften der Substitutionen dieser Gruppe in Betracht, welche als Ausgangspunkt des Folgenden in der für uns zweckmässigen Formulirung kurz vorangestellt seien.

1. Sei G die gegebene Gruppe, deren Substitutionen durch $1, T_2, T_3, \cdots, T_k \cdots$ bezeichnet seien.

Transformiren wir eine Substitution T der Reihe nach mit allen Substitutionen der Gruppe G, d. h. bilden wir die Substitutionen

$$T_k T T_k^{-1},$$

wobei T_k alle Substitutionen von G durchläuft, so liefert diese Reihenfolge *„alle zur Substitution T in Bezug auf die Gruppe G gleichberechtigten Substitutionen"*. Wir greifen irgend eine dieser Substitutionen als *Repräsentanten* der ganzen Reihe heraus, aus welcher wir durch den Transformationsprocess sofort die ganze Reihe der gleichberechtigten Substitutionen herleiten können.

So ordnen sich alle Substitutionen von G zu Reihen gleichberechtigter Substitutionen an, deren jede durch eine beliebige Substitution der Reihe als Repräsentanten gekennzeichnet ist.

Reduciren sich alle zu einer gegebenen Substitution T gleichberechtigten Substitutionen auf die einzige Substitution T, d. h. besteht für jede Substitution T_k von G die Gleichung

$$T_k T T_k^{-1} = T,$$

so heisst die Substitution T in der Gruppe G ausgezeichnet enthalten.

Insbesondere ist die identische Substitution 1 in G ausgezeichnet enthalten.

2. Es sei G' eine in G enthaltene Untergruppe; ihre Substitutionen seien durch $1, S_2, S_3, \cdots$ bezeichnet.

Transformiren wir die sämmtlichen Substitutionen dieser Unter-

gruppe mit einer bestimmten Substitution T_k von G, eine Reihe von Operationen

$$T_k S_i T_k^{-1},$$

(wo S_i die sämmtlichen Substitutionen von G' durchläuft), so bilden diese durch T_k transformirten Substitutionen eine neue Gruppe G'', „eine zu G' mit Bezug auf die Gruppe G gleichberechtigte Untergruppe von G.“

Lassen wir nun T_k die sämmtlichen Substitutionen von G durchlaufen, so resultirt *die Gesammtheit der zu G' mit Bezug auf G gleichberechtigten Untergruppen G', G'', G''' . . .*

Wir greifen irgend eine derselben, G', als *Repräsentanten* heraus, aus welcher vermöge des Transformationsprocesses sofort die Gesammtheit der gleichberechtigten Untergruppen hergestellt werden kann.

Alle in G enthaltenen Untergruppen ordnen sich hiernach in Reihen je untereinander gleichberechtigter Untergruppen an, deren jede durch eine beliebige Gruppe der Reihe als Repräsentanten gekennzeichnet ist.

Enthält eine Reihe nur eine einzige Gruppe G', befriedigen also alle ihre Substitutionen $1, S_2, \cdots, S_m \cdots S_n \cdots$ die charakteristische Relation

$$T_k S_m T_k^{-1} = S_n,$$

unter T_k irgend eine Substitution der Gruppe G verstanden, *so heisst diese Gruppe G' in G ausgezeichnet enthalten.*

Insbesondere ist die Identität 1 als eine in G ausgezeichnete Untergruppe aufzufassen. Weiter ist die Gruppe G in sich selbst ausgezeichnet enthalten.

3. Enthält eine in G ausgezeichnete Untergruppe G' eine Substitution S, so enthält sie auch die ganze Reihe der zu S mit Bezug auf die Gruppe G gleichberechtigten Substitutionen;

und analog:

Enthält eine in G ausgezeichnete Untergruppe G' ihrerseits eine Untergruppe H, so enthält sie auch die ganze Reihe der zu H mit Bezug auf die Gruppe G gleichberechtigten Untergruppen H', H'' . . . .

4. *Die Untergruppe G', welche entsteht, wenn man eine Substitution S und alle zu ihr in Bezug auf die Gruppe G gleichberechtigten Substitutionen auf alle möglichen Weisen iterirt und combinirt, ist in der Gruppe G ausgezeichnet enthalten.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus der *Definition* einer in G ausgezeichneten Untergruppe G'. Die allgemeinste Substitution, welche zufolge des obigen Processes der Gruppe G' angehört, ist eine Reihe von Factoren $T_a S T_a^{-1}$ etwa:

$$T_a S T_a^{-1} T_b S T_b^{-1} T_c S T_c^{-1} \cdots T_m S T_m^{-1} = S'.$$

Es ist zu zeigen, dass auch jede Substitution $T_k S' T_k^{-1}$ in der

Gruppe G' enthalten ist, wo T_k eine beliebige Substitution von G ist. Das folgt aber sofort aus der Beziehung:

$$T_k S' T_k^{-1} = T_k T_a S T_a^{-1} T_k^{-1} \cdot T_k T_b S T_b^{-1} T_k^{-1} \cdots T_k T_m S T_m^{-1} T_k^{-1},$$

welche zeigt, dass auch $T_k S' T_k^{-1}$ durch die *Combination* einer Reihe von Substitutionen entstanden ist, welche zu S mit Bezug auf die Gruppe G gleichberechtigt sind.

Wir können also sagen:

Die Substitution S bildet zusammen mit den zu ihr mit Bezug auf die Gruppe G gleichberechtigten Substitutionen *ein System erzeugender Substitutionen für die ausgezeichnete Untergruppe G'.*

Die so erhaltene Untergruppe G' ist dabei sicher die kleinste in G ausgezeichnete Untergruppe, welche die Substitution S enthält. Sie enthält mindestens alle Potenzen der Substitution S und kann speciellen Falles auch mit der Gruppe G selbst identisch sein.

5. In analoger Weise lässt sich für jede Untergruppe von G sofort die kleinste in G enthaltene ausgezeichnete Untergruppe angeben, welche jene erstgenannte Untergruppe enthält.

6. *Umgekehrt erhält man die Gesammtheit der in einer Gruppe G enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen dadurch, dass man die kleinsten ausgezeichneten Untergruppen G' aufsucht, in welchen die Repräsentanten der gleichberechtigten Substitutionen von G je einzeln und in allen möglichen Combinationen enthalten sind.* Für jede solche Untergruppe G' liegt ein System erzeugender Substitutionen in den zu dem betreffenden Repräsentanten gleichberechtigten Substitutionen vor.

Es ist dabei für die praktische Durchführung der Aufgabe, alle ausgezeichneten Untergruppen einer vorgelegten Gruppe G aufzuzählen, die Bemerkung von Vortheil, dass man sich unter den Repräsentanten von endlicher Ordnung (die also einer Gleichung $S_i^{m_i} = 1$ genügen) auf die Repräsentanten von Primzahlordnung beschränken kann, insofern jeder andere durch die Combination mehrerer Repräsentanten von Primzahlordnung hergestellt werden kann.

Führen alle so erhaltenen „kleinsten ausgezeichneten Untergruppen" stets auf die Hauptgruppe G selbst, so ist diese einfach.

§ 3.

Aufzählung der in einer gegebenen Gruppe G enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen.

Den im vorigen Paragraphen gegebenen Sätzen über die Aufzählung aller in einer gegebenen Gruppe enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen schliesst sich nun ein einfacher Algorithmus an, welcher die wirkliche Durchführung dieser Aufzählung sofort ergiebt, falls eine

Gruppe in der allgemeinen in § 1 erwähnten Definition gegeben vorliegt und die Repräsentanten der Systeme von gleichberechtigten Substitutionen bekannt sind.

Es liege eine Gruppe G von Operationen $1, T_2, T_3, \cdots$ gegeben vor, als erzeugt durch eine Reihe von Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_m$, welche an die Bedingungen:

$$(1) \quad F_1(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1, \quad F_2(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1, \cdots, \\ \cdots F_h(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1$$

geknüpft sind.

Dann gilt der Satz), dass die Zufügung einer oder mehrerer Relationen*

$$(2) \quad F_{h+1}(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1, \cdots, F_r(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1$$

zu den gegebenen jedesmal eine in der Gruppe G ausgezeichnet enthaltene Untergruppe G' abscheidet, welche alle diejenigen Substitutionen von G umfasst, die zufolge der obigen Relationen (2) der Identität congruent werden. Die linken Seiten unserer Relationen (2) sind nämlich in der Gruppe G enthaltene Substitutionen. Gleichzeitig mit ihnen werden also zunächst alle Substitutionen

$$T_k F_{h+1} T_k^{-1}, \cdots, T_k F_r T_k^{-1}$$

der Identität congruent, in welchen T_k eine beliebige Substitution der Gruppe G bezeichnet. Das sind also alle zu den Substitutionen $F_{h+1}, \cdots, F_r$ der Gruppe G *gleichberechtigten* Substitutionen. Dann aber werden alle hieraus durch Iteration und Combination erzeugten Substitutionen von G ebenfalls der Identität congruent. Die Gesammtheit aller dieser Substitutionen bildet aber, wie wir soeben in § 2, Nr. 4 gesehen haben, eine in G ausgezeichnete Untergruppe; und zwar ist es die kleinste ausgezeichnete Untergruppe von G, welche die Substitutionen $F_{h+1} \cdots F_r$ enthält.

Hiermit ist aber der Algorithmus zur Aufzählung der sämmtlichen in einer Gruppe ausgezeichnet enthaltenen Untergruppen aus den dazu nothwendigen und hinreichenden Elementen gegeben:

Es seien

$$F_{h+1}, F_{h+2}, \cdots, F_{h+k}$$

je die Repräsentanten der verschiedenen in der Gruppe G enthaltenen Systeme gleichberechtigter Substitutionen.

Dann erhalten wir *eine erste Reihe ausgezeichneter Untergruppen von G,* wenn wir je einen dieser Repräsentanten der Identität congruent setzen, z. B.

$$F_{h+1} = 1.$$

---

*) Vergleiche „Gruppentheoretische Studien I. § 4, 5, auf welche auch, was die Terminologie dieses Paragraphen anbetrifft, verwiesen sein mag.

Die „*Tragweite*" einer solchen Relation erstreckt sich auf die Substitutionen der kleinsten in G ausgezeichneten Untergruppe G', welche die Substitution $F_{\lambda+1}$ enthält.

Die Gesammtheit *aller* in G enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen folgt dann, wenn wir die obigen Relationen noch auf alle möglichen Weisen combinirt ins Auge fassen.

Wenn dadurch, dass wir successive je einen unserer Repräsentanten der Identität congruent setzen, stets *alle* Substitutionen der Gruppe G der Identität congruent werden, so ist die Gruppe *einfach.*

§ 4.

Beispiele für die Bestimmung der Zusammensetzung einer Gruppe.

Es erscheint nicht unzweckmässig, den soeben im Allgemeinen geschilderten Algorithmus an einigen Beispielen einfachster Art zu verfolgen und dies mag im Folgenden für die „Gruppe des Octaeders" (Gruppe der Vertauschungen von vier Dingen), und für die „Gruppe des Icosaeders" (Gruppe der geraden Vertauschungen von fünf Dingen) geschehen. Es sind die Beispiele, die wir auch zur Illustration des Abschnittes II verwenden*).

1.

Die Gruppe des Octaeders.

In meiner früheren Arbeit**) habe ich gezeigt, dass, unter A_1, A_2, A_3 die „erzeugenden Substitutionen verstanden, die Gruppe des *Octaeders* durch die Relationen

$$(1)\qquad A_1^4 = 1,\quad A_2^3 = 1,\quad A_3^2 = 1,\quad A_1 A_2 A_3 = 1$$

zwischen den erzeugenden Substitutionen gegeben ist. Die 24 Substitutionen des Octaeders sind dann gegeben in der Form:

$$(2)\qquad \begin{array}{lll}
\text{a)} & 1 & \text{(die Identität).} \\
\text{b)} & A_2^{\lambda} A_1^{\mu} A_2^{-\lambda} & \cdot\ \lambda=0,1,2;\quad \mu=1,3. \\
\text{c)} & A_2^{\lambda} A_1^{2} A_2^{-\lambda} & \cdot\ \lambda=0,1,2. \\
\text{d)} & A_1^{\lambda} A_2^{\mu} A_1^{-\lambda} & \cdot\ \lambda=0,1,2,3;\quad \mu=1,2. \\
\text{e)} & A_3^{\lambda} A_1^{\mu} A_3 A_1^{-\mu} A_3^{-\lambda} & \cdot\ \lambda=0,1;\quad \mu=0,1,2,3.
\end{array}$$

Formel 2b umfasst die sechs Substitutionen der Periode 4; sie sind sämmtlich untereinander gleichberechtigt, wie dies aus der

*) Bezüglich der für die hier auftretenden speciellen Gruppen eingeführten Terminologie sei auf die Arbeiten von Schwarz (Crelle, Bd. 75) und Klein, Math. Annalen 9 und 14 verwiesen.

**) Gruppentheoretische Studien I, § 15.

Formel hervorgeht, wenn wir noch die zwischen A_1 und A_1^3 bestehende Beziehung:

$$A_2^2 A_1^2 A_2 (A_1) A_2^2 A_1^2 A_2 = A_1^3$$

beachten, welche A_1^3 „durch Transformation" aus A_1 herstellt.

Formel 2c bezeichnet die 3 Substitutionen von der Periode 2, welche sich als Potenzen der in 2b enthaltenen Substitutionen ergeben.

Formel 2d umfasst die 8 Substitutionen von der Periode 3, deren Gleichberechtigung erhellt, wenn wir noch die zwischen A_2 und A_2^2 bestehende Beziehung:

$$A_1 A_3 A_1^3 (A_2) A_1 A_3 A_1^3 = A_2^2$$

beachten.

Formel 2e endlich enthält die noch übrigen untereinander gleichberechtigten Substitutionen von der Periode 2. Es sind deren 6, wenn wir beachten, dass die Combination $\lambda = 0$, $\mu = 0$ und $\lambda = 1$, $\mu = 0$ beidemal die Substitution A_3, die Combination $\lambda = 0$, $\mu = 2$ und $\lambda = 1$, $\mu = 2$ beidemal die Substitution $A_1^2 A_3 A_1^2$ ergiebt. Die Gleichberechtigung unserer Substitutionen ist unmittelbar in der Formulirung ausgesprochen.

Danach sind die Repräsentanten der gleichberechtigten Substitutionen beim Octaeder gegeben durch

$$1, \quad A_1, \quad A_1^2, \quad A_2, \quad A_3.$$

Um also die Zusammensetzung des Octaeders zu untersuchen, haben wir der Reihe nach diese Repräsentanten gleich 1 zu setzen und zuzusehen, welche Gruppe von Substitutionen des Octaeders vermöge dieser zu den Relationen 1 tretenden neuen Relation der Identität congruent wird.

1. Die Relation

$$A_1 = 1$$

zu den Relationen 1 zugefügt, ergiebt sofort, wegen $A_1 A_2 A_3 = 1$, die Beziehung $A_2 A_3 = 1$, oder $A_2 = A_3$ und aus dieser folgt, wegen $A_2^3 = 1$ und $A_3^2 = 1$, unmittelbar $A_2 = 1$ und $A_3 = 1$ selbst.

Also werden durch Zufügung der Relation $A_1 = 1$ *sämmtliche Substitutionen des Octaeders der Identität congruent*, was lediglich besagt, dass unsere Gruppe „in sich selbst ausgezeichnet enthalten" ist.

2. Die Relation

$$A_1^2 = 1$$

zu den Relationen 1 zugefügt, lässt die 4 Substitutionen:

$$1, \quad A_1^2, \quad A_2 A_1^2 A_2^2, \quad A_2^2 A_1^2 A_2$$

gleich 1 werden und nur diese.

Damit erscheint die Gruppe dieser 4 Substitutionen in der Gesammtheit des Octaeders als eine ausgezeichnete Untergruppe G_4.

Die 24 Substitutionen ordnen sich (wie natürlich) zu je vieren zusammen, die einander gleich werden und es bleiben so *noch* 6 *von einander verschiedene Substitutionen* übrig, welche in dieser Anordnung eben gerade die durch Relationen:

$$A_1^2 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1$$

charakterisirte Gruppe bilden; es sind die Substitutionen:

$$1, \quad A_2, \quad A_2^2$$
$$A_1, \quad A_2 A_1, \quad A_2^2 A_1.$$

3. Die Relation

$$A_2 = 1$$

zu unseren Relationen 1 hinzugefügt, setzt zunächst die Gleichung $A_1 A_2 A_3 = 1$ in $A_1 A_3 = 1$ oder $A_1 = A_3$ um und mit Beachtung dieser Beziehung ergeben sich 12 Substitutionen, welche der Identität congruent werden, nämlich:

$$1$$
$$A_2^\lambda A_1^2 A_2^{-\lambda} \qquad \lambda = 0, 1, 2.$$
$$A_1^\lambda A_2^\mu A_1^{-\lambda} \qquad \begin{matrix}\lambda = 0, 1, 2, 3,\\ \mu = 1, 2.\end{matrix}$$

Die Gruppe dieser zwölf Substitutionen stellt sich sonach als ausgezeichnete Untergruppe des Octaeders dar. Es ist die Tetraedergruppe.

Mit Bezug auf diese Relation $A_2 = 1$ reduciren sich dabei die von einander *verschiedenen* Werthe unserer Substitutionen auf

$$1, \quad A_3,$$

als einer Gruppe, die hier durch unsere Relationen

(1) $$A_1^4 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1$$

und

(3) $$A_2 = 1$$

definirt erscheint; diese Relationen ziehen sich sofort auf die einzige

$$A_3^2 = 1$$

zusammen.

4. Betrachten wir schliesslich noch die „Tragweite" der Relation

$$A_3 = 1,$$

so ergiebt sich aus $A_1 A_2 A_3 = 1$ sofort $A_1 A_2 = 1$ und damit $A_1 = 1$ und $A_2 = 1$, so dass durch diese Relation die sämmtlichen Substitutionen der Gruppe sich auf die Identität reduciren.

5. Fügen wir der Vollständigkeit wegen noch die Relation $1 = 1$ hinzu, welche die *„Identität"* als ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtheit charakterisirt, so ist unsere Aufzählung beendet.

Es haben sich die bekannten Gruppen G_4 und G_{12}, eine „Doppel-

pyramidengruppe“ von der Ordnung 4 und die „Tetraedergruppe“ (der Ordnung 12) ergeben, wenn wir von der Identität und der Gesammtgruppe G selbst absehen.

2.

Die Gruppe des Icosaeders.

Nach dieser ausführlichen Entwickelung des vorigen Beispiels sei für die Gruppe des Icosaeders noch die analoge Discussion nach ihren wesentlichen Punkten kurz zusammengestellt.

Die Definition der Icosaedergruppe liegt, A_1, A_2, A_3 als erzeugende Substitutionen aufgefasst, in den Formeln vor

$$A_1^5 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1\,^{*)}.$$

Als Repräsentanten der Systeme gleichberechtigter Substitutionen erweisen sich

$$1, \ A_1, \ A_1^2, \ A_2, \ A_3,$$

so dass wir der Reihe nach diese Repräsentanten gleich 1 gesetzt, als neue Relationen zwischen unseren erzeugenden Substitutionen einzuführen haben. Dabei ist sofort für unsere Betrachtung die Beziehung $A_1 = 1$ mit der anderen $A_1^2 = 1$ gleichwerthig.

1. Aus

$$A_1 = 1$$

folgt zufolge $A_1 A_2 A_3 = 1$ sofort $A_2 A_3 = 1$, oder $A_2 = A_3$ und diese Relation führt, da $A_2^3 = 1$ und $A_3^2 = 1$ ist, sofort zu $A_2 = 1$, $A_3 = 1$.

So kommt das Ergebniss, dass unsere Relation die sämmtlichen Substitutionen des Icosaeders der Identität congruent macht.

2. Dasselbe hat nun statt, wenn wir

$$A_2 = 1$$

setzen; es folgt dann $A_1 A_3 = 1$ und hieraus ganz gerade so wie eben $A_1 = 1$ und $A_3 = 1$.

3. Endlich führt auch noch

$$A_3 = 1$$

---

*) Ich habe diese Formeln in den „Gruppentheoretischen Studien I“ als neu mitgetheilt. Herrn Wassilieff verdanke ich die Bemerkung [vergleiche dessen Arbeit О функціяхъ раціональныхъ аналогичныхъ съ функціями двоякопеpioдическими (Ueber die rationalen Functionen, welche den doppeltperiodischen analog sind, Kasan 1880, pag 33)], dass dieselben schon von Hamilton in einer kurzen Notiz im Philosophical Magazine von 1856 „Memorandum respecting a new system of non commutative roots of unity“ mitgetheilt sind.

sofort zu $A_1 = 1$ und $A_2 = 1$, so dass auch diese Relation die Gesammtheit unserer Substitutionen der Identität congruent macht.

So ist der bekannte Satz erwiesen:

Die Gruppe des Icosaeders (oder die Gruppe der geraden Vertauschungen von 5 Dingen) ist einfach.

II. Abschnitt.

Primitivität und Transitivität einer endlichen Gruppe discreter Operationen.

§ 5.

Vorbemerkungen.

Es sei in Kürze die Definition der *Primitivität*, bez. *Imprimitivität*, und der *Transitivität* einer Gruppe, wie sie mit Bezug auf die Darstellung einer Gruppe durch Vertauschungen von Buchstaben sich ergiebt, vorangestellt, wobei im Weiteren auf die Darstellungen etwa in dem C. Jordan'schen oder dem Netto'schen Werke verwiesen sein mag*):

1. Eine Gruppe von Vertauschungen der Buchstaben $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda \cdots$ heisst *imprimitiv*, wenn diese Elemente zu Systemen von je gleichvielen der Art angeordnet werden können, dass bei allen Substitutionen der Gruppe alle Elemente eines Systemes stets nur in alle Elemente desselben oder eines und desselben anderen Systemes übergehen. Die Substitutionen der Gruppe können also erzeugt werden durch eine Reihe von Vertauschungen der einzelnen Systeme in ihrer Totalität, verbunden jedesmal mit gewissen Vertauschungen der Elemente innerhalb der einzelnen Systeme.

Die Gruppe von Vertauschungen der Elemente $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda \cdots$ heisst *primitiv*, wenn *keine* derartige Vertheilung der Elemente x_λ möglich ist.

2. Eine Gruppe von Vertauschungen der Elemente $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda \cdots$ heisst *transitiv*, wenn vermöge der Substitutionen an die Stelle eines Elementes, etwa x_1, jedes beliebige andere Element x_λ gebracht werden kann. Es lässt sich dann überhaupt jedes *beliebige* Element durch jedes beliebige andere ersetzen.

Gruppen, welche die angegebene Eigenschaft nicht besitzen, heissen *intransitiv*. Die Elemente einer intransitiven Gruppe theilen sich in Systeme von je transitiv zusammenhängenden Elementen.

---

*) C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870. pag. 34 ff. und 29 ff.

*) E. Netto, Substitutionstheorie und ihre Anwendung auf die Algebra, Leipzig 1882. 1. Abschnitt, Capitel 4, insbesondere § 70, § 61 und 65.

Eine Gruppe von Vertauschungen der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots$ heisst *k-fach transitiv*, wenn ihre Substitutionen es ermöglichen, k vorgegebene Elemente, etwa $x_1, x_2, \ldots, x_k$, durch k beliebige Elemente zu ersetzen. Es lassen sich dann sofort auch k beliebige Elemente durch beliebige andere k Elemente ersetzen und insbesondere giebt es also Substitutionen welche 1, 2, 3, ..., k beliebige Elemente ungeändert lassen.

Jede *nichtprimitive* Gruppe ist höchstens *einfach* transitiv. Wird nämlich durch eine Substitution der Gruppe ein Element x_i in ein Element x_k übergeführt, so wird nach Definition das System der Elemente, welchem x_i angehört, in das System der Elemente übergeführt, welchem x_k angehört, und dadurch die Willkür der Substitutionen eines zweiten Elementes beschränkt.

§ 6.

Darstellung einer Gruppe G von N Operationen in Form einer einfach transitiven regulären Gruppe von Vertauschungen von N Symbolen.

Eine Gruppe G von N Substitutionen

$$1, T_2, T_3, \cdots, T_N$$

irgend welcher Art lässt sich sofort holoedrisch (einstufig-) isomorph auf eine Gruppe von Vertauschungen von N Symbolen beziehen, oder wie wir uns ausdrücken wollen, sie lässt sich in der *Form* einer Gruppe von N Vertauschungen von N Symbolen darstellen*).

Wir schreiben nämlich unserere N Substitutionen in einer ersten, übrigens willkürlichen Anordnung in eine Horizontalreihe

$$1, T_2, T_3, \cdots, T_N$$

und wenden nun successive auf diese N Substitutionen die Operationen $1, T_2, T_3, \cdots, T_N$ der Gruppe an, so entsteht das quadratische Schema:

Schema I.

$$\begin{array}{llll}
1 & T_2 & T_3 & \cdots T_N, \\
T_2 & T_2T_2 & T_3T_2 & \cdots T_NT_2, \\
T_3 & T_2T_3 & T_3T_3 & \cdots T_NT_3, \\
\cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
T_N & T_2T_N & T_3T_N & \cdots T_NT_N
\end{array}$$

*) Vgl. hierzu die Ausführungen bei Jordan a. a. O. pag. 60 ff., bei Netto a. a. O. § 89 und 90 und bei Capelli in dem Eingangs erwähnten Aufsatze „sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzione" im 16. Bande des Giornale di Matematiche, welche sich auf Gruppen beziehen, soweit sie durch Vertauschungen gewisser Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots$ definirt sind.

und hier stehen in jeder Horizontalreihe und ebenso in jeder Verticalreihe jedesmal die N Substitutionen unserer Gruppe, nur je in anderer Anordnung*).

Fassen wir nun gerade die verschiedenen Anordnungen der T_i in den einzelnen Horizontalreihen ins Auge, so können wir sie als Vertauschungen der „Symbole“ $1, T_2, T_3, \cdots, T_N$ auffassen, indem wir dabei von einer ersten, übrigens willkürlichen Anordnung ausgehen.

Die N Vertauschungen der Symbole T_i bilden dann eine Gruppe, die holoedrisch isomorph auf unsere gegebene Gruppe G bezogen ist; oder anders ausgedrückt: Es liegt uns in diesen Permutationen die gewünschte einfach transitive Form unserer Gruppe vor.

Der Beweis dieses Satzes beruht lediglich auf dem Umstande, dass die Operationen $1, T_2, T_3, \cdots, T_N$ *eine Gruppe bilden***). Jeder Substitution T_i entspricht nämlich der Uebergang von der ursprünglichen Anordnung

$$1, T_2, T_3, \cdots, T_N$$

der Substitutionen zu der *bestimmten* neuen Anordnung

$$T_i, T_2T_i, T_3T_i, \cdots, T_NT_i$$

also eine Substitution, die wir in bekannter Weise durch

$$\begin{pmatrix} 1, & T_2, & T_3, & \cdots, & T_N \\ T_i, & T_2T_i, & T_3T_i, & \cdots, & T_NT_i \end{pmatrix}$$

*) Es sei hier nochmals erwähnt, dass wir die *Aufeinanderfolge* der auf die Identität angewandten Operationen von links nach rechts schreiben. Dadurch wird unser obiges Schema vor dem in umgekehrter Anordnung geschriebenen:

$$\begin{array}{llll} 1 & T_2 & T_3 \cdots & T_N, \\ T_2 & T_2T_2 & T_2T_3 \cdots & T_2T_N, \\ T_3 & T_3T_2 & T_3T_3 \cdots & T_3T_N, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

bevorzugt, ein Umstand, der sich bei allen weiteren Darstellungen findet.

**) Man pflegt (vergl. Anm. auf pag. 84), wenn es sich darum handelt, eine *Gruppe von N Vertauschungen beliebiger Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots$* holoedrisch isomorph auf die zugehörige „reguläre, einfach transitive Gruppe“ zu beziehen, diese Ableitung mit Hülfe einer Function F der Elemente $x_1, x_2, \ldots$ zu bewerkstelligen, welche für jede Substitution der Gruppe ihren Werth ändert. Die Reihe der N verschiedenen Werthe $F_1, F_2, \ldots, F_N$ erleidet dann bei der Anwendung der Substitutionen zwischen den x_λ eben diejenigen Vertauschungen, welche wir oben durch die zugehörigen Substitutionen selbst gekennzeichnet haben. Der gleiche Uebergang ist der von der Gruppe der Monodromie einer beliebigen Riemann'schen Fläche zu der zugehörigen regulären Riemann'schen Fläche. Ich vermeide im Texte (ebenso wie in der Folge) absichtlich die Bezugnahme auf solche speciellere Formulirungen, *weil diese Sätze für Gruppen irgend welcher Art und Definition gelten* und also auch die Schlüsse sich lediglich auf gruppentheoretische Momente stützen müssen.

bezeichnen. Weiter ergiebt die Verbindung $(T_i T_k)$ zweier Substitutionen T_i, T_k, welche die Umstellungen

$$\begin{pmatrix} 1, & T_2, & T_3, & \cdots, & T_N \\ T_i, & T_2 T_i, & T_3 T_i, & \cdots, & T_N T_i \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1, & T_2, & T_3, & \cdots, & T_N \\ T_k, & T_2 T_k, & T_3 T_k, & \cdots, & T_N T_k \end{pmatrix}$$

bewirken, gerade die durch

$$\begin{pmatrix} 1, & T_2, & T_3, & \cdots, & T_N \\ T_i T_k, & T_2 T_i T_k, & T_3 T_i T_k, & \cdots, & T_N T_i T_k \end{pmatrix}$$

bezeichnete Substitution, welche ihr auch in dem obigen quadratischen Schema zukommmt.

Damit ist die Beziehung der beiden Gruppen aufeinander als eine holoedrisch isomorphe nachgewiesen, oder, wie wir uns ausdrücken wollen, die beiden Gruppen sind *als verschiedene Darstellungsformen* einer und derselben Gruppe gekennzeichnet.

Wir bezeichnen die obige einfach transitive Form der Gruppe kurz als die „reguläre Form" derselben.

Die Regularität findet dabei ihren Ausdruck darin, dass jedes der N Symbole $1, T_2, \cdots, T_N$, durch deren Umsetzungen die Gruppe G entsteht, bei jeder Substitution genau so umgesetzt wird, wie jedes andere; dass also insbesondere, wenn bei einer Substitution gewisse ν Symbole im Cyklus wandern, vermöge dieser Substitution die sämmtlichen N Symbole sich in Gruppen zu je ν anordnen, die sich unter einander cyklisch permutiren.

Diese Darstellungsform einer Gruppe wird den Ausgangspunkt für die folgenden Entwickelungen abgeben, in welchen wir die Anordnung unseres quadratischen Schema's unter der Voraussetzung studiren, dass in G gewisse Untergruppen enthalten sind.

§ 7.

Die in der regulären Form der Gruppe G enthaltenen Systeme der Nichtprimitivität.

Nehmen wir an, unsere Gruppe G der N Substitutionen

$$1, T_2, T_3, \cdots, T_N$$

enthalte eine Untergruppe G' von μ Substitutionen

$$1, S_2, S_3, \cdots, S_\mu$$

deren *specielle* Stellung zur Gesammtgruppe vorerst noch keinerlei Bedingungen unterworfen ist, so lassen sich bekanntlich die N Substi-

tutionen unserer Gruppe G „mit Bezug auf diese Untergruppe“ in der Form:

$1, S_2, S_3, \cdots, S_\mu \mid T_2, S_2 T_2, S_3 T_2, \cdots, S_\mu T_2 \mid \cdots \mid T_\nu, S_2 T_\nu, S_3 T_\nu, \cdots, S_\mu T_\nu$

schreiben, wo die Substitutionen $T_2, T_3, \cdots, T_\nu$ passend aus den Substitutionen der Gruppe G gewählt sind und übrigens $\mu\nu = N$ ist.

Dieser Schreibweise zufolge ergiebt sich jetzt die „reguläre Form“ unserer Gruppe in der umstehenden Gestalt (p. 88), die wir ausführlich mittheilen, weil wir uns in der Folge noch oft darauf zu beziehen haben. In jeder Horizontalreihe stehen, wie früher, die sämmtlichen Substitutionen unserer Gruppe. Betrachten wir diese wieder als Symbole einer Gruppe von Buchstabenvertauschungen, so zeigt jetzt die Schreibweise dieser Gruppe einen speciellen Charakter.

Das allgemeine in unserer Darstellung vorkommende Symbol ist:

$$S_a T_b S_c T_d,$$

in welchem durch die Indices a, b die *Verticalreihe*, durch die Indices c, d die *Horizontalreihe* bezeichnet ist, in welcher sich das Symbol befindet.

Dieses Symbol ist, wie soeben erwähnt, mit einem Symbol der ersten Horizontalreihe äquivalent und wir können, unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass es mit T_k äquivalent sei. Dann folgt aus der Gleichung

$$S_a T_b S_c T_d = T_k \tag{1}$$

unmittelbar die folgende Reihe von Beziehungen:

$$\begin{aligned} S_a T_b S_c T_d &= T_k, \\ S_2 S_a T_b S_c T_d &= S_2 T_k, \\ S_3 S_a T_b S_c T_d &= S_3 T_k, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_\mu S_a T_b S_c T_d &= S_\mu T_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Nun bilden, nach Voraussetzung, die Substitutionen S_i eine Gruppe und *daher sind die Substitutionen*

$$S_a, S_2 S_a, S_3 S_a, \cdots, S_\mu S_a$$

in einer gewissen, im allgemeinen nicht näher charakterisirbaren, Reihenfolge gleich den Substitutionen

$$1, S_2, S_3, \cdots, S_\mu.$$

Für die Art der Vertauschungen unserer Symbole heisst dies aber:

Geht das Symbol T_k in $S_a T_b S_c T_d$ über, so geht *gleichzeitig* die Gesammtheit der Symbole

$$T_k, S_2 T_k, S_3 T_k, \cdots, S_\mu T_k$$

bis auf die Reihenfolge über in die Gesammtheit der Symbole:

Schema II.

1	S_2	S_3	$\dots S_\mu$	T_2	S_2T_2	S_3T_2	$\dots S_\mu T_2$	$\dots$	T_ν	S_2T_ν	S_3T_ν	$\dots S_\mu T_\nu$
S_2	S_2S_2	S_3S_2	$\dots S_\mu S_2$	T_2S_2	$S_2T_2S_2$	$S_3T_2S_2$	$\dots S_\mu T_2S_2$	$\dots$	$T_\nu S_2$	$S_2T_\nu S_2$	$S_3T_\nu S_2$	$\dots S_\mu T_\nu S_2$
S_3	S_2S_3	S_3S_3	$\dots S_\mu S_3$	T_2S_3	$S_2T_2S_3$	$S_3T_2S_3$	$\dots S_\mu T_2S_3$	$\dots$	$T_\nu S_3$	$S_2T_\nu S_3$	$S_3T_\nu S_3$	$\dots S_\mu T_\nu S_3$
....	....	....	....	....	....	....	....	$\dots$	....	....	....	....
S_μ	S_2S_μ	S_3S_μ	$\dots S_\mu S_\mu$	T_2S_μ	$S_2T_2S_\mu$	$S_3T_2S_\mu$	$\dots S_\mu T_2S_\mu$	$\dots$	$T_\nu S_\mu$	$S_2T_\nu S_\mu$	$S_3T_\nu S_\mu$	$\dots S_\mu T_\nu S_\mu$
T_2	S_2T_2	S_3T_2	$\dots S_\mu T_2$	T_2T_2	$S_2T_2T_2$	$S_3T_2T_2$	$\dots S_\mu T_2T_2$	$\dots$	$T_\nu T_2$	$S_2T_\nu T_2$	$S_3T_\nu T_2$	$\dots S_\mu T_\nu T_2$
S_2T_2	$S_2S_2T_2$	$S_3S_2T_2$	$\dots S_\mu S_2T_2$	$T_2S_2T_2$	$S_2T_2S_2T_2$	$S_3T_2S_2T_2$	$\dots S_\mu T_2S_2T_2$	$\dots$	$T_\nu S_2T_2$	$S_2T_\nu S_2T_2$	$S_3T_\nu S_2T_2$	$\dots S_\mu T_\nu S_2T_2$
S_3T_2	$S_2S_3T_2$	$S_3S_3T_2$	$\dots S_\mu S_3T_2$	$T_2S_3T_2$	$S_2T_2S_3T_2$	$S_3T_2S_3T_2$	$\dots S_\mu T_2S_3T_2$	$\dots$	$T_\nu S_3T_2$	$S_2T_\nu S_3T_2$	$S_3T_\nu S_3T_2$	$\dots S_\mu T\ S_3T_2$
....	....	....	....	....	....	....	....	$\dots$	....	....	....	....
$S_\mu T_2$	$S_2S_\mu T_2$	$S_3S_\mu T_2$	$\dots S_\mu S_\mu T_2$	$T_2S_\mu T_2$	$S_2T_2S_\mu T_2$	$S_3T_2S_\mu T_2$	$\dots S_\mu T_2S_\mu T_2$	$\dots$	$T_\nu S_\mu T_2$	$S_2T_\nu S_\mu T_2$	$S_3T_\nu S_\mu T_2$	$\dots S_\mu T_\nu S_\mu T_2$
....	....	....	....	....	....	....	....	$\dots$	....	....	....	....
T_ν	S_2T_ν	S_3T_ν	$\dots S_\mu T_\nu$	T_2T_ν	$S_2T_2T_\nu$	$S_3T_2T_\nu$	$\dots S_\mu T_2T_\nu$	$\dots$	$T_\nu T_\nu$	$S_2T_\nu T_\nu$	$S_3T_\nu T_\nu$	$\dots S_\mu T_\nu T_\nu$
S_2T_ν	$S_2S_2T_\nu$	$S_3S_2T_\nu$	$\dots S_\mu S_2T_\nu$	$T_2S_2T_\nu$	$S_2T_2S_2T_\nu$	$S_3T_2S_2T_\nu$	$\dots S_\mu T_2S_2T_\nu$	$\dots$	$T_\nu S_2T_\nu$	$S_2T_\nu S_2T_\nu$	$S_3T_\nu S_2T_\nu$	$\dots S_\mu T_\nu S_2T_\nu$
S_3T_ν	$S_2S_3T_\nu$	$S_3S_3T_\nu$	$\dots S_\mu S_3T_\nu$	$T_2S_3T_\nu$	$S_2T_2S_3T_\nu$	$S_3T_2S_3T_\nu$	$\dots S_\mu T_2S_3T_\nu$	$\dots$	$T_\nu S_3T_\nu$	$S_2T_\nu S_3T_\nu$	$S_3T_\nu S_3T_\nu$	$\dots S_\mu T_\nu S_3T_\nu$
....	....	....	....	....	....	....	....	$\dots$	....	....	....	....
$S_\mu T_\nu$	$S_2S_\mu T_\nu$	$S_3S_\mu T_\nu$	$\dots S_\mu S_\mu T_\nu$	$T_2S_\mu T_\nu$	$S_2T_2S_\mu T_\nu$	$S_3T_2S_\mu T_\nu$	$\dots S_\mu T_2S_\mu T_\nu$	$\dots$	$T_\nu S_\mu T_\nu$	$S_2T_\nu S_\mu T_\nu$	$S_3T_\nu S_\mu T_\nu$	$\dots S_\mu T_\nu S_\mu T_\nu$

$$T_b S_c T_d,\ S_2 T_b S_c T_d,\ S_3 T_b S_c T_d,\ \cdots,\ S_\mu T_b S_c T_d.$$

Also:

1. ***Unter der Annahme, dass unsere Gruppe G von der Ordnung $N = \mu \cdot \nu$ eine Untergruppe G' von der Ordnung μ besitzt, erscheint die reguläre Form der Gruppe „imprimitiv", d. h. die Symbole, deren Vertauschung die Gruppe charakterisirt, können derart in Systeme von je μ Symbolen angeordnet werden, dass alle Vertauschungen der Gruppe sich ausführen lassen dadurch, dass wir nur Systemvertauschungen, verbunden mit gewissen Vertauschungen innerhalb der Systeme vornehmen**).***

Beachten wir noch, dass die Anordnung der ersten Zeile unseres Schema's II *mit Bezug auf die Untergruppe* $1, S_2, \cdots, S_\mu$, bis auf Umstellungen der Substitutionen S_i untereinander, und bis auf Umstellungen der hieraus abgeleiteten Systeme $T_k, S_2 T_k, \cdots, S_\mu T_k$ in ihrer Totalität, *eine völlig bestimmte* ist, so können wir auch sagen:

2. ***Mit Bezug auf jede in G enthaltene Untergruppe G' lassen sich in der regulären Form der Gruppe die Symbole jedesmal auf eine und nur eine Weise zu Systemen der Imprimitivität anordnen.***

Aber auch die Umkehrung gilt:

3. ***Jeder Anordnung der Symbole der in regulärer Form geschriebenen Gruppe zu Systemen der Imprimitivität entspricht eine Untergruppe der gegebenen Gruppe.***

In der That, gehen wir zurück auf das allgemeine Schema I pag. 84, in das wir jede Gruppe schreiben können und nehmen an, es lassen sich hier Systeme von je μ Symbolen abtheilen, die durch die Vertauschungen der Gruppe nur in ihrer Gesammtheit umgeändert werden, etwa die Abtheilungen:

$$\begin{array}{lllll}
1, & T_2, & T_3, & \cdots, & T_\mu, \\
T_{\mu+1}, & T_{\mu+2}, & T_{\mu+3}, & \cdots, & T_{2\mu}, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
T_{(\nu-1)\mu+1}, & T_{(\nu-1)\mu+2}, & T_{(\nu-3)\mu+1}, & \cdots, & T_\mu T_\nu,
\end{array}$$

so folgt ein reguläres Schema:

$$\begin{array}{llll|lll}
1, & T_2, & T_3, & \ldots, T_\mu & T_{\mu+1}, & T_{\mu+2}, & \ldots \\
T_2, & T_2 T_2, & T_3 T_2, & \ldots, T_\mu T_2 & T_{\mu+1} T_2, & T_{\mu+2} T_2, & \ldots \\
T_3, & T_2 T_3, & T_3 T_3, & \ldots, T_\mu T_3 & T_{\mu+1} T_3, & T_{\mu+2} T_3, & \ldots \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\
T_\mu, & T_2 T_\mu, & T_3 T_\mu, & \ldots, T_\mu T_\mu & T_{\mu+1} T_\mu, & T_{\mu+2} T_\mu, & \ldots \\
\hline
T_{\mu+1} & T_2 T_{\mu+1}, & T_3 T_{\mu+1}, & \ldots, T_\mu T_{\mu+2} & T_{\mu+1} T_{\mu+1}, & T_{\mu+2} T_{\mu+1}, & \ldots \\
T_{\mu+2} & T_2 T_{\mu+2}, & T_3 T_{\mu+2}, & \ldots, T_\mu T_{\mu+2} & T_{\mu+1} T_{\mu+2}, & T_{\mu+2} T_{\mu+2}, & \ldots \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot
\end{array}$$

*) Die Imprimitivität der regulären einfach transitiven Gruppe mit Bezug auf jede Untergruppe ist am Beispiele der Galois'schen Gleichungen bekannt. Man

von dem wir nur das erste Quadrat zu betrachten brauchen. Da die Symbole $1, T_2, T_3, \cdots, T_\mu$ nur in ihrer Gesammtheit vertauscht werden sollen, folgt, dass in diesem Quadrate die Horizontalreihen alle bis auf die Reihenfolge ihrer Glieder mit der obersten übereinstimmen, d. h. dass für die Substitutionen $1, T_2, T_3, \cdots, T_\mu$ die Beziehungen statthaben

$$T_i T_k = T_l$$

das heisst aber lediglich: *Die Substitutionen* $1, T_2, T_3, \cdots, T_\mu$ *bilden eine Gruppe. Dann lässt sich aber sofort „mit Bezug auf diese Untergruppe", wie wir uns nun auch ausdrücken können „das ganze Schema in imprimitiver Form schreiben" und zwar von den obengenannten unwesentlichen Modificationen abgesehen nur auf eine Weise.*

§ 8.

Uebergang von der regulären Form der Gruppe G zu der Form einer Gruppe von Vertauschungen von ν Symbolen.*)

Die im vorigen Paragraphen gegebene Schreibweise einer Gruppe G von der Ordnung N in imprimitiver Form mit Bezug auf die Untergruppe G' der Substitutionen $1, S_2, S_3, \cdots, S_\mu$ vermittelt nun sofort die Darstellungsform unserer Gruppe, in welcher sie durch Vertauschungen von ν Symbolen wo $\mu \cdot \nu = N$ ist, geschrieben erscheint.

Wir wollen die einzelnen Systeme der Imprimitivität, in die wir die Substitutionen unserer Gruppe geordnet haben, symbolisch bezeichnen, und zwar:

$$\begin{array}{lll} 1, \quad S_2, \quad S_3, \quad \ldots, S_\mu & \text{durch} & \mathsf{T}_1, \\ T_2, S_2T_2, S_3T_2, \ldots, S_\mu T_2 & \text{durch} & \mathsf{T}_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\ T_\nu, S_2T_\nu, S_3T_\nu, \ldots, S_\mu T_\nu & \text{durch} & \mathsf{T}_\nu. \end{array}$$

Achten wir dann in unserer vorigen Darstellung (Schema II, pag. 88) nur darauf, wie vermöge unserer Substitutionen diese einzelnen Systeme T_k untereinander permutirt werden (ohne die Vertauschungen der innerhalb eines jeden Systemes T_k stehenden Symbole $S_i T_k$ dabei ins Auge zu fassen) so können wir diese Vertauschungen durch die entsprechenden Vertauschungen der

$$\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \ldots, \mathsf{T}_\nu$$

kurz angeben, *und haben damit in den Vertauschungen dieser* ν *Symbole eine Gruppe, die isomorph auf die vorhergehende bezogen ist.*

---

vergl. z. B. Netto, a. a. O. 2. Abschnitt, 11. Capitel. Uebrigens sei dabe auf die Ausführungen des § 9 der vorliegenden Abhandlung und die in § 13 gegebenen Beispiele verwiesen.

*) Man vergleiche hierzu den schon oben citirten Aufsatz von Capelli.

Und nun können wir weiter den Satz aussprechen:

Die isomorphe Beziehung unserer beiden Gruppen ist dann und nur dann eine holoedrisch isomorphe, wenn die Gruppe G', vermöge deren wir die Gruppe der Vertauschungen der Symbole $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ *aus der ursprünglichen Gruppe G abgeleitet haben, weder in G ausgezeichnet enthalten ist, noch auch ihrerseits eine in G ausgezeichnete Untergruppe G'' enthält.*

Existirt nämlich eine solche Untergruppe G'' von G', welche in G (und sonach auch in G') als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist, so bleiben bei den Substitutionen dieser Untergruppe G'' die *sämmtlichen* Symbole $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ *ungeändert;* es ist also diesen Substitutionen der Gruppe G die identische Substitution der Gruppe der Vertauschungen der T_k zugeordnet und die Beziehung beider Gruppen daher eine meriedrisch isomorphe. Das Analoge tritt ein, wenn G' selbst in G ausgezeichnet enthalten ist.

Andernfalls aber entspricht jeder Substitution der Gruppe G eine und nur eine bestimmte Vertauschung der Symbole T_k und *die Gruppe dieser letzteren ist daher, in unserer Auffassung mit der Gruppe G identisch und nur eine andere „Darstellungsform" derselben.*

So haben wir den allgemeinen auf die Darstellung einer Gruppe G in Form von Buchstabenvertauschungen bezüglichen Satz:

Jeder Untergruppe G' von μ Substitutionen, die nicht ausgezeichnet in G enthalten ist, noch auch eine in G ausgezeichnete Untergruppe G'' enthält, entspricht eine Darstellung der Gruppe durch gewisse Vertauschungen von ν Symbolen, wo $\mu \cdot \nu = N$ ist.

Die Darstellung läuft der „imprimitiven Schreibweise der regulären Form der Gruppe G mit Bezug auf die Untergruppe G''" parallel, sie ist aber an die eben genannten Bedingungen bezüglich der Gruppe G' geknüpft, während, wie dies noch hervorgehoben sein mag, die imprimitive Schreibweise für die reguläre Form möglich ist, gleichviel, ob G' in G ausgezeichnet enthalten ist oder nicht, oder ob eine Gruppe G'' dieser Eigenschaft in G' existirt.

Aber auch umgekehrt kann man sagen:

Wenn eine Gruppe sich durch gewisse Vertauschungen von ν Symbolen $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ *transitiv schreiben lässt, so entspricht diese Schreibweise einer in dieser Gruppe enthaltenen Untergruppe G' von μ Substitutionen, wo $\mu \cdot \nu = N$ ist.*

Es giebt nämlich, wie bekannt, in einer transitiven, auf ν Symbole bezüglichen Gruppe der Ordnung $N = \mu \cdot \nu$ gerade μ Substitutionen, welche eines der ν Symbole, etwa das Symbol T_1 ungeändert lassen. *Diese μ Substitutionen — sie seien durch* $1, S_2, S_3, \ldots, S_\mu$ *bezeichnet — bilden nun die gemeinte Untergruppe G'.* Sind nämlich $1, T_2, T_3, \ldots, T_\nu$ Substitutionen unserer Gruppe, welche jenes erste Symbol T_1 beziehungs-

weise in $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_\nu$ übergehen lassen, so ist die Gesammtheit der Substitutionen durch unser nunmehr oft geschriebenes Schema

$$1, S_2, S_3, \ldots, S_\mu \mid T_2, S_2T_2, \ldots, S_\mu T_2 \mid \ldots \mid T_\nu, S_2T_\nu, \ldots, S_\mu T_\nu$$

dargestellt. Dieses aber bezeichnet als erste Zeile für die reguläre Darstellungsform unserer Gruppe die Abtheilung der Systeme der Imprimitivität mit Bezug auf die Untergruppe der $1, S_2, S_3, \ldots, S_\mu$.

Wir bemerken sofort, dass wir zu einer nur durch die Bezeichnung verschiedenen, im Wesen aber absolut identischen Darstellung geführt werden, wenn wir von einer der mit der Untergruppe G' *gleichberechtigten* Untergruppen ausgehen, deren jede dadurch charakterisirt ist, dass sie ein bestimmtes der Symbole T_k ungeändert lässt.

§ 9.

Die in der allgemeinen Darstellungsform einer Gruppe durch Buchstabenvertauschungen enthaltenen Systeme der Imprimitivität.

Aus unserer eben vorgeführten Ableitung der Darstellung einer Gruppe G durch Vertauschung von ν Buchstaben ergiebt sich nun die Frage, wann diese Darstellung ihrerseits wieder imprimitiv ist, auf die einfachste Weise.

Wir nehmen an, eine Gruppe G von $N = \lambda \cdot \mu \cdot \nu$ Substitutionen besitze eine Untergruppe G' von $\lambda \cdot \mu$ Substitutionen und diese ihrerseits wieder eine Untergruppe G'' von λ Substitutionen.

Dann lassen sich unsere $\lambda\mu\nu$ Substitutionen in der folgenden Anordnung schreiben:

Schema III.

$$\begin{array}{lllll}
\| 1, & R_2, & R_3, & \ldots, & R_\lambda \mid \\
\mid S_2, & R_2S_2, & R_3S_2, & \ldots, & R_\lambda S_2 \mid \\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\
\mid S_\mu, & R_2S_\mu, & R_3S_\mu, & \ldots, & R_\lambda S_\mu \| \\
\| T_2, & R_2T_2, & R_3T_2, & \ldots, & R_\lambda T_2 \mid \\
\mid S_2T_2, & R_2S_2T_2, & R_3S_2T_2, & \ldots, & R_\lambda S_2T_2 \mid \\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\
\mid S_\mu T_2, & R_2S_\mu T_2, & R_3S_\mu T_2, & \ldots, & R_\lambda S_\mu T_2 \| \\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\
\| T_\nu, & R_2T_\nu, & R_3T_\nu, & \ldots, & R_\lambda T_\nu \mid \\
\mid S_2T_\nu, & R_2S_2T_\nu, & R_3S_2T_\nu, & \ldots, & R_\lambda S_\mu T_\nu \mid \\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\
\mid S_\mu T_\nu, & R_2S_\mu T_\nu, & R_3S_\mu T_\nu, & \ldots, & R_\lambda S_\mu T_\nu \| .
\end{array}$$

Dabei bilden die Substitutionen R_α die Gruppe G'', die Substitutionen

$R_a S_b$ die Gruppe G', während das Symbol für eine beliebige Substitution der Gruppe G durch $R_a S_b T_c$ gegeben ist. Fassen wir diese Reihenfolge der Substitutionen wieder als erste Zeile eines quadratischen Schema's auf, so ergiebt sich hieraus in analoger Weise wie früher in Schema I und II sofort die reguläre Darstellung unserer Gruppe. Das allgemeine Symbol derselben ist

$$R_a S_b T_c R_{a'} S_{b'} T_{c'}$$

wo die Indices a, b, c die Verticalreihe, die Indices a', b', c' die Horizontalreihe charakterisiren, in welcher das Symbol steht. — Beachten wir nun aber, dass die Gruppe G'' der Substitutionen R_a Untergruppe in G' und Untergruppe in G selbst ist, und dass die Gruppe G' der Substitutionen $R_a S_b$ Untergruppe in G ist, so erhalten wir sofort nach § 11 für dieses quadratische Schema:

1. Es ist imprimitiv geschrieben mit Bezug auf die Untergruppe G'', und besitzt als solches $\mu\nu$ Systeme der Imprimitivität.
2. Es ist auch imprimitiv geschrieben mit Bezug auf die Untergruppe G' und besitzt ν diesbezügliche Systeme der Imprimitivität.
3. Die Untergruppe G' erscheint in dem Schema gleichfalls mit Bezug auf die Untergruppe G'' imprimitiv geschrieben.

Nehmen wir nun an, die Gruppe G'' sei weder ausgezeichnet in G enthalten, noch auch existire in G'' eine Untergruppe, die in G ausgezeichnet ist, so lässt sich nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen mit Bezug auf diese Gruppe G'' von der Ordnung λ unsere Gruppe G durch Vertauschungen von $\mu \cdot \nu$ Symbolen schreiben. Wir bezeichnen zu dem Ende das System

$$S_b T_c,\ R_2 S_b T_c,\ R_3 S_b T_c,\ \ldots,\ R_\lambda S_b T_c$$

in Schema III kurz mit

$$\mathsf{T}_{bc}$$

und achten auf die Vertauschungen dieser Symbole.

Diese $\mu\nu$ Symbole T_{bc} lassen sich nun aber mit Bezug auf die Untergruppe G' zu ν Systemen anordnen, wie folgt (vgl. Schema III):

$$\| \mathsf{T}_{11} \mid \mathsf{T}_{21} \mid \cdots \mid \mathsf{T}_{\mu 1} \|,$$
$$\| \mathsf{T}_{12} \mid \mathsf{T}_{22} \mid \cdots \mid \mathsf{T}_{\mu 2} \|,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\| \mathsf{T}_{1\nu} \mid \mathsf{T}_{2\nu} \mid \cdots \mid \mathsf{T}_{\mu\nu} \|.$$

Diese ν Systeme stellen jetzt, wie dies unmittelbar aus den oben ausgesprochenen Sätzen über die Vertauschungen der Symbole des Schema's III folgt, *Systeme der Imprimitivität* für die durch die Vertauschungen der T_{bc} gegebene Darstellungsform unserer Gruppe dar.

So folgt der allgemeine Satz, welcher die Bedeutung der „*imprimitiven Form*" einer Gruppe klarlegt:

*Lässt sich eine Gruppe G der Ordnung $\lambda\,\mu\,\nu$ mit Bezug auf eine Gruppe G'' der Ordnung λ darstellen durch Vertauschungen von $\mu\,\nu$ Symbolen $T_{b c}$ [wobei die Möglichkeit einer solchen Darstellung die mehrgenannten Bedingungen für die Stellung der Gruppe G'' zu G in sich schliesst], so ist diese Darstellung imprimitiv mit Bezug auf jede Gruppe G' der Ordnung $\lambda\mu$, welche in G enthalten ist und die Gruppe G'' umfasst.**)

Eine solche Darstellung ist also dann und nur dann primitiv, wenn die Gruppe G'' eine „Maximaluntergruppe" ist, d. h. wenn keine Untergruppe G' in G existirt, welche G'' umfasst.

Zur weiteren Charakteristik der verschiedenen in einander eingeschalteten Systeme der Imprimitivität mag noch bemerkt sein, dass falls die Gruppe G' nicht ausgezeichnet in G enthalten ist, noch eine in G ausgezeichnete Untergruppe enthält, die Gruppe G auch durch die Vertauschungen von ν Symbolen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\nu$ geschrieben werden kann, welche wir zur Bezeichnung beziehungsweise der Systeme:

$$\begin{array}{l} \| T_{11}\ T_{21}\ \ldots\ T_{\mu 1} \|, \\ \| T_{12}\ T_{22}\ \ldots\ T_{\mu 2} \|, \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \| T_{1\nu}\ T_{2\nu}\ \ldots\ T_{\mu\nu} \| \end{array}$$

wählen.

Ferner ist, falls G'' nicht ausgezeichnet in G' ist, noch eine in G' ausgezeichnete Untergruppe enthält, durch die Vertauschungen der Symbole

---

*) Danach ist der bei Netto, a. a. O. § 85, pag. 94 befindliche Satz: „Jede imprimitive Gruppe ist zusammengesetzt" abzuändern. Herr Professor Netto hatte auf meine Anfrage die Güte, mir die Correctur des betreffenden Satzes zur Veröffentlichung mitzutheilen, wie sie sich aus dem Umstande ergiebt, dass für eine imprimitive Gruppe G die in § 77 des Netto'schen Werkes mitgetheilte Untergruppe G_1, derjenigen Substitutionen, welche nur Elemente innerhalb der einzelnen Systeme versetzen, ohne doch die Systeme selbst zu permutiren (welche Untergruppe ersichtlich in G ausgezeichnet enthalten ist), sich unbeschadet der Imprimitivität der Gruppe, auf die identische Substitution reduciren kann. Der genannte Satz ist also zu ergänzen:

Eine imprimitive Gruppe ist jedenfalls zusammengesetzt, wenn sie Substitutionen enthält, welche nur Elemente innerhalb der einzelnen Systeme der Imprimitivität vertauschen, ohne die Systeme selbst zu vertauschen.

In unserer obigen Bezeichnung hat das letztere statt, wenn die Gruppe G in G ausgezeichnet enthalten ist oder eine in G ausgezeichnete Untergruppe enthält. Diese ausgezeichnete Untergruppe ist dann geradezu identisch mit G_1, insoferne nach den Erörterungen auf pag. 91 durch die Substitutionen eben dieser Gruppe keine Vertauschungen der Systeme

$\Theta_1 = | T_{11}, T_{21}, \ldots, T_{\mu 1} |$, $\Theta_2 = | T_{12}, T_{22}, \ldots, T_{\mu 2} |, \ldots, \Theta_\nu = | T_{1\nu}, T_{2\nu}, \ldots, T_{\mu\nu} |$

(vergl. die oben eingeführte Bezeichnung) hervorgerufen werden.

$$\mathsf{T}_{11}\ \mathsf{T}_{21}\ \ldots\ \mathsf{T}_{\mu 1}$$

die Gruppe G' charakterisirt.

Analog wie in § 7 (pag. 89) lässt sich auch der jetzt (pag. 94) gegebene Satz wieder dahin umkehren, *dass wir aus der imprimitiven Form einer mit Bezug auf eine Untergruppe G'' (der Ordnung λ) durch die Vertauschungen von $\mu\,\nu$ Symbolen geschriebenen Gruppe G (der Ordnung $\lambda\,\mu\,\nu$) auf das Vorhandensein einer G'' umfassenden Untergruppe G' von G schliessen können.*

Diese Gruppe G' ist dabei von denjenigen Substitutionen von G gebildet, welche die Symbole $\mathsf{T}_{11}, \mathsf{T}_{21}, \ldots, \mathsf{T}_{\mu 1}$ (in der auf G'' bezüglichen Darstellung der Gruppe) in ihrer Totalität ungeändert lassen, während (wie schon oben angeführt) G'' aus den Substitutionen besteht, welche T_{11} individuell festlassen.

Es mag bezüglich dieser Darstellung noch auf die Beispiele des § 13 verwiesen sein.

§ 10.

Specielle Fälle der Imprimitivität.

Haben wir in § 7 erkannt, dass *jede Untergruppe G'* einer Gruppe G mindestens in der regulären Form derselben zu einer *imprimitiven Schreibweise* der Gruppe führt, so sei noch kurz erwähnt, in welcher Weise sich eine specielle Stellung der Untergruppe G' zur Gruppe G in dieser imprimitiven Form ausprägt.

Wir greifen wieder zurück auf die durch Schema II pag. 88 gegebene Darstellung der Gruppe in regulärer Form. Es seien:

$$1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_\mu$$

die Substitutionen von G' und weiter sei durch

$$\begin{array}{lllll}
1, & S_2, & S_3, & \ldots, & S_\mu, \\
T_2, & S_2 T_2, & S_3 T_2, & \ldots, & S_\mu T_2, \\
. & . & . & . & . \\
T_\nu, & S_2 T_\nu, & S_3 T_\nu, & \ldots, & S_\mu T_\nu
\end{array}$$

die Gesammtheit der Substitutionen von G bezeichnet, wo die $T_2, \ldots, T_\nu$ passend aus der Gruppe G gewählt sind.

Wir wollen nun nicht bloss mehr auf die Umstellungen achten, wie sie in den Horizontalreihen unseres Schema's II statthaben, sondern auch auf die Umstellungen für die Verticalreihen.

1. *Im allgemeinen Falle*, in welchem die Untergruppe der Substitutionen S keine weitere Beziehung zur Hauptgruppe aufweist und auch die Substitutionen $1, T_2, T_3, \ldots, T_\nu$ keine besondere Bedingung erfüllen, lässt sich dann ausser der oben charakterisirten Imprimitivität der Gruppe G *kein* weiterer Schluss auf die Art der Ver-

tauschungen in den Horizontal- und Verticalreihen unseres quadratischen Schema's machen.

2. *Wir nehmen an, die Gruppe G' ist in G ausgezeichnet enthalten.* Fassen wir dann zunächst in Schema II (pag. 88) eines der zu oberst stehenden Quadrate ins Auge, etwa repräsentirt durch:

$$\begin{array}{lllll} T_\pi & S_2 T_\pi & S_3 T_\pi & \ldots & S_\mu T_\pi, \\ T_\pi S_2 & S_2 T_\pi S_2 & S_3 T_\pi S_2 & \ldots & S_\mu T_\pi S_2, \\ T_\pi S_3 & S_2 T_\pi S_3 & S_3 T_\pi S_3 & \ldots & S_\mu T_\pi S_3, \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ T_\pi S_\mu & S_2 T_\pi S_\mu & S_3 T_\pi S_\mu & \ldots & S_\mu T_\pi S_\mu, \end{array}$$

so folgt sofort aus unserer Annahme, dass die erste Verticalreihe dieses Quadrats bis auf die Reihenfolge der Glieder mit der ersten Horizontalreihe übereinstimmt, und also, nach schon früher (pag. 18) angewandter Schlussweise, *auch die sämmtlichen Horizontalreihen dieses Quadrates wieder bis auf die Reihenfolge mit der obersten identisch sind.* Das gleiche gilt von jedem der Quadrate des Schema's II mit Bezug auf seine erste Horizontalreihe. Daraus folgt nun, *dass bei den Substitutionen unserer Gruppe diese Quadrate in ihrer Totalität mit einander permutirt werden.*

Nehmen wir nun aber weiter an, dass die Substitution $S_\lambda T_i T_k$, die in einem der Quadrate des Schema's in der ersten Horizontalreihe steht, identisch ist mit der Substitution $S_\nu T_\pi$ der obersten Reihe, so folgern wir sofort, *dass die Verticalreihe*

$$\left.\begin{array}{l} S_\lambda T_i T_k \\ S_\lambda T_i S_2 T_k \\ S_\lambda T_i S_3 T_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_\lambda T_i S_\mu T_k \end{array}\right\} \textit{ mit der Verticalreihe } \left\{\begin{array}{l} S_\nu T_\pi \\ S_\nu T_\pi S_2 \\ S_\nu T_\pi S_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_\nu T_\pi S_\mu \end{array}\right.$$

bis auf die Reihenfolge identisch ist.

Sonach unterscheidet sich die Anordnung der Symbole innerhalb zweier in ihrer Gesammtheit übereinstimmender Quadrate des Schema's II nur dadurch, dass gewisse Umstellungen der Horizontalreihen in ihrer Totalität vorgenommen worden sind und ebenso gewisse Umstellungen der Verticalreihen in ihrer Totalität.

Damit ist die Anordnung des Schema's II für unseren speciellen Fall charakterisirt und es mag nur noch auf das in § 13 gegebene Beispiel einer solchen Anordnung hingewiesen sein.

In Analogie mit früheren Ueberlegungen lässt sich nun auch umgekehrt aus der eben gekennzeichneten speciellen Anordnung des Schema's II *der Rückschluss auf die ausgezeichnete Stellung der Untergruppe G' in G machen.*

3. Die Annahme, dass die Substitutionen $1, T_2, T_3, \ldots, T_\nu$ für sich eine Gruppe bilden (während die Gruppe G' der Substitutionen $1, S_2, S_3, \ldots, S_\mu$ zunächst keiner besonderen Bedingung unterworfen sei) ergiebt für die Anordnung des Schema's II die Folgerung, dass die *ersten* Horizontalreihen eines jeden Quadrates *ohne Umstellungen innerhalb* in einander übergehen.

Jede Substitution $T_i T_k$ ist nämlich dann mit einer Substitution T_π äquivalent und dann stimmt die Horizontalreihe:

$$T_i T_k,\ S_2 T_i T_k,\ S_3 T_i T_k,\ \ldots,\ S_\mu T_i T_k$$

mit der anderen

$$T_\pi,\quad S_2 T_\pi,\quad S_3 T_\pi,\quad \ldots,\ S_\mu T_\pi$$

völlig überein.

4. Nehmen wir nun zur Voraussetzung 3 noch die in 2 gemachte Annahme der ausgezeichneten Stellung von G' in G hinzu, so folgt zunächst, dass wieder die einzelnen Horizontalreihen eines jeden Quadrates bis auf die Reihenfolge ihrer Symbole mit der ersten Horizontalreihe des Quadrates übereinstimmen. Zwei Quadrate aber, die in ihrer Totalität sich decken, haben jetzt auch bezüglich der *Anordnung* der Symbole *identische* erste Horizontalreihen. Durch die Symbole der ersten Horizontalreihen beider Quadrate sind nun aber (nach den Ausführungen unter 2) die zugehörigen Verticalreihen, jede in ihrer Totalität bestimmt. Diese haben also im jetzigen Falle *keine* Umstellungen erlitten *und die beiden Quadrate unterscheiden sich sonach lediglich durch gewisse Umstellungen ganzer Horizontalreihen.*

5. Nehmen wir endlich an, die Gruppe der Substitutionen $1, T_2, T_3, \ldots, T_\nu$ sei ebenso wie die der Substitutionen $1, S_2, S_3, \ldots, S_\nu$ in G ausgezeichnet enthalten, so folgt zunächst, aus den nunmehr statthabenden Relationen:

$$T_b^{-1} S_a T_b = S_c \quad \text{und} \quad S_a T_b S_a^{-1} = T_d$$

die Beziehung:

$$T_b^{-1} T_d = T_b^{-1} S_a T_b S_a^{-1} = S_c S_a^{-1}.$$

Nun haben aber die Gruppen der T_i und der S_k *ausser der identischen Substitution keine Substitution gemeinsam*, daher ist

$$T_b^{-1} T_d = S_c S_a^{-1} = 1$$

oder

$$T_b = T_d,\quad S_c = S_a,$$

wonach aus den obigen Relationen folgt:

$$S_a T_b = T_b S_a,$$

die Substitutionen $1, T_2, T_3, \ldots, T_\nu$ *sind einzeln mit den Substitutionen* $1, S_2, S_3, \ldots, S_\mu$ *vertauschbar.*

Sonach lassen sich die einzelnen Quadrate des Schema's II in der Form schreiben:

$$\begin{array}{lllll} T_iT_k & T_iT_kS_2 & T_iT_kS_3 & \ldots & T_iT_kS_\mu, \\ T_iT_kS_2 & T_iT_kS_2S_2 & T_iT_kS_3S_2 & \ldots & T_iT_kS_\mu S_2, \\ T_iT_kS_3 & T_iT_kS_2S_3 & T_iT_kS_3S_3 & \ldots & T_iT_kS_\mu S_3, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_iT_kS_\mu & T_iT_kS_2S_\mu & T_iT_kS_3S_\mu & \ldots & T_iT_kS_\mu S_\mu \end{array}$$

und der Vergleich der hier vorliegenden Umstellungen der Symbole der ersten Horizontalreihe dieses Quadrats mit den Umstellungen, wie sie die Symbole $1, S_2, S_3, \ldots, S_\mu$ im ersten Quadrate:

$$\begin{array}{lllll} 1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_\mu, \\ S_2 & S_2S_2 & S_3S_2 & \ldots & S_\mu S_2, \\ S_3 & S_2S_3 & S_3S_3 & \ldots & S_\mu S_3, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_\mu & S_2S_\mu & S_3S_\mu & \ldots & S_\mu S_\mu \end{array}$$

erleiden, zeigt, *dass diese Umordnungen (bis auf die Bezeichnung der Symbole) identisch sind.*

Danach schliessen wir sofort, dass zwei Quadrate unseres Schema's, die in ihrer Gesammtheit übereinstimmen, jetzt auch bezüglich der *Anordnung* ihrer Symbole *identisch* sind. In diesem speciellen Falle charakterisirt also das obige Quadrat für die Gruppe der S_i die *Umstellungen der Symbole innerhalb der sämmtlichen Quadrate*, während die ausgezeichnete Untergruppe der Substitutionen T_π in den *Umstellungen der Quadrate, die jetzt mit keiner Aenderung innerhalb mehr verbunden ist*, zur Geltung kommt.

Die in § 13 gegebenen Beispiele mögen diese Entwicklungen noch unmittelbar zur Anschauung bringen.

Wir formuliren noch die Umkehrung aller unserer Sätze, dass nämlich aus den in Nr. 1—5 abgeleiteten speciellen Anordnungen des Schema's II unmittelbar der Rückschluss auf die betreffenden gruppentheoretischen Eigenschaften von G gemacht werden kann.

§ 11.

Bestimmung der Gruppen, welche niemals und derjenigen, welche nur in der regulären Form imprimitiv geschrieben werden können.

Nachdem sich durch die Darlegungen des vorigen Paragraphen die „imprimitive Form“ einer Gruppe lediglich als Charakteristicum gewisser in der Gruppe enthaltener Untergruppen erwiesen hat, sei kurz die Frage discutirt,

(I) nach denjenigen Gruppen, die überhaupt nicht und

(II) nach denjenigen, die nur in der regulären Form imprimitiv geschrieben werden können.

I. *Die ersteren Gruppen* dürfen gar keine Untergruppen enthalten und *fallen also ersichtlich mit den cyklischen Gruppen von Primzahlordnung zusammen.*

II. Um die Gruppen zweiter Art aufzuzählen, machen wir folgende Unterscheidungen:

1. Wir nehmen an, die Gruppe G enthalte *wenigstens eine* Substitution S von der Ordnung s, von der Eigenschaft, dass die aus dieser Substitution und ihren successiven Potenzen gebildete cyklische Gruppe G_s mit allen Substitutionen von G vertauschbar ist, d. h. *dass G_s in G ausgezeichnet enthalten ist.*

a) Sind nun mit diesen Potenzen von S die Substitutionen der Gruppe G erschöpft, so fällt die Gruppe unter die Categorie I oder II, je nachdem die Ordnung s derselben Primzahl ist, oder nicht.

b) Giebt es aber in der Gruppe G noch weitere Substitutionen, so sind wieder zwei Fälle zu trennen:

α) Entweder es giebt in G *mindestens eine Substitution T* von der Ordnung t, für welche die aus ihren successiven Potenzen gebildete cyklische Gruppe G_t *nicht ausgezeichnet* in G enthalten ist, oder aber,

β) es giebt keine derartige cyklische Untergruppe mehr, d. h. die sämmtlichen Substitutionen $S, T, R, \cdots$ der Gruppe G *führen zu ausgezeichneten cyklischen Untergruppen* $G_s, G_t, G_r, \cdots$.

α) Im ersten Falle entsteht durch die Combination der Gruppen G_s und G_t eine Gruppe $G_{s,t}$, deren Substitutionen in der Form $S^i\,T^k$ dargestellt sind. Und nun hat man den Satz: *Die Gruppe G muss, falls sie zu den Gruppen der Categorie* II *gehört, mit $G_{s\,t}$ identisch sein*, wobei von allen möglichen derartigen Gruppen wieder nur diejenigen hierher gehören, *für welche die Ordnungen s und t der Substitutionen S und T Primzahlen sind.* Andernfalls lassen sich nämlich sofort cyklische Untergruppen von Primzahlordnung ϱ, wo ϱ ein Theiler von t ist, in G angeben, die nicht ausgezeichnete Untergruppen in G sind, die als von Primzahlordnung überhaupt keine und also auch keine in G ausgezeichneten Untergruppen enthalten und die endlich nicht „Maximaluntergruppen“ in G sind. Eine

solche Untergruppe würde aber (nach § 9) zu einer *imprimitiven* Form der mit Bezug auf sie durch Vertauschungen von $\frac{N}{\varrho}$ Symbolen dargestellten Gruppe G veranlassen.

β) Die Annahme β führt zu der Gattung von Gruppen, für welche jede in ihnen enthaltene cyklische Untergruppe von Primzahlordnung eine ausgezeichnete Untergruppe ist und *die sonach lediglich ausgezeichnete Untergruppen enthalten.* Diese Gruppen sind also (§ 8), wenn es sich um eine Darstellung durch Vertauschungen von Symbolen handelt, welche transitiv sein soll, überhaupt nur in einfach transitiver *regulärer Form* darzustellen.

Die soeben in II, 1, a) charakterisirten Gruppen gehören mit zu dieser Categorie.

2. Im Gegensatze zu 1 nehmen wir jetzt an, es gäbe keine in G ausgezeichnete cyklische Untergruppe. Dann ist sicher *wenigstens eine* Substitution S vorhanden, für welche die abgeleitete cyklische Gruppe G_s mit einer Anzahl von Substitutionen von G vertauschbar ist. Diese letzteren reduciren sich a) entweder auf die Substitutionen $1, S, S^2, \cdots, S^{s-1}$ von G_s selbst, oder aber b) sie bilden eine Gruppe H, welche Untergruppe von G ist und in welcher die Gruppe G_s ausgezeichnet enthalten ist.

b) Machen wir zunächst die letztere Annahme, so folgt aus der Stellung der Untergruppe G_s zu G (in der soeben 1, a, α angewandten Schlussweise) sofort eine Schreibweise der Gruppe G mit Bezug auf die Untergruppe G_s durch Vertauschungen von $\frac{N}{s}$ Symbolen, welche *imprimitiv* ist mit Bezug auf die G_s umfassende Untergruppe H von G. Diese Möglichkeit ist daher auszuschliessen.

a) So bleibt noch der letzte Fall: Alle cyklischen Untergruppen $G_s, G_t, G_r, \cdots$ von G sind nur mit sich selbst vertauschbar, also in keiner grösseren Untergruppe von G ausgezeichnet enthalten.

Dann können dieselben nur von *Primzahlordnung* sein, denn in einer cyklischen Gruppe von der Ordnung σ, wo σ zusammengesetzte Zahl, ist eben *jede* der *vorhandenen* cyklischen Theilgruppen ausgezeichnet enthalten.

Nun zählen wir ab, wie viele gleichberechtigten Substitutionen es zu einer jeden Substitution (von Primzahlordnung) unserer Gruppe giebt. Zu der Substitution S der Periode s hat man dann (da die Substitution nur mit ihren

Potenzen vertauschbar ist) $\frac{N}{s}$ gleichberechtigte Substitutionen und also $\frac{N}{s}(s-1)$ mit einer Potenz von S gleichberechtigte Substitutionen. Gleiches gilt für weitere Substitutionen $T, R \cdots$ der Gruppe G und so setzt sich die Gesammtzahl N ihrer Substitutionen zusammen als:

$$N = \frac{N}{s}(s-1) + \frac{N}{t}(t-1) + \frac{N}{r}(r-1) \cdots + 1$$

(wo 1 der identischen Substitution entspricht). Man hat also für N eine Gleichung zu befriedigen

$$N\left(1 - \nu + \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} + \cdots\right)\right) = 1,$$

wo ν die Anzahl der verschiedenen Systeme gleichberechtigter Substitutionen bedeutet. Ersichtlich kann diese Gleichung nur erfüllt werden für $\nu = 1$, $s = N$, eine Relation, welche auf die cyklische Gruppe der Primzahlordnung s führt.

Damit erhalten wir (indem wir von der letzterhaltenen Gruppe die eben überhaupt keine Untergruppe besitzt, absehen) beiläufig den Satz:

Gruppen, für welche alle vorhandenen cyklischen Untergruppen nur mit sich selbst vertauschbar sind, existiren nicht.

Fassen wir das für die Gruppen der Categorie II erhaltene Resultat zusammen, so ist es das folgende:

Gruppen, welche, wenn es sich um eine transitive Darstellung durch Symbolvertauschungen handelt, nur in der regulären Form imprimitiv geschrieben werden können, sind: 1. *diejenigen, die transitiv überhaupt nur in regulärer Form darstellbar sind und die sonach nur ausgezeichnete Untergruppen besitzen;* 2. *die Gruppen der Ordnung st, für welche s, t Primzahlen sind und die cyklische Untergruppe G_s (nicht aber eine G_t) in G ausgezeichnet enthalten ist. Diese Gruppen sind, ausser in der regulären Form, transitiv auch noch durch Vertauschung von s Symbolen mit Bezug auf eine der s cyklischen Untergruppen G_t darstellbar, eine Darstellung, die wegen des Primzahlcharakters von s selbstverständlich nur primitiv sein kann**).

Alle andern Gruppen sind also mindestens noch in einer, nichtregulären, transitiven Darstellung imprimitiv, oder anders ausgedrückt, sie besitzen mindestens eine Untergruppe G' (und die dazu gleichberechtigten), welche nicht ausgezeichnet in G enthalten ist, noch auch ihrerseits eine in G ausgezeichnete Untergruppe enthält und welche dabei keine Maximaluntergruppe von G ist.

---

*) Bezüglich hierhergehöriger Beispiele sehe man § 13.

§ 12.

Beziehungen zur Transitivität.

Wenn eine Gruppe G' der Ordnung μ eine Darstellung der Gruppe G der Ordnung $\mu\nu$ durch Vertauschungen von ν Symbolen $T_1, T_2, \cdots, T_\nu$ zulässt, so schliesst sich, wie wir in § 9 und aus dem Schema II ersehen haben, diese Darstellung an die mit Bezug auf diese Untergruppe G' mögliche imprimitive Schreibweise der regulären Form von G an. *Wir fragen, wie es sich mit dieser Darstellung bezüglich ihrer Transitivität verhält.*

Wir trennen sofort zwei Fälle durch den Satz:

Die gemeinte Darstellung unserer Gruppe G ist primitiv oder imprimitiv, je nachdem G' Maximaluntergruppe von G ist oder nicht.

1. Fassen wir zunächst den letzteren Fall ins Auge, so folgt aus der Imprimitivität unserer Darstellung sofort auch, *dass dieselbe einfach transitiv ist**).

Wir bezeichnen (wie auch im Allgemeinen) die *Art der Transitivität* noch näher durch die Angabe der Gruppe, welche durch die nach Festhaltung des Symbols T_1 noch möglichen Vertauschungen der Symbole $T_2, T_3, \cdots, T_\nu$ gebildet wird. Dieselbe erscheint durch diese Symbole in *in*transitiver Form dargestellt und ist (vergl. pag. 92—94) holoedrisch isomorph, oder kurz gesagt, *identisch* mit der Gruppe G', auf welche sich unsere imprimitive Darstellung von G bezieht.

2. Ist G' Maximaluntergruppe und unsere Darstellung der Gruppe G demgemäss primitiv, so haben wir noch zwischen *einfach* und *mehrfach transitiver* Darstellungsform zu unterscheiden. Halten wir das Symbol T_1 fest, so liegt uns in den nunmehr noch möglichen Vertauschungen der Symbole $T_2, T_3, \cdots, T_\nu$ wieder die Gruppe G' vor und dann haben wir es (nach Definition, vergl. pag. 83) mit einer mehrfach transitiven oder einfach transitiven Darstellung der Gruppe G zu thun, je nachdem jetzt an Stelle des Symbols T_2 noch alle, oder nicht mehr alle Symbole $T_2, T_3, \cdots, T_\nu$ treten können, je nachdem also im Schema II die Substitutionen

$$T_2, \; T_2S_2, \; T_2S_3, \cdots, T_2S_\mu$$

sich noch in sämmtliche Categorien von Substitutionen

$$S_\iota T_2, \; S_\varkappa T_3, \; S_\lambda T_4, \cdots, S_\varrho T_\nu$$

(wie sie den Symbolen

$$T_2, \; T_3, \; T_4, \cdots, T_\nu$$

entsprechen) vertheilen, oder nicht.

*) Vergl. pag. 84.

Ist im letzten Falle eine einfach transitive, primitive Darstellung bezeichnet, so haben wir im ersten Falle noch die analoge Frage wie oben aufzuwerfen bezüglich der Symbole, welche nach Fixirung der Symbole T_1, T_2 noch an dritte Stelle treten können u. s. f.

Die Beantwortung der Frage, ob eine mit Bezug auf eine gegebene Untergruppe G' von der Ordnung μ mögliche Darstellung einer Gruppe G $\varkappa$-fach transitiv ist, wird dabei noch wesentlich abgekürzt mit Hülfe des bekannten auch aus dem obigen unmittelbar zu erschliessenden Satze, wonach die Ordnungszahl einer Gruppe, welche durch Vertauschung von ν Symbolen $\varkappa$-fach transitiv dargestellt wird, in der Form $N = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\varkappa+1)\cdot\alpha$ gegeben ist (α die Ordnung einer Gruppe, die $\varkappa$ Elemente ungeändert lässt). Danach fordert nämlich die gemeinte Darstellung jedenfalls, dass

$$\mu = (\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\varkappa+1)\cdot\alpha$$

sei*).

§ 13.

Beispiele.

Es seien zum Schluss einige Darstellungen der Octaedergruppe, der Icosaedergruppe, sowie zwei Beispiele für die in § 11 aufgezählten Gruppen gegeben.

1. *Die Octaedergruppe* G_{24} besitzt bekanntlich als Untergruppen:

α) Cyklische Untergruppen der Ordnungen 4, 3 und 2: G_4, G_3, G_2; und zwar 3 Untergruppen G_4 die unter einander gleichberechtigt (§ 4) sind; 4 unter einander gleichberechtigte Untergruppen G_3, endlich $6+3$ Untergruppen G_2, von denen die ersten 6 und die letzten 3 unter einander gleichberechtigt sind, und die letzteren die Untergruppen jener obigen G_4 sind.

β) Untergruppen vom Doppelpyramidentypus der Ordnungen 8, 6 und 4 : G_8', G_6', G_4' und zwar 3 Untergruppen G_8', die je untereinander gleichberechtigt sind, 4 unter einander gleichberechtigte Untergruppen G_6', endlich $(3+1)$ Untergruppen G_4', von denen die ersten 3 untereinander gleichberechtigt sind, die letzte die einzige ihrer Art und als solche in der G_{24} ausgezeichnet ist (§ 4).

γ) Als letzte Untergruppe der G_{24} ergiebt sich eine Tetraedergruppe G_{12}, die gleichfalls, als in ihrer Art einzig, in der G_{24} ausgezeichnet enthalten ist (§ 4).

---

*) **Selbstverständlich nur als eine nothwendige, *nicht* aber auch hinreichende Bedingung.**

Die reguläre Form der Octaedergruppe lässt sich sonach imprimitiv schreiben mit Bezug auf alle diese Untergruppen.

a) In der folgenden Tabelle ist diese Darstellung mit Bezug auf eine cyklische Untergruppe G_2 ausgeführt. Insofern dabei diese G_2 als Untergruppe in einer G_4 und diese ihrerseits als Untergruppe in einer G_8' enthalten ist, lässt sich — und das ist in der nebenstehenden Tabelle geschehen — gleichzeitig auch die imprimitive Anordnung der Gruppe mit Bezug auf jene G_4 und G_8' treffen.

Legt man zu dem Ende die in § 4 erwähnte Erzeugung der Gruppe durch die Substitutionen A_1, A_2, A_3 zu Grunde, für welche

$$A_1^4 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1$$

ist, so liegt eine der Untergruppen G_2 sofort vor in den Substitutionen:

$$| \; 1, \; A_1^2 \; | \cdot$$

Diese G_2 ist in der cyklischen Gruppe G_4 der Substitutionen

$$\begin{array}{l} \| \; 1, \; A_1^2 \; | \\ | \; A_1, \; A_1^3 \; \| \end{array}$$

(ausgezeichnet) enthalten, und diese G_4 wieder in der Doppelpyramidengruppe G_8', welche entsteht, wenn wir die Substitutionen der G_4 links mit den Substitutionen einer Gruppe G_2:

$$1, \; (A_3 A_1^2 A_3 A_1^3)$$

multipliciren, so dass die G_8' in der Form erscheint:

$$\begin{array}{llll} \| \; 1, & A_1^2 & | \; A_1 & , \; A_1^3 \; \| \\ \| (A_3 A_1^2 A_3 A_1^3), & A_1^2 (A_3 A_1^2 A_3 A_1^3) & | \; A_1 (A_3 A_1^2 A_3 A_1^3), & A_1^3 (A_3 A_1^2 A_3 A_1^3) \| \cdot \end{array}$$

Multipliciren wir diese 8 Substitutionen der Reihe nach noch links mit den Substitutionen:

$$1, \; A_2, \; A_2^2,$$

so liegen nunmehr die 24 Substitutionen der Octaedergruppe vor uns, die wir *in dieser Reihenfolge* mit

$$1, \; 2, \; 3, \; \cdots, \; 24$$

symbolisch bezeichnen.

Durch die sonach gegebene erste Horizontalreihe des quadratischen Schemas II ist uns jetzt die einfach transitive reguläre Form der Gruppe bestimmt und gleichzeitig eine derartige Anordnung der Symbole getroffen, dass die Gruppe, „mit Bezug auf die obenerwähnten Untergruppen G_2, G_4, G_8' imprimitiv geschrieben“ erscheint:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	1	4	3	6	5	8	7	15	16	14	13	12	11	9	10	24	23	21	22	19	20	18	17
3	4	2	1	8	7	6	5	20	19	17	18	23	24	22	21	14	13	16	15	10	9	12	11
4	3	1	2	7	8	6	5	22	21	24	23	18	17	20	19	11	12	10	9	16	15	13	14
5	6	7	8	1	2	3	4	21	22	23	24	17	18	19	20	13	14	15	16	9	10	11	12
6	5	8	7	2	1	4	3	19	20	18	17	24	23	21	22	12	11	9	10	15	16	14	13
7	8	6	5	4	3	1	2	16	15	13	14	11	12	10	9	18	17	20	19	22	21	24	23
8	7	5	6	3	4	2	1	10	9	12	11	14	13	16	15	23	24	22	21	20	19	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8
10	9	12	11	14	13	16	15	23	24	22	21	20	19	17	18	8	7	5	6	3	4	2	1
11	12	10	9	16	15	13	14	4	3	1	2	7	8	6	5	22	21	24	23	18	17	20	19
12	11	9	10	15	16	14	13	6	5	8	7	2	1	4	3	19	20	18	17	24	23	21	22
13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4	21	22	23	24	17	18	19	20
14	13	16	15	10	9	12	11	3	4	2	1	8	7	5	6	20	19	17	18	23	24	22	21
15	16	14	13	12	11	9	10	24	23	21	22	19	20	18	17	2	1	4	3	6	5	8	7
16	15	13	14	11	12	10	9	18	17	20	19	22	21	24	23	7	8	6	5	4	3	1	2
17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18	17	20	19	22	21	24	23	7	8	6	5	4	3	1	2	16	15	13	14	11	12	10	9
19	20	18	17	24	23	21	22	12	11	9	10	15	16	14	13	6	5	8	7	2	1	4	3
20	19	17	18	23	24	22	21	14	13	16	15	10	9	12	11	3	4	2	1	8	7	5	6
21	22	23	24	17	18	19	20	13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4
22	21	24	23	18	17	20	19	11	12	10	9	16	15	13	14	4	3	1	2	7	8	6	5
23	24	22	21	20	19	17	18	8	7	5	6	3	4	2	1	10	9	12	11	14	13	16	15
24	23	21	22	19	20	18	17	2	1	4	3	6	5	8	7	15	16	14	13	12	11	9	10

Man erkennt in dieser Tabelle leicht auch gewisse specielle Anordnungen, wie sie aus in § 11, Nr. 1—5 bezeichneten speciellen Eigenschaften einer Untergruppe für das quadratische Schema entspringen.

Da weder die G_4, noch die G_2 in der G_{24} ausgezeichnet enthalten ist, noch auch (die Identität ausgenommen) ihrerseits Untergruppen besitzen, welche in der G_{24} ausgezeichnet sind, so ergiebt sich (§ 8) aus unserem Schema sofort eine Darstellung der Octaedergruppe durch Vertauschungen von 6, und eine solche durch Vertauschungen von 12 Symbolen, wenn man nämlich die 6, bez. 12 Systeme der Imprimitivität, in welche die erste Horizontalreihe der Tabelle mit Bezug auf die Untergruppen G_4 und G_2 zerfällt, je für sich mit Symbolen

$$1', \quad 2', \quad 3', 4', 5', \quad 6',$$

beziehungsweise

$$1'', 2'', 3'', 4'', \quad \cdots, \quad 11'', 12''$$

bezeichnet, und nun auf deren Umsetzungen bei den 24 Substitutionen achtet.

Die so gewonnenen Darstellungen der G_{24} sind *imprimitiv*, da weder die G_4, noch die G_2 „Maximaluntergruppen" der G_{24} sind. Vielmehr ist die G_4 noch in der obigen G_8' enthalten und es lässt sich demgemäss (§ 9) die Darstellung der G_{24} durch Vertauschungen von 6 Symbolen imprimitiv schreiben mit Bezug auf diese G_8', wie wir dies sofort aus der vorigen Tabelle (p. 105) ablesen. Die G_2, welche der Darstellung unserer G_{24} durch Vertauschungen von 12 Symbolen zu Grunde liegt, ist in der obigen G_4, weiter aber noch in sämmtlichen 3 Gruppen G_8', sowie in 2 Gruppen G_4' und der Tetraedergruppe G_{12}'' enthalten, so dass die 12 Symbole noch mit Bezug auf alle diese Untergruppen zu Systemen der Imprimitivität geordnet werden können. Die auf die G_4 und eine G_8' bezügliche imprimitive Anordnung ist dabei unmittelbar in unserer obigen Schreibweise ersichtlich. Die Untergruppe G_8', mit Bezug auf welche in der obigen Tabelle die 24 Symbole zu drei Systemen der Imprimitivität geordnet erscheinen, giebt zu einer Darstellung der G_{24} durch Vertauschungen von drei Symbolen *nicht* Anlass, da die G_8' jene in der G_{24} *ausgezeichnete* Untergruppe G_4' als Untergruppe enthält und daher die Beziehung, welche zwischen der G_{24} und der Gruppe der Vertauschungen jener 3 Symbole statthat, eine meriedrisch isomorphe ist (§ 8), was hier selbstverständlich auch schon aus der Anzahl der überhaupt möglichen Vertauschungen von drei Dingen — es sind dies eben nur sechs — folgt.

b) Handelt es sich darum, in unserer Tabelle durch die imprimitive Form eine cyklische Untergruppe G_3 und eine Doppelpyramide G_6' hervortreten zu lassen, so können wir etwa die Anordnung nach der Gruppe der Substitutionen

$$| \; 1, \; A_2, \; A_2^2 \; |$$

als einer G_3 und nach der zugehörigen Doppelpyramidengruppe G_6':

$$\begin{Vmatrix} 1 & , A_2 & , A_2^2 \\ (A_3A_1^2A_3A_1^3), & A_2(A_3A_1^2A_3A_1^3), & A_2^2(A_3A_1^2A_3A_1^3) \end{Vmatrix}$$

treffen, aus welcher wir dann die sämmtlichen Substitutionen der G_{24} entstehen lassen können, indem wir diese 6 Substitutionen links der Reihe nach mit

$$1, \; A_1^2, \; A_1, \; A_1^3$$

multipliciren.

In den obigen Symbolen $1, 2, 3, \cdots, 24$, deren Definition aus der pag. 104 gegebenen Anordnung der 24 Substitutionen festgelegt ist, geschrieben, ist dann die erste Horizontalreihe der quadratischen Tabelle, aus welcher sich deren ganze Anordnung ergiebt, in der folgenden Weise anzunehmen:

$$| 1, 9, 17 | 5, 21, 13 \| 2, 15, 24 | 6, 19, 21 \| 3, 20, 14 | 8, 10, 23 \| 4, 22, 11 | 7, 16, 18 \|.$$

Dieser Eintheilung unserer 24 Symbole zu 8, beziehungsweise zu je 4 Systemen der Imprimitivität, den obigen Untergruppen G_3 und G_6' entsprechend, läuft die Darstellung der G_{24} durch Vertauschungen von 8, beziehungsweise von 4 Symbolen parallel. Die erste dieser Darstellungen ist *imprimitiv*, da die G_3 nicht „Maximaluntergruppe" der G_{24} ist, vielmehr eben noch in jener G_6' als Untergruppe enthalten ist. Die letztere Darstellung der G_{24} durch Vertauschungen von 4 Symbolen ist *primitiv*, da die G_6' Maximaluntergruppe der G_{24} ist, und bekanntlich ist eben diese Darstellungsform durch die Gesammtheit *aller* Vertauschungen von 4 Symbolen gegeben.

c) Wir fügen noch kurz die Anordnung bei, welche wir den Symbolen $1, 2, 3, \cdots, 24$ ertheilen müssen, damit unsere quadratische Tabelle imprimitiv geschrieben erscheint mit Bezug auf die ausgezeichneten Untergruppen G_{12}' und G_4'. Die erste Horizontalreihe der Tabelle, aus welcher sich die ganze Darstellung ergiebt, lautet dann:

$$\| 1, 2, 7, 8 \mid 9, 10, 15, 16 \mid 17, 18, 23, 24 \| 3, 4, 5, 6 \mid 11, 12, 13, 14 \mid 19, 20, 21, 22 \|.$$

Dabei zeigt die ausgeführte Tabelle, der speciellen Stellung der Gruppen G_4' und G_{12}'' in der G_{24} entsprechend, die in § 10, Nr. 2 u. 4 bezeichnete specielle Anordnung der Symbole.

2. *Die Icosaedergruppe* G_{60}. Stellen wir in Kürze die sämmtlichen Untergruppen der G_{60} zusammen, so sind diese, wenn wir jedesmal die gleichberechtigten Gruppen zusammennehmen, die folgenden:

α) Cyklische Gruppen: 15 cyklische Gruppen der Ordnung 2, G_2; 10 der Ordnung 3, G_3; 6 der Ordnung 5, G_5.

β) Doppelpyramidengruppen: 5 Doppelpyramidengruppen der Ordnung 4, G_4'; 10 der Ordnung 6, G_6'; 6 der Ordnung 10, G_{10}'.

γ) 5 Tetraedergruppen G_{12}''.

Allen Untergruppen entspricht eine imprimitive Schreibweise der regulären Form der G_{60}; da aber die G_{60} eine *einfache* Gruppe, und daher *keine* dieser Untergruppen in G_{60} ausgezeichnet enthalten ist, so läuft *jeder* solchen auf eine Untergruppe G_ν bezüglichen imprimitiven Form eine Darstellung der G_{60} durch Vertauschungen von $\frac{60}{\nu}$ Symbolen parallel. Es folgen sonach Darstellungen der G_{60} durch Vertauschungen von

30, 20, 12, 15, 10, 6, 5

Symbolen, jenen Untergruppen:

$$G_2,\ G_3,\ G_5,\ G_4',\ G_6',\ G_{10}',\ G_{12}''$$

entsprechend. Die Untergruppen G_6', G_{10}' und G_{12}' sind Maximaluntergruppen der G_{60} und so erscheinen die Darstellungen der Icosaedergruppe durch Vertauschungen von 10, 6 und 5 Symbolen in *primitiver* Form (die letzte Darstellung umfasst bekanntlich die sämmtlichen geraden Vertauschungen von 5 Dingen), während die übrigen Darstellungen durch Vertauschungen von 15, 12, 20 und 30 Symbolen, da die zugehörigen Gruppen G_4', G_5, G_3, G_2 *nicht* Maximaluntergruppen sind, den verschiedenen umfassenden Untergruppen entsprechend, *imprimitiv* geschrieben werden können.

3. Um schliesslich noch zwei einfachste Beispiele für die in § 11 charakterisirten Gruppen zu erwähnen, so fällt zunächst unter die dort definirten Gruppen $G_{s,t}$ (s, t Primzahlen) die *Doppelpyramidengruppe* G_{2s}, für welche bekanntlich die cyklische Gruppe G_s eine ausgezeichnete Untergruppe bildet.

Für die *Gruppen „mit nur ausgezeichneten Untergruppen“* bietet sich als das *einfachste Beispiel* die Gruppe G_{2^ν} der Ordnung 2^ν, welche nur Substitutionen der Ordnung 2 enthält, die sämmtlich in der G_{2^ν} ausgezeichnet enthalten sind. Sie lässt sich (nach § 10, Nr. 5) in regulärer Form folgendermassen schreiben:

1	2	3	4	5	6	7	8	...
2	1	4	3	6	5	8	7	...
3	4	1	2	7	8	5	6	...
4	3	2	1	8	7	6	5	...
5	6	7	8	1	2	3	4	...
6	5	8	7	2	1	4	3	...
7	8	5	6	3	4	1	2	...
8	7	6	5	4	3	2	1	...
...								
...								

Ihre Verallgemeinerung zu einer analog aufgebauten Gruppe der Ordnung n^ν ist sofort ersichtlich.

Leipzig, Ende December 1882.

Ueber gewisse Reihen, welche in getrennten Convergenzgebieten verschiedene, willkürlich vorgeschriebene Functionen darstellen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Herr Weierstrass hat in seiner Abhandlung „Zur Functionenlehre" — (Monatsberichte der Berliner Akademie 1880 S. 719 ff.) — die Aufmerksamkeit auf gewisse, nach rationalen Functionen einer complexen Variablen fortschreitende, im allgemeinen gleichmässig convergente unendliche Reihen gelenkt, deren gesammter Convergenzbereich aus mehreren getrennten Stücken besteht, und hat bei dieser Gelegenheit die schon früher aufgetauchte Frage*), ob derartige Reihen in diesen verschiedenen Gebieten stets als Darstellungen verschiedener Stücke einer *einzigen* monogenen Function anzusehen seien, im verneinenden Sinne entschieden; es wird nämlich in jener Abhandlung gezeigt, dass sich Reihen der genannten Art bilden lassen, welche in verschiedenen Gebieten ihres Convergenzbereiches sichtlich verschiedene, nämlich geradezu willkürlich vorzuschreibende monogene Functionen (mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Singularitäten) darstellen. Der Beweis hierfür wird durch eine Reihe geliefert, welche an sich einfach genug und für den betreffenden Zweck völlig geeignet, immerhin eine einigermassen umständliche Herleitung erfordert. Aus diesem Grunde theilt Herr Weierstrass in einem späteren Zusatze zu jener Abhandlung**) noch ein anderes, ihm von Herrn J. Tannery übermitteltes Beispiel einer solchen Reihe mit, das in der That bei geradezu überraschender Einfachheit den beabsichtigten Zweck genau so vollständig erfüllt, wie jene erst erwähnte weit complicirtere Reihe. Da diese neue Reihe gerade wegen ihrer elementaren Einfachheit einiges Aufsehen erregt haben dürfte — wie ja schon die Stelle ihrer ersten Publication und der weitere Umstand beweist, dass dieselbe auch mit dem Namen des Herrn Tannery sofort in der neuesten Vorlesung

*) Man sehe z. B. die bekannte Abhandlung von Hankel: „Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen" — Univ.-Programm, Tübingen 1870, S. 45. (Wiederabdruck in den Math. Ann. Bd. XX, S. 105).

**) Monatsberichte der Berl. Akademie 1881, S. 218 ff.

des Herrn Hermite*) Erwähnung gefunden hat — so mag es vielleicht nicht ohne Interesse erscheinen, zu constatiren, dass jenes Tannery'sche Beispiel in der Hauptsache nichts weniger als neu ist, vielmehr mit einer an sich ganz unerheblichen Modification sich bereits in einem Aufsatze aus dem Jahre 1869 von Herrn Seidel in München vorfindet**) — freilich dort in einem ganz anderen Zusammenhange und ohne auch nur entfernt die Tragweite erkennen zu lassen, welche Herr Weierstrass derartigen Reihen durch den Nachweis gegeben hat, dass dieselben innerhalb ihres Convergenzbereiches *gleichmässig* convergiren.

Herr Tannery geht nämlich bei Aufstellung seiner Reihe von dem folgenden Grenzwerthe aus:

$$\psi(z) = \lim \frac{1+z^n}{1-z^n} \qquad (n = \infty)$$

welcher, wenn n einen positiven, ganzzahligen Parameter, z eine complexe Variable bedeutet, die Werthe ± 1 annimmt, je nachdem $|z| \lesseqgtr$ ist, dagegen für $|z| = 1$ im allgemeinen unbestimmt wird. Mit Hülfe eines bekannten Principes, nach welchem jede für $n = \infty$ einer bestimmten Grenze G zustrebende Function der ganzen positiven Zahl n in der Form gesetzt werden kann:

$$G = \lim_{n=\infty} G_n = G_0 + (G_1 - G_0) + (G_2 - G_1) + \cdots \text{ in inf.}$$

oder etwas allgemeiner, wenn $m_0, m_1, \ldots, m_\nu$ eine beliebige Reihe ganzer positiver, mit ν in's Unendliche wachsender Zahlen bedeutet:

$$G = \lim_{m_\nu=\infty} G_{m_\nu} = G_{m_0} + (G_{m_1} - G_{m_0}) + (G_{m_2} - G_{m_1}) + \cdots \text{ in inf.}$$

wird alsdann der obige Grenzwerth in die unendliche Reihe umgeformt:

$$\psi(z) = \frac{1+z^{m_0}}{1-z^{m_0}} + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{2z^{m_{\nu-1}}(z^{m_\nu - m_{\nu-1}} - 1)}{(z^{m_\nu} - 1)(z^{m_{\nu-1}} - 1)}$$

welche für die specielle Wahl $m_\nu = 2^\nu$ die überaus einfache Gestalt annimmt:

$$\psi(z) = \frac{1+z}{1-z} + 2\sum_1^\infty{}_\nu \frac{z^{2^{\nu-1}}}{z^{2^\nu} - 1}.$$

Dieses ist also die Reihe des Herrn Tannery. In dem oben bezeichneten Aufsatze***) hat nun Herr Seidel u. a. die folgenden beiden Grenzwerthe untersucht:

$$\lim \frac{1}{1+z^n}, \qquad \lim \frac{n}{n+z^n} \qquad (n = \infty)$$

---

*) Cours de Mr. Hermite professé pendant le 2e sémestre 1881/82. Rédigé par M. Andoyer. Paris 1882. — p. 128.

**) Publicirt 1871 in Crelle's Journal Bd. 73.

***) a. a. O. S. 297 und 298 Anm.

und *ausdrücklich darauf hingewiesen, dass derartige Grenzwerthe* vermöge des oben erwähnten Principes *stets auch in unendliche Reihen umgeformt werden können.* Der erste dieser Grenzwerthe, bezw. die daraus abzuleitende Reihe, ist aber offenbar von dem Tannery'schen Beispiele im wesentlichen nicht verschieden und auch für den von Herrn Weierstrass intendirten Zweck genau ebenso brauchbar: es ist dies in der That ein unter der Form einer nach rationalen Functionen von z fortschreitenden Reihe darstellbarer Ausdruck, der innerhalb und ausserhalb einer um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises zwei völlig getrennte Functionen — nämlich die Constante 1 innerhalb, die Constante 0 ausserhalb des Kreises — vorstellt, auf der Peripherie (mit Ausschluss des einen Punktes $z = +1$) unbestimmt wird. Derselbe steht sogar zu dem Tannery'schen Ausdruck in einer einfachen, sich ganz von selbst ergebenden linearen Relation: denn will man aus diesem Ausdrucke, der etwa mit G bezeichnet werden möge, einen anderen construiren, der statt der Werthe 1 und 0 wie der Tannery'sche die Werthe 1 und -1 annimmt, so hat man nur zu bilden

$$2G - 1 = \lim_{n=\infty} \frac{1 - z^n}{1 + z^n}$$

d. h. man erhält den reciproken Werth des Tannery'schen Ausdruckes.

Dürfte aus dem bisher gesagten zunächst soviel hervorgehen, dass jener Ausdruck des Herrn Seidel in der That alle wesentlichen Eigenschaften des Tannery'schen Beispiels in sich enthält, so mag ferner noch ausdrücklich bemerkt werden, dass sogar ein Ausdruck wie der in Rede stehende — also allgemein gesagt ein solcher, welcher für ein gewisses Gebiet der Ebene, auf dessen Begrenzung er unbestimmt wird, den Werth 1 besitzt, für den übrigen Theil der Ebene *verschwindet*, ganz besonders geeignet ist, um die Lösung des von Herrn Weierstrass aufgestellten Hauptproblems, nämlich:

> Herstellung unendlicher, nach rationalen Functionen von z fortschreitender Reihen, deren Convergenzbereich aus mehreren getrennten Stücken besteht, und die innerhalb dieser einzelnen Stücke verschiedene, beliebig vorgeschriebene monogene Functionen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Singularitäten vorstellen —

in die denkbar einfachste und übersichtlichste Form zu setzen.

Bevor dies an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden soll, möge zunächst — da es ja hier vor allem auf die Reihenform jener Ausdrücke ankommt — statt des oben betrachteten Ausdruckes der ihm völlig äquivalente:

$$\varphi(z) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{1 - z^n} = \begin{cases} 1 & \text{für } |z| < 1, \\ 0 & \text{— } |z| > 1 \end{cases}$$

eingeführt werden, sofern nämlich für diesen letzteren die der Tannery'schen Reihe analoge Form einfach folgendermaassen lautet:

$$\varphi(z)=\frac{1}{1-z}+\left(\frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{1-z}\right)+\left(\frac{1}{1-z^4}-\frac{1}{1-z^2}\right)+\left(\frac{1}{1-z^8}-\frac{1}{1-z^4}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-z}+\frac{z}{z^2-1}+\frac{z^2}{z^4-1}+\frac{z^4}{z^8-1}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-z}+\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{z^{2^{\nu-1}}}{z^{2^\nu}-1}=\frac{1}{1-z}+\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\left(z^{2^\nu}-z^{-2^\nu}\right)^{-1}.$$

Will man jetzt z. B. mit Hülfe dieser Reihe $\varphi(z)$ — ähnlich wie Herr Weierstrass in § 5 der zuerst genannten Abhandlung — eine Reihe herstellen, welche für das Innere von n getrennt liegenden Kreisen

$$K_1\ K_2\ldots K_n$$

der Reihe nach mit den willkürlich vorgeschriebenen Functionen:

$$f_1(z)\ f_2(z)\ldots f_n(z)$$

und für das übrige Ebenenstück mit einer weiteren willkürlich vorgeschriebenen Function $f_{n+1}(z)$ übereinstimmt, so lässt sich dies einfach folgendermaassen bewerkstelligen. Seien bezüglich

$$a_1\ a_2\ldots a_n$$

die Mittelpunkte,

$$r_1\ r_2\ldots r_n$$

die Radien jener Kreise, so wird

$$\varphi\left(\frac{z-a_\lambda}{r_\lambda}\right)=\begin{cases}1 & \text{für}\ |z-a_\lambda|<r,\\ 0 & \text{—}\ \ |z-a_\lambda|>r,\end{cases}$$

nimmt also innerhalb des Kreises K_λ den Werth 1 an und verschwindet ausserhalb. Darnach wird ferner der Ausdruck

$$1-\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\,\varphi\left(\frac{z-a_\lambda}{r_\lambda}\right)$$

für das Innere jener sämmtlichen Kreise verschwinden, für das übrigbleibende äussere Ebenenstück den Werth 1 annehmen. Alsdann ergiebt sich aber ohne weiteres

$$F(t)=\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\,\varphi\left(\frac{z-a_\lambda}{r_\lambda}\right)\cdot f_\lambda(z)+\left\{1-\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\,\varphi\left(\frac{z-a_\lambda}{r_\lambda}\right)\right\}f_{n+1}(z)$$

$$=f_{n+1}(z)+\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\,\varphi\left(\frac{z-a_\lambda}{r_\lambda}\right)\left\{f_\lambda(z)-f_{n+1}(z)\right\}$$

als ein Ausdruck von der gesuchten Beschaffenheit; und zwar wird sich derselbe stets in eine unendliche, nach rationalen Functionen

von z fortschreitende Reihe umformen lassen, falls die gegebenen Functionen $f_1(z) \ldots f_{n+1}(z)$ monogen, eindeutig und nur mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Singularitäten behaftet sind.

Sind die Kreise so gelegen, dass der Kreis K_λ — für jeden Werth von λ — die Kreise $K_1 \ldots K_{\lambda-1}$ umschliesst, wobei also wiederum die gesammte Ebene in $n+1$ getrennte Stücke zerlegt wird: die Kreisfläche K_1, die $n-1$ ringförmigen Räume

$$(K_2 - K_1),\ (K_3 - K_2),\ \ldots,\ (K_n - K_{n-1})$$

und endlich das ausserhalb K_n liegende Ebenenstück — so wird:

$$\varphi\left(\frac{z-a_1}{r_1}\right) = 1 \qquad \text{innerhalb } K_1,$$

$$\varphi\left(\frac{z-a_\lambda}{r_\lambda}\right) - \varphi\left(\frac{z-a_{\lambda-1}}{r_{\lambda-1}}\right) = 1 \text{ innerhalb des Ringes } (K_\lambda - K_{\lambda-1}),$$

$$1 - \varphi\left(\frac{z-a_n}{r_n}\right) = 1 \qquad \text{ausserhalb } K_n$$

während jeder dieser Ausdrücke im übrigen verschwindet, bezw. auf den Grenzen unbestimmt wird.

Man hat daher in diesem Falle:

$$F(z) = \varphi\left(\frac{z-a_1}{r_1}\right) f_1(z) + \sum_1^{n-1}{}^{\lambda} \left\{\varphi\left(\frac{z-a_{\lambda+1}}{r_{\lambda+1}}\right) - \varphi\left(\frac{z-a_\lambda}{r_\lambda}\right)\right\} f_{\lambda+1}(z)$$

$$+ \left\{1 - \varphi\left(\frac{z-a_n}{r_n}\right)\right\} f_{n+1}(z)$$

$$= f_{n+1}(z) + \sum_1^{n}{}^{\lambda} \varphi\left(\frac{z-a_\lambda}{r_\lambda}\right)\left\{f_\lambda(z) - f_{\lambda+1}(z)\right\}$$

als einen Ausdruck, welcher in den genannten $n+1$ getrennten Stücken der Ebene bezw. die Functionen $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_{n+1}(z)$ vorstellt.

Es ist leicht zu übersehen, wie sich diese Ausdrücke modificiren, falls die gegebenen Kreise irgend welche andere Lage zu einander besitzen (wobei aber niemals irgend zwei von ihnen sich schneiden dürfen); desgleichen auch, wie man an Stelle der Begrenzungskreise — indem man für z eine rationale Function von z substituirt — irgend welche andere algebraische Curven treten lassen kann.

Im Anschlusse an das bisher gesagte mögen hier auch noch einige Bemerkungen über den zweiten der oben erwähnten, von Herrn Seidel eingeführten Grenzausdrücke Platz finden. Derselbe werde mit $\chi_1(z)$ bezeichnet, sodass also

$$\chi_1(z) = \lim_{n=\infty} \frac{n}{z^n + n} = \begin{cases} 1 & \text{für } |z| \leqq 1, \\ 0 & \text{—}\ \ |z| > 1 \end{cases}$$

ein Ausdruck, dessen charakteristisches Unterscheidungsmerkmal von dem bisher betrachteten $\varphi(z)$ also darin besteht, dass er auch noch auf der Peripherie des Einheitskreises durchweg bestimmt, nämlich $= 1$ ist. Aus demselben lassen sich zunächst noch drei weitere Ausdrücke von ähnlicher Beschaffenheit herleiten; zunächst etwa:

$$\omega_1(z) = 1 - \chi_1(z) = \lim \frac{z^n}{z^n + n} = \begin{cases} 0 & \text{für } |z| \leqq 1, \\ 1 & \text{—}\ \ |z| > 1. \end{cases}$$

Ferner indem man hierin $\frac{1}{z}$ statt z substituirt:

$$\chi_2(z) = \omega_1\left(\frac{1}{z}\right) = \lim \frac{1}{nz^n + 1} = \begin{cases} 1 & \text{für } |z| < 1, \\ 0 & \text{—}\ \ |z| \geqq 1 \end{cases}$$

und endlich, indem man diesen Ausdruck von der Einheit subtrahirt — oder, was auf dasselbe hinausläuft in $\chi_1(z)$ $\frac{1}{z}$ statt z setzt:

$$\omega_2(z) = \chi_1\left(\frac{1}{z}\right) = \lim \frac{nz^n}{nz^n + 1} = \begin{cases} 0 & |z| < 1, \\ 1 & |z| \geqq 1, \end{cases}$$

sodass also $\chi_2(z)$, $\omega_2(z)$ bezw. mit $\chi_1(z)$, $\omega_1(z)$ identisch sind mit Ausschluss der Peripherie des Einheitskreises, wo $\chi_1(z)$ und ebenso $\omega_2(z)$ den Werth 1 besitzt, dagegen $\chi_2(z)$ und $\omega_1(z)$ verschwindet.

Mit Hülfe dieser Grenzwerthe kann man nun offenbar in analoger Weise wie oben vermittelst der Reihe $\varphi(z)$ solche Ausdrücke bilden, welche für getrennte Ebenenstücke verschiedene willkürlich vorgeschriebene Functionen repräsentiren, ausserdem aber auf den Grenzlinien dieser Gebiete nach beliebiger Wahl entweder die eine oder die andere der dort aneinander grenzenden Functionen oder auch deren Summe oder endlich den Werth Null darstellen. So wird — um nur das einfachste Beispiel dieser Art anzuführen — wenn $f_1(z)$, $f_2(z)$ willkürlich anzunehmende Functionen bedeuten, jeder der vier Ausdrücke:

$$\begin{gathered} \chi_1(z) f_1(z) + \omega_1(z) \cdot f_2(z), \\ \chi_2(z) f_1(z) + \omega_2(z) \cdot f_2(z), \\ \chi_1(z) f_1(z) + \omega_2(z) \cdot f_2(z), \\ \chi_2(z) f_1(z) + \omega_1(z) \cdot f_2(z) \end{gathered}$$

innerhalb des Einheitskreises die Function $f_1(z)$, ausserhalb die Function $f_2(z)$ vorstellen, während auf der Peripherie der Reihe nach die vier Werthe

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_1(z) + f_2(z), \quad 0$$

zum Vorschein kommen.

(NB. Wählt man insbesondere die beiden willkürlichen Functionen einander gleich — etwa $= f(z)$ — so werden also die beiden letzten Ausdrücke, welche nunmehr die Form annehmen:

$$\{\chi_1(z) + \omega_2(z)\} f(z), \qquad \{\chi_2(z) + \omega_1(z)\} f(z)$$

in der ganzen Ebene — abgesehen von der Peripherie des Einheitskreises — die Function $f(z)$ darstellen, längs dieser Linie jedoch die Werthe $2f(z)$ bezw. 0 haben: es findet somit bei diesen Ausdrücken längs der Peripherie des Einheitskreises eine sogenannte hebbare Unstetigkeit statt).

Es könnte nun auf den ersten Blick scheinen, als liessen sich jetzt aus diesen Grenzwerthen $\chi(z)$, $\omega(z)$ — in Verbindung mit beliebig vorgelegten eindeutigen Functionen vom Charakter rationaler Functionen — ähnlich wie oben aus $\lim \frac{1}{1 \pm z^n}$, unendliche, nach rationalen Functionen von z fortschreitende Reihen bilden, denen alsdann die Eigenschaft zukäme, nicht nur wie jene früher betrachteten Reihen für getrennte Ebenenstücke verschiedene Functionen darzustellen, sondern auch noch auf den trennenden Grenzlinien selbst nach Maassgabe der oben näher specificirten Möglichkeiten *bestimmte* (im allgemeinen endliche) Werthe anzunehmen. Indessen zeigen die Ausdrücke $\chi(z)$, $\omega(z)$ verglichen mit $\varphi(z)$ ein wesentlich abweichendes Verhalten, sobald es sich darum handelt, sie in analoger Weise in unendliche Reihen umzuformen. Bezeichnet man nämlich wiederum mit G_n irgend einen von dem ganzzahligen Parameter n und der complexen Variablen z abhängigen Ausdruck, der für $n = \infty$ irgend welchen, im allgemeinen bestimmten Grenzwerth besitzt; sind dann wieder $m_0, m_1, \ldots, m_\nu$ ganze, positive mit ν ins Unendliche wachsende Zahlen, sodass also — wie oben —

$$\lim_{\nu=\infty} G_{m_\nu} = G_{m_0} + (G_{m_1} - G_{m_0}) + (G_{m_2} - G_{m_1}) + \cdots$$

gesetzt werden kann, so liegen für den zuvor betrachteten Fall, wo

$$G_{m_\nu} = \frac{1}{1 \pm z^{m_\nu}},$$

die Wurzeln der Gleichung $1 \pm z^{m_\nu} = 0$ sämmtlich auf der Peripherie des Einheitskreises; es kann daher kein Glied der obigen Reihe für irgend welche anderen Werthe von z unbestimmt werden (bezw. bei der Annäherung an solche Werthe von z ins Unendliche wachsen) ausser für solche, die auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Da aber längs dieser Linie auch der ursprünglich betrachtete Grenzwerth $\lim \frac{1}{1 \pm z^{m_\nu}}$ unbestimmt wird, so versagen hier Grenzwerth und Reihe gleichzeitig, während sie in der ganzen übrigen Ebene aus-

nahmslos denselben eindeutig bestimmten Werth besitzen: sie dürfen in Folge dessen schlechthin als äquivalent betrachtet werden, und man kann somit bei den oben angestellten Betrachtungen jenen Grenzwerth ohne weiteres durch die betreffende Reihe ersetzen.

Hingegen würden nun, wenn G_{m_ν} — gleich jenen Ausdrücken $\chi(z)$, $\omega(z)$ — einen Nenner von der Form $z^{m_\nu} \pm m_\nu$ oder $m_\nu z^{m_\nu} \pm 1$ besitzt, wie man auch die Reihe der Indices m_ν wählen mag, die Wurzeln der Gleichungen

$$(1) \qquad z^{m_\nu} \pm m_\nu = 0, \qquad\qquad (2) \quad m_\nu z^{m_\nu} \pm 1 = 0$$

auf ein gewisses räumlich ausgedehntes Gebiet der Ebene vertheilt sein (dasselbe erstreckt sich von der Peripherie des Einheitskreises bis zu einem ebenfalls um den Nullpunkt beschriebenen Kreise mit dem Radius $\sqrt[3]{3}$ für Gleichung (1) — bezw. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ für Gleichung (2) — einschliesslich dieser letzteren Grenzlinien); und zwar werden sich für wachsende Werthe von m_ν die betreffenden Stellen in Folge der Beziehungen

$$\sqrt[m_\nu]{m_\nu^{\pm 1}} = \left| m_\nu^{\pm \frac{1}{m_\nu}} \right| \left\{ \cos\frac{2\varkappa\pi}{m_\nu} + i \sin\frac{2\varkappa\pi}{m_\nu} \right\},$$

$$\sqrt[m_\nu]{-m_\nu^{\pm 1}} = \left| m_\nu^{\pm \frac{1}{m_\nu}} \right| \left\{ \cos\frac{2(\varkappa+1)\pi}{m_\nu} + i \sin\frac{(2\varkappa+1)\pi}{m_\nu} \right\},$$

und

$$\left| m_\nu^{\frac{1}{m_\nu}} \right| > 1, \quad \left| m_\nu^{-\frac{1}{m_\nu}} \right| < 1, \quad \lim_{\nu=\infty} \left| m_\nu^{\frac{1}{m_\nu}} \right| = \lim_{\nu=\infty} \left| m_\nu^{-\frac{1}{m_\nu}} \right| = 1$$

in der unmittelbaren Nähe des Einheitskreises (nämlich für Gleichung (1) auf der äusseren, für Gleichung (2) auf der inneren Seite der Peripherie), dass innerhalb jedes noch so kleinen, an die Peripherie angrenzenden Bereiches eine beliebig grosse Anzahl solcher Stellen liegt. Die betreffenden Reihen werden also in der unmittelbaren Umgebung des Einheitskreises unendlich oft versagen und nicht mehr mit jenen Grenzwerthen $\chi(z)$, $\omega(z)$ identisch sein: sie werden mithin gerade dort unbrauchbar, wo der charakteristische Unterschied von $\chi(z)$, $\omega(z)$ gegenüber dem zuvor betrachteten $\varphi(z)$ zum Vorschein kommen sollte.

München, December 1882.

Ueber die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders.

Von

F. Lindemann in Freiburg i. Br.

In der zweiten Auflage seines Handbuches der Kugelfunctionen (Bd. I, p. 404 ff.) beschäftigt sich Heine mit der Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + (\lambda^2 \cos^2\varphi - \mathfrak{B})y = 0,$$

in welcher λ und $\mathfrak{B}$ gegebene Constante bezeichnen. Diese Gleichung entsteht in derselben Weise durch einen Grenzübergang aus der Differentialgleichung der Lamé'schen Functionen, wie die Differentialgleichung der Bessel'schen oder Cylinder-Functionen aus derjenigen der Kugelfunctionen hervorgeht. Heine behandelt jedoch nur den Fall, wo die Constante $\mathfrak{B}$ in bestimmter Weise (als Wurzel einer gewissen transcendenten Gleichung) von der Constanten λ abhängt, und wo in Folge dessen ein Integral der vorgelegten Gleichung eine periodische Function von φ ist. Gerade dieser Fall nämlich bietet sich dar als Grenzfall der eigentlichen (d. i. ganzen rationalen) Lamé'schen Functionen, er spielt in den physikalischen Aufgaben eine hervorragende Rolle (besonders beim Probleme der Schwingungen einer elliptischen Platte) und wurde deshalb auch schon früher von den Herren Mathieu und Weber, wenn auch weniger vollständig studirt*).

Dem gegenüber wird es nicht ohne Interesse sein, auch den allgemeineren Fall in's Auge zu fassen, wo $\mathfrak{B}$ nicht einer der von Heine aufgestellten Bedingungsgleichungen genügt; und das soll im

*) E. Mathieu, Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique, Journal de Liouville, t. XIII, p. 137, 1868. — H. Weber, Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$, Math. Annalen, Bd. I, p. 29, 1869. — Vergl. auch Heine, op. cit. Bd. II, p. 208.

Folgenden geschehen. Wenn es gestattet ist, die Integration einer Differentialgleichung als vollständig erledigt zu bezeichnen, sobald man sämmtliche Zweige der particulären Integrale durch eine einzige für alle Werthe der unabhängigen Variabeln gültige Formel darstellen kann, so werden wir in der That die Integration der vorgelegten Gleichung im Folgenden vollständig erledigen; und zwar geschieht dies auf einem Wege, genau demjenigen analog, welcher von Herrn Hermite*) eingeschlagen wurde, um die Lamé'sche Differentialgleichung allgemein zu integriren.

1. Setzt man $z = \cos^2\varphi$, so geht die vorgelegte Differentialgleichung über in

$$(1) \qquad 4z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + 2(1-2z)\frac{dy}{dz} + (\lambda^2 z - \mathfrak{B})\,y = 0.$$

Aus der allgemeinen Theorie des Herrn Fuchs**) ziehen wir zunächst die folgenden Schlüsse (λ soll stets $\gtrless 0$ sein):

Da die Coefficienten von y und von y' für $z = \infty$ beide von der ersten Ordnung unendlich gross werden, so hat die Function y in $z = \infty$ einen *wesentlichen* Unstetigkeitspunkt (nach der von Herrn Weierstrass eingeführten Bezeichnungsweise).

Die Punkte $z = 0$ und $z = 1$ sind singuläre Punkte des allgemeinen Integrals y; im Uebrigen hat dasselbe in der ganzen Ebene, deren Punkte zur Darstellung der complexen Werthe von z dienen, den Charakter einer ganzen Function.

Die nach Herrn Fuchs (l. c. p. 147) zum Punkte $z = 0$ gehörige Fundamentalgleichung ist

$$2r(r-1) + r = 0.$$

Sie hat die Wurzeln $r = 0$ und $r = \frac{1}{2}$; folglich sind zwei von einander unabhängige particuläre Integrale gegeben durch Potenzreihen von der Form:

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_{00} &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad, \\ y_{01} &= z^{\frac{1}{2}}\left[b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots\right]; \end{aligned}$$

diese Reihen convergiren im Innern eines Kreises, dessen Radius gleich Eins ist, und dessen Mittelpunkt in $z = 0$ liegt. Die Coefficienten a_i, b_i sind leicht durch Recursionsformeln zu berechnen.

---

*) Feuilles lithographiées du Cours de 1872 à l'Ecole Polytechnique, und Annali di Matematica Serie II, t. 9, p. 25, 1878/79. Vergl. dazu Brioschi, ib. p. 13, Fuchs, ib. p. 25 oder Göttinger Nachrichten, 1878.

**) Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, Crelle's Journal, Bd. 66, p. 121, 1866.

In derselben Weise lassen sich für die Umgebung des Punktes $z = 1$ (d. h. für das Innere eines Kreises mit dem Radius Eins und dem Mittelpunkte $z = 1$) zwei von einander unabhängige particuläre Integrale entwickeln; dieselben seien

$$\tag{3} \begin{aligned} y_{10} &= a_0' + a_1'(1-z) + a_2'(1-z)^2 + a_3'(1-z)^3 + \cdots, \\ y_{11} &= (1-z)^{\frac{1}{2}}[b_0' + b_1'(1-z) + b_2'(1-z)^2 + b_3'(1-z)^3 + \cdots]. \end{aligned}$$

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewisse Constante, so bestehen zwischen den Integralen (3) und (2) Gleichungen der Form

$$\tag{4} \begin{aligned} y_{10} &= \alpha y_{00} + \beta y_{01}, \\ y_{11} &= \gamma y_{00} + \delta y_{01}. \end{aligned}$$

Die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma\ \delta$ kann man nach den allgemeinen Methoden der Herren Fuchs und Thomé bestimmen*); eine solche Bestimmung wird auch implicite durch die folgenden Untersuchungen gegeben.

2. Wenn z einen vollständigen Umgang um den Punkt $z = 1$ macht, so bleibt dabei y_{10} ungeändert, y_{11} dagegen wechselt sein Vorzeichen; bei Umgang von z um den Punkt $z = 0$ bleibt ebenso y_{00} unverändert, während y_{01} das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt. Nach (4) geht also bei einem Umgange von z

$$\begin{array}{lllll} \text{um } z = 0 & y_{10} & \text{über in} & \alpha y_{00} - \beta y_{01}, \\ \text{,,}\ \ z = 0 & y_{11} & \text{,,}\quad \text{,,} & \gamma y_{00} - \delta y_{01}, \\ \text{,,}\ \ z = 1 & y_{10} & \text{,,}\quad \text{,,} & y_{10}, \\ \text{,,}\ \ z = 1 & y_{11} & \text{,,}\quad \text{,,} & -y_{11}. \end{array}$$

Es ändert sich folglich der Ausdruck $ay_{10}^2 + by_{11}^2$ nicht am Punkte $z = 1$, und am Punkte $z = 0$ geht er über in

$$\begin{aligned} (a\alpha^2 + b\gamma^2)\, y_{00}^2 + (a\beta^2 + b\delta^2)\, y_{01}^2 - 2(a\alpha\beta + b\gamma\delta)\, y_{00}y_{01} \\ = ay_{10}^2 + by_{11}^2 - 4(a\alpha\beta + b\gamma\delta)\, y_{00}y_{01}. \end{aligned}$$

Bestimmen wir nun die Constanten a, b so, dass

$$a\alpha\beta + b\gamma\delta = 0$$

ist, so bleibt die Function $ay_{10}^2 + by_{11}^2$ ungeändert sowohl am Punkte $z = 0$ als am Punkte $z = 1$; d. h. diese Function hat überall in der complexen Ebene, allein ausgenommen die Stelle $z = \infty$, den Charakter einer ganzen Function. Nun sind

---

*) Fuchs, Ueber die Darstellung der Functionen complexer Variablen, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen, Crelle's Journal, Bd. 75 und 76, 1873; Thomé, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, ib. Bd. 87, 1879.

$$(5)\qquad \begin{aligned} y_1 &= y_{10}\sqrt{a} + iy_{11}\sqrt{b},\\ y_2 &= y_{10}\sqrt{a} - iy_{11}\sqrt{b} \end{aligned}$$

zwei particuläre Integrale von (1); man hat also den Satz:

Unter den particulären Integralen der Gleichung (1) *kann man im Allgemeinen zwei der Art auswählen, dass ihr Product gleich einer ganzen transcendenten Function ist; beide fallen zusammen, falls eine der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleich Null ist.**)

Der hier zuletzt hervorgehobene Ausnahmefall führt, wie wir unten sehen werden, auf die von Heine behandelten Functionen des elliptischen Cylinders.

3. Um das Product $y_1 y_2$ als Function von z darzustellen, braucht man die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht zu kennen. Ist nämlich die Differentialgleichung

$$2Ay'' + A'y' = By$$

gegeben, unter A, B Functionen von z verstanden, so genügt das Product $y_1 y_2 = \eta$ von zwei particulären Integralen, wie Herr Hermite a. a. O. bemerkt, der Gleichung dritter Ordnung:

$$2A\eta''' + 3A'\eta'' + A''\eta' = 8B\eta' + 2B'\eta \text{**)}.$$

In unserm Falle ist $A = z(1-z)$, $2B = -\lambda^2 z + \mathfrak{B}$, also:

$$(6)\qquad 2z(1-z)\eta''' + 3(1-2z)\eta'' + (4\lambda^2 z - 4\mathfrak{B} - 2)\eta' + \lambda^2\eta = 0.$$

Für die Umgebung des Punktes $z = 0$ sind drei particuläre Integrale dieser Gleichung, nämlich y_{00}^2, y_{01}^2 und $y_{00}\,y_{01}$ gegeben durch Reihen von der Form:

$$\begin{aligned} y_{00}^2 &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots,\\ y_{01}^2 &= c_1' z + c_2' z^2 + c_3' z^3 + \cdots,\\ y_{01}\,y_{00} &= z^{\frac{1}{2}}\,[c_0'' + c_1'' z + c_2'' z^2 + \cdots]. \end{aligned}$$

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir die erste Reihe durch eine andere mit $c_1 = 0$ ersetzen; wir beschäftigen uns also mit folgenden beiden particulären Integralen:

$$\begin{aligned} \eta_{00}(z) &= c_0 \quad + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots,\\ \eta_{01}(z) &= c_1' z + c_2' z^2 + c_3' z^3 + \cdots = y_{01}^2. \end{aligned}$$

Die Grössen c, c' könnte man leicht aus den a, b berechnen; sie bestimmen sich aber auch direct durch folgende Recursionsformeln:

*) Als ich dieses Resultat vor etwa einem Jahre Herrn Stickelberger mittheilte, erfuhr ich von ihm, dass er ebenfalls die Existenz einer solchen ganzen transcendenten Function erkannt habe.

**) Es findet sich a. a. O. in der betreffenden Gleichung ein Druckfehler; vergl. auch den erwähnten Aufsatz von Herrn Brioschi in demselben Bande der Annali di matematica.

$$(i+2)(i+1)(2i+3)c_{i+2} = 2(i+1)[i(i-1)+3i+1+2\mathfrak{B}]c_{i+1} - \lambda^2(4i+1)c_i$$

mit der Anfangsgleichung $6c_2 = -\lambda^2 c_0$; die c_i' genügen denselben Recursionsformeln, wenn man die Anfangsgleichung $3c_2' = (2\mathfrak{B}+1)c_1'$ hinzunimmt.

Ebenso giebt es zwei particuläre Integrale, welche sich für die Umgebung des Punktes $z=1$ nach Potenzen von $1-z$ entwickeln lassen in der Form:

$$\eta_{10}(z) = \quad 1 \quad + \gamma_2(1-z)^2 + \gamma_3(1-z)^3 + \cdots,$$
$$\eta_{11}(z) = (1-z) + \gamma_2'(1-z)^2 + \gamma_3'(1-z)^3 + \cdots.$$

Die Coefficienten γ_i und γ_i' bestimmen sich durch die Formeln:

$$(i+2)(i+1)(2i+3)\gamma_{i+2} = 2(i+1)[i(i-1)+3i+1+2\mathfrak{B}-2\lambda^2]\gamma_{i+1} + \lambda^2(4i+1)\gamma_i;$$

um die γ_i zu finden, hat man $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = 0$ zu nehmen; die γ_i' dagegen ergeben sich für $\gamma_0' = 0$, $\gamma_1' = 1$.

4. Nach Nr. 2 muss eine lineare Combination sowohl der Integrale η_{00}, η_{01} als der Integrale η_{10}, η_{11} gleich ein und derselben ganzen transcendenten Function sein, d. h. es müssen sich drei Constante k, l, m so bestimmen lassen, dass identisch

$$\eta_{00} + k\eta_{01} = l\eta_{10} + m\eta_{11}; \tag{7}$$

die Summe $\eta_{00} + k\eta_{01}$, geordnet nach Potenzen von z, liefert alsdann eine unendliche Reihe, welche für alle endlichen Werthe von z convergirt.

Um die beiden Seiten der Gleichung (7) einander gleich zu machen, genügt es, k, l, m so zu wählen, dass die betreffenden Functionen an einer Stelle, wo die Reihen für η_{00}, η_{01}, η_{10}, η_{11} sämmtlich convergiren, also etwa für $z=\frac{1}{2}$, sammt ihrem ersten und zweiten Differentialquotienten einander gleich werden. Dann nämlich stimmen ihre *sämmtlichen* Differentialquotienten in Folge von (6) für $z=\frac{1}{2}$ überein, und folglich sind beide Functionen identisch.

Bestimmt man also k, l, m aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-k\eta_{01}\left(\tfrac{1}{2}\right) + l\eta_{10}\left(\tfrac{1}{2}\right) + m\eta_{11}\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \eta_{00}\left(\tfrac{1}{2}\right),\\
-k\eta_{01}'\left(\tfrac{1}{2}\right) + l\eta_{10}'\left(\tfrac{1}{2}\right) + m\eta_{11}'\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \eta_{00}'\left(\tfrac{1}{2}\right),\\
-k\eta_{01}''\left(\tfrac{1}{2}\right) + l\eta_{10}''\left(\tfrac{1}{2}\right) + m\eta_{11}''\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \eta_{00}''\left(\tfrac{1}{2}\right),
\end{aligned} \tag{8}$$

so stellt jede der beiden Seiten von (7) *eine ganze transcendente Function dar.*

Da oben die Existenz einer solchen Function nachgewiesen wurde, so kann die Determinante der Gleichungen (8) nicht verschwinden, es sei denn, dass der in Nr. 2 erwähnte Ausnahmefall eintritt. Bei der hier verlangten Constantenberechnung hat man den Vortheil, dass die vorkommenden Potenzreihen nur für einen Punkt auszuwerthen sind, welcher sich im Innern ihres Convergenzbereiches befindet; bei directer Berechnung der in Nr. 1 auftretenden Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hätte man dagegen Potenzreihen für Punkte auf der Peripherie ihrer Convergenzkreise summiren müssen.

5. Nachdem so das Product $y_1 y_2$ gefunden ist, kann man leicht y_1 und y_2 selbst berechnen. Wir bezeichnen die eingeführte ganze transcendente Function durch $F(z)$, so dass

$$(9) \qquad y_1 y_2 = \eta_{00} + k\eta_{01} = F(z).$$

Bedeutet C eine Constante, so ist allgemein für zwei particuläre Integrale der Gleichung (1) $\sqrt{A}\,(y_2 y_1' - y_1 y_2') = C$, also in unserem Falle

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = \frac{C}{\sqrt{z(1-z)}}.$$

Nimmt man hierzu $y_1 y_2 = F(z)$ und

$$\frac{dy_1 y_1}{dz} = y_2 \frac{dy_1}{dz} + y_1 \frac{dy_2}{dz} = F'(z),$$

so folgt

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dz} = \frac{1}{2F(z)}\left[F'(z) + \frac{C}{\sqrt{z(1-z)}}\right],$$

$$\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dz} = \frac{1}{2F(z)}\left[F'(z) - \frac{C}{\sqrt{z(1-z)}}\right],$$

also schliesslich, wenn G, G' zwei neue Constanten bezeichnen:

$$(10) \qquad \begin{aligned} y_1 &= G\sqrt{F(z)}\cdot e^{C\int\frac{dz}{F(z)\sqrt{z(1-z)}}}, \\ y_2 &= G'\sqrt{F(z)}\cdot e^{-C\int\frac{dz}{F(z)\sqrt{z(1-z)}}}. \end{aligned}$$

Hierin muss die Constante C durch unsere besondere Wahl der Integrale y_1, y_2 bereits vollkommen bestimmt sein, sie muss ferner im Allgemeinen von Null verschieden sein, denn andernfalls würden beide Integrale zusammenfallen, was dann den in Nr. 2. erwähnten Ausnahmefall giebt. In der That nach Herrn Brioschi (a. a. pag. 12, woselbst $m=2$, $f(y_1, y_2) = y_1 y_2$, $4h(y_1 y_2) = -1$, $2Ap = A' = 1-2z$, $4Aq = -2B = (\lambda^2 z - \mathfrak{B})$ zu nehmen ist) besteht die Relation:

$$C^2 = z(1-z)(2F\cdot F'' - F'^2) + (1-2z)FF' + (\lambda^2 z - \mathfrak{B})F^2,$$

oder indem etwa $z = 0$ gesetzt wird:

$$(11) \qquad C^2 = c_0 c_1' k - \mathfrak{B} c_0^2.$$

Somit sind wir zu folgendem Resultate gelangt:

Bezeichnet man mit $F(z)$ die in Nr. 2 definirte und durch (9) *gegebene ganze transcendente Function, und ist die durch* (11) *gegebene Constante C von Null verschieden, so wird die Differentialgleichung* ( ) *durch die particulären Integrale* (10) *vollständig integrirt.*

6. Die bemerkte Ausnahme, wo $C = 0$, führt auf die von Heine behandelten Functionen. In der That, alsdann ist $y_1 dy_2 - y_2 dy_1 = 0$, folglich y_2 zu y_1 proportional, d. h. das Quadrat eines particulären Integrals der vorgelegten Gleichung (1) ist gleich einer ganzen transcendenten Function. Es wird also eine der vier in (2) und (3) aufgestellten Reihen in der ganzen Ebene convergent werden; und zwar würden für $z = \cos^2 \varphi$

y_{00} und y_{10} eine Reihe liefern, die nach geraden Potenzen von $\cos \varphi$ oder nach den Cosinus der geraden Vielfachen von φ fortschreitet,

y_{01} eine Reihe, welche geordnet ist nach den Cosinus der ungeraden Vielfachen von φ,

y_{11} eine Reihe nach den Sinus der ungeraden Vielfachen von φ.

Die ersten beiden geben also die *erste* Klasse von Heine's Functionen des elliptischen Cylinders, y_{01} führt zur *zweiten*, y_{11} zur *dritten* Klasse. Im ersten Falle ist die stetige Fortsetzung der Function y_{00} identisch mit y_{10}, wenn γ_0 passend gewählt wird. Im zweiten Falle wird die stetige Fortsetzung von y_{01} gleich einer linearen homogenen Function von y_{10} und y_{11}, im dritten die Fortsetzung von y_{11} gleich einer solchen Function von y_{00} und y_{01}.

Viertens kann es auch eintreten, dass man durch stetige Fortsetzung von y_{01} zu y_{11} gelangt und umgekehrt; dies wird geschehen, wenn sich von der Potenzreihe in y_{01} ein Factor $\sqrt{1-z}$ und gleichzeitig von der Potenzreihe in y_{11} ein Factor $\sqrt{z} = \sqrt{1-(1-z)}$ absondern lässt. Die Substitution $z = \cos^2 \varphi$ giebt dann eine nach den Sinus der geraden Vielfachen von φ fortschreitende Reihe, also die *vierte* Klasse der Heine'schen Functionen.

Man sieht, dass diese vier Klassen von Functionen den im Allgemeinen gültigen Integralen (10) in derselben Weise gegenüberstehen, wie die speciellen doppelt periodischen Functionen Lamé's den sonst auftretenden Integralen, die von Herrn Fuchs und Herrn Hermite gefunden wurden.

Da die zu den singulären Punkten $z = 0$ und $z = 1$ gehörigen Fundamentalgleichungen nur die Wurzeln 0 und $\frac{1}{2}$ haben, so sind hiermit alle möglichen Ausnahmefälle erschöpft; dass auch jeder von ihnen wirklich auftreten kann, zeigt eben die Heine'sche Untersuchung.

Freiburg i. B., den 21. Januar 1883.

Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte.*)

Von

Karl Rohn in Leipzig.

Die ersten Untersuchungen in dieser Richtung finden sich bei Schläfli, welcher in seinem Aufsatze über Flächen dritter Ordnung**) alle bei derartigen Flächen überhaupt auftretenden Formen von Knotenpunkten aufgestellt hat. Die Flächen 3. Ordnung sind hinsichtlich ihrer singulären Punkte später abermals von Rodenberg***) behandelt worden, welcher auch die einzelnen hier auftretenden Arten von Knotenpunkten in Gyps modellirt hat.†) Ausserdem ist von verschiedenen Mathematikern††) hin und wieder der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte als einer Specialisirung der gewöhnlichen Knotenpunkte gedacht worden, wie sie sich bei anderen Untersuchungen gelegentlich ergeben haben.

Der erste Theil der nachfolgenden Deductionen soll nun die Eintheilung der biplanaren Knotenpunkte in verschiedene Classen, je nachdem diese Knotenpunkte die Classenzahl der algebraischen Fläche um 3, 4, 5, ... Einheiten erniedrigen, rechtfertigen und ein geometrisches Kriterium hierfür angeben. Zugleich wird das Entstehen dieser Knotenpunkte aus gewöhnlichen Knotenpunkten und damit das Verhalten der Polarflächen in einem solchen Knotenpunkte erläutert werden. Das gestaltliche Verhalten und die analytische Bestimmung der Classe des biplanaren Knotenpunktes werden diese Betrachtungen beschliessen. Dabei ergiebt sich denn das Resultat, dass die Singularität der Schnittcurven in den singulären Ebenen des Knotenpunktes von keinem wesentlichen Belang für denselben sind — ein Resultat, das bei Flächen 3. Ordnung aller-

*) Hr. Rodenberg hat eine Arbeit über denselben Gegenstand geschrieben, wird jedoch, nachdem er von meiner Note Kenntniss genommen, dieselbe nicht in ihrer jetzigen Form publiciren, da sie sich vielfältig hiermit deckt. [April 1883.]

**) Schläfli, Philosophical Transactions of the R. S. of London, 1863; Bd. CLIII, p. 193.

***) Rodenberg, Math. Annalen Bd. XIV, p. 46ff.

†) Modelle von Flächen 3. Ordnung, sowie der Hessischen Flächen, herausgegeben von Brill in Darmstadt.

††) Hierzu gehören Cayley, Kummer, Zeuthen, und Andere.

dings noch nicht erkannt wird, indem hier die Classe des singulären Punktes und die genannten Curven in festem Zusammenhang stehen.

Der zweite Theil dieser Note behandelt die uniplanaren Knotenpunkte von algebraischen Flächen und das Verhalten des Tangentenkegels aus einem beliebigen Raumpunkte an eine solche Fläche, soweit es von dem uniplanaren Knotenpunkte abhängig ist. Daran schliesst sich die analytische Bestimmung der Classe des Punktes, sowie sein gestaltliches Aussehen. Wir werden hier erkennen, dass die Schnittcurve in der singulären Ebene von wesentlicher Bedeutung für den uniplanaren Knotenpunkt ist, und dass die einzelnen Classen noch sehr verschieden gestaltete Knotenpunkte enthalten — beides Dinge, welche bei den biplanaren Knotenpunkten (wenn wir von der Realität oder Irrealität der singulären Ebenen absehen) nicht statt haben.

Der biplanare Knotenpunkt.

Wir behandeln zuerst die aufgeworfenen Fragen bei den biplanaren Knotenpunkten. Welche Besonderheiten erhält der Tangentenkegel aus einem beliebigen Raumpunkte P an eine Fläche durch das Auftreten eines biplanaren Knotenpunktes? Bekanntlich liegt die Berührungscurve des Tangentenkegels aus P auf der ersten Polarfläche dieses Punktes in Bezug auf die gegebene Fläche; diese Curve soll weiterhin kurz als Leitcurve des Tangentenkegels bezeichnet werden. Besitzt nun die gegebene Fläche einen gewöhnlichen Knotenpunkt, so geht die Polarfläche eines jeden Raumpunktes P durch diesen Knotenpunkt einfach hindurch; ihre Tangentialebene in diesem Punkte ist dabei nichts Anderes als die Polarebene des Punktes P in Bezug auf den Tangentialkegel*) 2. Ordnung im Knotenpunkte.

Es gehen in Folge dessen im Allgemeinen zwei reelle oder zwei conjugirt imaginäre Zweige der Leitcurve durch den Knotenpunkt hindurch; der Tangentenkegel aus P besitzt demgemäss eine reelle oder isolirte Doppelkante, welche durch den Knotenpunkt verläuft. Geht aber der gewöhnliche Knotenpunkt in einen biplanaren Knotenpunkt über, d. h. zerfällt der Tangentialkegel im Knotenpunkt in ein Ebenenpaar, so muss jede Polarfläche in diesem Knotenpunkte eine Tangentialebene besitzen, welche durch die Schnittgerade jenes Ebenenpaares oder die *singuläre Gerade* des Knotenpunktes hindurchgeht. Die beiden Aeste der Leitcurve im Knotenpunkt haben demnach eine und dieselbe Tangente, welche mit der singulären Geraden zusammenfällt, so dass

*) Ich bezeichne den Kegel, welcher von allen Tangenten aus einem festen Punkte an eine Fläche gebildet wird, als *Tangentenkegel*; den Kegel 2. Ordnung aber in einem Knotenpunkte der Fläche, welcher alle Tangenten in diesem Punkte enthält, als *Tangentialkegel*.

der Tangentenkegel aus einem Punkte P zwei Mäntel aufweist, welche längs der Kante durch den biplanaren Knotenpunkt dieselbe Tangentialebene besitzen, nämlich die Ebene durch P und die singuläre Gerade.

Nun unterscheidet man biplanare Knotenpunkte $B_3, B_4, B_5, \ldots, B_\varkappa$, je nachdem dieselben die Classenzahl der bezüglichen Fläche um $3, 4, 5, \ldots, \varkappa$ Einheiten erniedrigen. Diese Classenerniedrigung stimmt überein mit der Erniedrigung der Classe des Tangentenkegels aus P, da die Classe der Fläche und die des Tangentenkegels gleich sind. Legt man demnach durch P eine beliebige Gerade g, so wird die Zahl der Tangentialebenen durch g an den Tangentenkegel durch das Auftreten eines $B_\varkappa$ um $\varkappa$ reducirt, d. h. die Ebene durch g und $B_\varkappa$ zählt für $\varkappa$ solcher Tangentialebenen. Da aber der Tangentenkegel aus P die Kante durch den biplanaren Knotenpunkt nur zur Doppelkante hat (nicht etwa zur dreifachen oder mehrfachen Kante), so ist die Reduction der Classe des Kegels um $\varkappa$ Einheiten nur in einer einzigen Weise möglich.

Ist $\varkappa$ eine *gerade Zahl*, so berührt sich der Tangentenkegel aus P längs der Kante durch den singulären Punkt selbst, in dem die beiden durch diese Kante gehenden Mäntel $\frac{\varkappa}{2}$ consecutive Kanten gemeinsam haben. Es ist sofort ersichtlich, dass die Ebene durch g und diese singuläre Kegelkante wirklich für $\varkappa$ Tangentialebenen zählt, da man die singuläre Kante durch Zusammenrücken von $\frac{\varkappa}{2}$ gewöhnlichen Doppelkanten entstehen lassen kann. Ist dagegen $\varkappa$ eine *ungerade Zahl*, so ist die Kante des Tangentenkegels aus P, welche den singulären Punkt der Fläche enthält, eine Rückkehrkante dieses Kegels, und zwar haben die beiden Manteltheile $\frac{\varkappa-1}{2}$ consecutive Tangentialebenen (incl. der Rückkehrtangentialebene) gemeinsam. Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man ohne Weiteres, wenn man die singuläre Kante jenes Kegels durch Zusammenrücken einer gewöhnlichen Rückkehrkante mit $\frac{\varkappa-3}{2}$ Doppelkanten entstehen lässt.

Fassen wir jetzt nochmals den biplanaren Knotenpunkt $B_\varkappa$ ins Auge, wo $\varkappa$ eine *gerade* Zahl ist. Die erste Polarfläche eines Punktes P schneidet alsdann nach dem Vorhergehenden aus der gegebenen Fläche eine Curve aus, deren beide Zweige durch den singulären Punkt $\frac{\varkappa}{2}$ consecutive Punkte gemeinsam haben. Gleiches gilt für die Polarfläche eines beliebigen anderen Punktes Q. Die beiden Polarflächen schneiden sich in einer Curve, welche bekanntlich aus der betrachteten Fläche die Berührungspunkte der Tangentialebenen durch P und Q ausschneidet. Diese Curve geht offenbar durch den Knotenpunkt $B_\varkappa$

einfach hindurch, und schneidet unsere Fläche daselbst in $\varkappa$ zusammenfallenden Punkten, da die Ebene durch P, Q und $B_\varkappa$ für $\varkappa$ Tangentialebenen zu rechnen ist. Aber diese $\varkappa$ Schnittpunkte liegen auf der gegebenen Fläche und den beiden Polarflächen, und in Folge dessen gehören sie der Schnittcurve der gegebenen Fläche mit der Polarfläche des Punktes P an. Die Polarfläche eines beliebigen Punktes Q schneidet also die letztgenannte Curve in $\varkappa$ zusammenfallenden Punkten, d. h. sie geht durch die $\frac{\varkappa}{2}$ consecutiven Punkte hindurch, welche die beiden Zweige jener Curve gemeinsam haben. Wir ersehen daraus, dass alle Polarflächen durch die nämlichen $\frac{\varkappa}{2}$ consecutiven Punkte unserer Fläche hindurchgehen, und dass diese Punkte somit $\frac{\varkappa}{2}$ consecutive Knotenpunkte unserer Fläche sind.*) Ein biplanarer Knotenpunkt $B_\varkappa$ entsteht also dadurch, dass $\frac{\varkappa}{2}$ gewöhnliche Knotenpunkte einander unendlich nahe rücken, sie bilden dabei $\frac{\varkappa}{2}$ consecutive Punkte eines Curvenzweiges, der durch die Art des Zusammenrückens mitbestimmt wird.

Ist $\varkappa$ eine *ungerade* Zahl, so findet man ganz in derselben Weise wie vorher, dass der biplanare Knotenpunkt $B_\varkappa$ entsteht, indem ein B_3 und $\frac{\varkappa-3}{2}$ gewöhnliche Knotenpunkte unendlich nahe rücken; diese Knotenpunkte bestimmen hier $\frac{\varkappa+1}{2}$ consecutive Punkte eines Curvenzweiges, indem der B_3 einen Punkt des Zweiges sammt seiner Tangente bestimmt. Die ersten Polarflächen aller Raumpunkte haben jene $\frac{\varkappa+1}{2}$ consecutiven Punkte gemeinsam. Für einen B_3 gestaltet sich die Sache so, dass alle Polarflächen die singuläre Gerade des Knotenpunktes zur Tangente haben.

Die gewonnenen Resultate lassen sich kurz so aussprechen. *Die biplanaren Knotenpunkte bilden zwei gänzlich verschiedene Typen, je nachdem sie die Classe der betr. Fläche um eine gerade oder ungerade Zahl erniedrigen; im ersten Fall wird die Fläche aus einem beliebigen Punkte des Raumes durch einen Kegel mit Selbstberührung, im zweiten Falle durch einen Kegel mit Rückkehrkante projicirt. Bezeichnen wir die Classenerniedrigung beide Male mit* $\varkappa$, *so ist der biplanare Knotenpunkt im ersten Falle durch Zusammenrücken von* $\frac{\varkappa}{2}$ *gewöhnlichen Knotenpunkten entstanden, im zweiten Falle dagegen durch Zusammenrücken von einem* B_3 *mit* $\frac{\varkappa-3}{2}$ *gewöhnlichen Knotenpunkten. Demgemäss ist*

*) Man macht sich am Besten eine Vorstellung von dem Gesagten, wenn man an die Fläche mit Doppelcurve denkt; hier hat man unendlich viele consecutive Knotenpunkte, im obigen Falle jedoch nur eine endliche Anzahl.

die Selbstberührung des Projectionskegels der Art, dass beide Mäntel $\frac{\varkappa - 2}{2}$ consecutive Tangentialebenen gemein haben, und die Rückkehrkante der Art, dass $\frac{\varkappa - 1}{2}$ Tangentialebenen beiden Mänteln gemeinsam sind.

Wir unterscheiden daher *biplanare Knotenpunkte von geradem Typus und solche von ungeradem Typus.* Bevor wir jedoch ein charakteristisches Merkmal für die Gestalt der beiden Typen aufstellen können, müssen wir noch eine Unterscheidung innerhalb der Typen selbst treffen. Das singuläre Ebenenpaar im biplanaren Knotenpunkte kann nämlich reell oder conjugirt imaginär*) sein. Im einen Falle bilden also die Tangenten im Knotenpunkte noch zwei reelle Strahlbüschel, im andern Falle dagegen giebt es nur noch eine einzige reelle Tangente im Knotenpunkt. Es gelingt uns nun leicht mit Hülfe des vorher gewonnenen Resultates etwas Näheres über die gestaltlichen Verhältnisse der Fläche in der Nähe des biplanaren Knotenpunktes auszusagen. Wir müssen jedoch die einzelnen Fälle für sich behandeln, und wenden uns zunächst dem *biplanaren Knotenpunkt mit conjugirt imaginärem Ebenenpaar* zu, weil hier die Verhältnisse am einfachsten sich gestalten. Betrachten wir für einen Augenblick eine Fläche mit einem gewöhnlichen Knotenpunkt und eine kleine Kugel, deren Mittelpunkt im Knotenpunkt gelegen ist. Es genügt hier den *einen* der beiden Flächentheile, welche im Knotenpunkt zusammenstossen, ins Auge zu fassen. Derselbe wird von der Kugel in einer Curve geschnitten, und der Strahlkegel aus dem Knotenpunkt nach der Curve hat die Eigenschaft immer näher an den Tangentialkegel im Knotenpunkte heranzudrängen, je kleiner die schneidende Kugel genommen wird; so zwar, dass für eine unendlich kleine Kugel beide Kegel identisch werden.

Uebertragen wir jetzt diese Dinge auf einen biplanaren Knotenpunkt mit conjugirt imaginärem Ebenenpaar. Giebt es hier einen reellen Flächentheil, der sich in den biplanaren Knotenpunkt hineinerstreckt, so wird derselbe von der kleinen Kugel in einer reellen Curve geschnitten, und die Strahlen aus dem Knotenpunkt nach den Punkten dieser Curve drängen, mit abnehmender Kugel alle nach der einzigen reellen Tangente im Knotenpunkte zu. Der Strahlkegel nach der Schnittcurve nähert sich also hier keinem bestimmten Grenzkegel, vielmehr wird seine Oeffnung mit abnehmender Kugel immer kleiner und für eine unendlich kleine Kugel selbst unendlich klein. Der Flächentheil wird demnach gegen den Knotenpunkt hin, wenn

*) Eigentlich müsste man auch noch conjugirt imaginäre biplanare Knotenpunkte mit in die Betrachtung ziehen, die wir hier jedoch ausser Acht lassen, da sie kein gestaltliches Interesse bieten.

man so sagen darf, unendlich spitz, er bekommt ein dornartiges Aussehen, und wir wollen deshalb eine solche Flächenpartie kurz als *Dorn* bezeichnen. Man vergleiche die nebenstehende Figur.

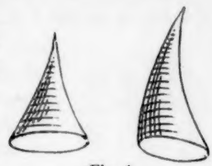


Fig. 1

Nun sagt der vorher gefundene Satz, dass sich eine Fläche in der Nähe eines biplanaren Knotenpunktes von ungeradem Typus immer als Curve mit Spitze, die ja stets reell sein muss, projicirt, wo man auch das Projectionscentrum wählen mag. Es ergiebt sich somit, dass *eine Fläche in der Nähe eines biplanaren Knotenpunktes von ungeradem Typus mit conjugirt imaginärem Ebenenpaar stets die Gestalt eines Dornes annimmt.* Dagegen wird eine Fläche mit biplanarem Knotenpunkt von geradem Typus stets als Curve mit Selbstberührungspunkt projicirt, wobei sich in diesem Punkte entweder reelle oder conjugirt imaginäre Curvenäste berühren. *Die Fläche hat demnach in der Nähe eines biplanaren Knotenpunktes mit conjugirt imaginärem Ebenenpaar, wenn derselbe von geradem Typus ist, entweder das Aussehen von zwei sich gegenüberstehenden Dornen, oder der Knotenpunkt ist ein isolirter.* Den letzten Fall kann man sich einfach durch Zusammenrücken von zwei oder mehreren gewöhnlichen isolirten Knotenpunkten entstanden denken.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die biplanaren Knotenpunkte mit reellem Ebenenpaar zu untersuchen. Die beiden reellen Ebenen, welche hier auftreten, theilen den ganzen Raum in vier Winkelräume, welche sich paarweise gegenüberstehen. Die Fläche muss sich aber in unmittelbarer Nähe des Knotenpunktes dem reellen Ebenenpaar aufs Engste anschliessen. Legt man also wiederum um den Knotenpunkt eine kleine Kugel, so muss ihre Schnittcurve mit der Fläche in der Nähe *der* Curve verlaufen, welche sie aus dem Ebenenpaar ausschneidet; und je kleiner man die Kugel nimmt, desto näher müssen sich die beiden Curven rücken.

Ist der Knotenpunkt ein solcher von ungeradem Typus, so ist die Contour der Fläche, von einem beliebigen Punkte aus gesehen, immer eine Curve mit einer Spitze im Knotenpunkt, so dass die Fläche dort eine Gestalt annimmt, wie sie beistehende Figur zeigt. Man sieht, dass die Schnittcurve der Fläche mit der kleinen Kugel erhalten wird, indem man bei der aus den beiden Kreisen bestehenden Curve die Doppelpunkte in entgegengesetztem Sinne auflöst. Diese Schnittcurve bildet deshalb nur noch einen einzigen Zug, und die Fläche besteht also in der Umgebung des Knotenpunktes nur aus einem einzigen Theile. Die Contour kehrt ersichtlich ihre Spitze um, wenn

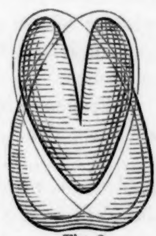


Fig. 2

man das Auge aus einem der vier Winkelräume in den Nachbarraum bewegt.

Ist der Knotenpunkt dagegen von geradem Typus, so besitzt die Fläche in seiner Umgebung offenbar die nebenan verzeichnete Gestalt.

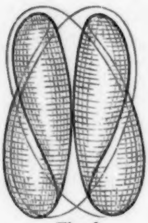


Fig. 3

Die Schnittcurve der Fläche mit der kleinen Kugel besteht hier noch aus zwei getrennten Zügen, und es stossen in dem Knotenpunkte noch zwei getrennte Flächentheile zusammen. Aus den Punkten zweier Winkelräume projicirt sich die Fläche in der Form von zwei reellen Zweigen, welche sich berühren, von den Punkten der beiden andern Winkelräume aus erscheint der Knotenpunkt als isolirter Doppelpunkt der Projection.

Fassen wir die Resultate, welche sich bei der Betrachtung der Gestaltung der Knotenpunkte ergeben haben, zusammen, so können wir sagen: *In der Umgebung eines biplanaren Knotenpunktes von ungeradem Typus existirt nur ein einziger Flächentheil, der aber stets reell ist. Derselbe hat die Form eines Dornes, wenn die singulären Ebenen conjugirt imaginär sind; dagegen wird bei reellen singulären Ebenen die Gestalt der Fläche in der Umgebung des Knotenpunktes annähernd durch das Ebenenpaar wiedergegeben, wenn man zuvor die beiden Abschnitte der singulären Geraden in entgegengesetztem Sinne auflöst. In der Umgebung eines biplanaren Knotenpunktes von geradem Typus ist die Fläche entweder ganz imaginär — der Knotenpunkt ist alsdann ein isolirter — oder sie besteht aus zwei sich gegenüberstehenden Flächentheilen. Dieselben haben die Gestalt von Dornen, wenn die singulären Ebenen conjugirt imaginär sind; im andern Falle erhält man annähernd die Gestalt der beiden Flächentheile aus dem Ebenenpaar durch Auflösen der beiden Abschnitte der singulären Geraden in gleichem Sinne.*

Im Anschlusse an diese gestaltlichen Untersuchungen verweise ich auf die Arbeit von Klein im 6ten Bande dieser Annalen, wo der Uebergang eines gewöhnlichen Knotenpunktes in einen B_3 besprochen und durch Figuren erläutert ist. In ähnlicher Weise kann man zeigen, wie die höheren biplanaren Knotenpunkte durch Zusammenrücken von gewöhnlichen Knotenpunkten (unter denen auch *ein* B_3 sein kann) entstehen.

Fragen wir uns jetzt nach den Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Constanten einer Fläche bestehen, wenn dieselbe einen B_3, B_4, B_5, . . ., B_x besitzt. Zur Beantwortung dieser Frage kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Entweder man bestimmt die Zahl m der consecutiven Punkte, welche allen ersten Polarflächen gemeinsam sind, dann ist der bezügliche Knotenpunkt ein B_{2m} oder ein B_{2m-1}, je nachdem derselbe von geradem oder ungeradem Typus

ist. Oder man bestimmt die Zahl der Punkte, welche die Schnittcurve zweier Polarflächen mit der gegebenen Fläche im Knotenpunkte gemein hat. Den letzten Weg hat bereits Schläfli bei den Flächen 3. Ordnung in der zu Anfang citirten Abhandlung eingeschlagen, und wir wollen ihn auch hier betreten. Wir machen dabei den singulären Punkt zum Coordinatenanfangspunkt und nehmen die singulären Ebenen*) zur X-Ebene resp. Y-Ebene; dann erhält die Fläche die Gleichungsform:

$$f = xy + (xyz)^3 + (xyz)^4 + \cdots = 0.$$

In dieser Gleichung bedeuten die Symbole $(xyz)^3$, $(xyz)^4$, ... ganz allgemeine Ausdrücke in $x\,y\,z$, welche in diesen Variabeln homogen vom dritten, vierten, ... Grade sind.

Die Schnittcurve zweier Polarflächen wird dann die Fläche: $f = 0$ in so viel Punkten $x = y = z = 0$ schneiden, als die Reduction der Classenzahl durch den biplanaren Knotenpunkt beträgt. Wählt man der Bequemlichkeit halber die Polarfläche des unendlich fernen Punktes der XZ-Axe und die Polarfläche des unendlich fernen Punktes der YZ-Axe, so ergiebt sich als die gesuchte Classenerniedrigung die Zahl derjenigen gemeinschaftlichen Punkte der drei Flächen:

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

welche in den Anfangspunkt hineinfallen. Die symbolischen Gleichungen dieser drei Flächen werden:

$$\begin{aligned} f &= xy + (xyz)^3 + (xyz)^4 + \cdots = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= y + (xyz)_1{}^2 + (xyz)_1{}^3 + \cdots = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x + (xyz)_2{}^2 + (xyz)_2{}^3 + \cdots = 0, \end{aligned}$$

wenn man die Ableitungen des Symbols $(xyz)^n$ nach x resp. y mit $(xyz)_1{}^{n-1}$ resp. $(xyz)_2{}^{n-1}$ bezeichnet. Diese Gleichungen sind nun für den Grenzfall $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ zu betrachten. Unter der Annahme sehr kleiner Werthe von x, y und z, kann man mit Benutzung der beiden letzten Gleichungen sowohl x als auch y in eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen von z entwickeln. Diese Potenzreihen sind ersichtlich von der Form:

$$\begin{aligned} x &= c\,z^2 + d\,z^3 + e\,z^4 + f\,z^5 + \cdots, \\ y &= c_1 z^2 + d_1 z^3 + e_1 z^4 + f_1 z^5 + \cdots, \end{aligned}$$

---

*) Sind die singulären Ebenen imaginär, so kann man die Gleichung, unter Annahme rechtwinkliger Coordinaten, immer auf die Form bringen:

$$f = x^2 + \varrho y^2 + (xyz)^3 + (xyz)^4 + \cdots,$$

und mit dieser Form genau dieselben Operationen vornehmen, wie mit der Form des Textes.

wo sich die Constanten leicht aus den Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ bestimmen lassen. So sind die Constanten c und c_1 nichts Anderes als die negativen Coefficienten von z^2 in $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ resp. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Es können auch mehrere Constanten gleich Null werden, so dass eine oder beide Reihen mit einer höheren als der zweiten Potenz beginnen.

Setzt man nun in die Gleichung $f = 0$ für x und y ihre Potenzreihen ein, so geht f selbst in eine Potenzreihe von z über, welche zunächst mit z^3 beginnen wird, also:

$$f = Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots.$$

Soll aber der Punkt $x = y = z = 0$ ein biplanarer Knotenpunkt $B_\varkappa$ sein, so muss die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ mit der Fläche $f = 0$ dort $\varkappa$ aufeinanderfolgende Punkte gemein haben, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Reihe für f beginnt mit dem Gliede $z^\varkappa$, also:

$$f = Kz^\varkappa + Lz^{\varkappa+1} + \cdots.$$

Demnach muss ein biplanarer Knotenpunkt $B_\varkappa$ ausser den Bedingungen, welche bereits ein B_3 erfordert, noch $\varkappa - 3$ Bedingungen: $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, ... erfüllen. Die Existenz eines $B_\varkappa$ verlangt also $\varkappa - 1$ Relationen zwischen den Constanten einer Fläche. Soll der $B_\varkappa$ an einer vorgeschriebenen Stelle liegen, so ergeben sich $\varkappa + 2$ Relationen. (Ist auch noch die Curve vorgeschrieben, auf welcher die consecutiven Knotenpunkte liegen, aus denen sich der $B_\varkappa$ zusammensetzt, so wird die Zahl der Relationen $2\varkappa$ oder $2\varkappa + 1$ je nachdem $\varkappa$ gerade oder ungerade ist).

Für einen B_4 erhält man die Bedingung $D = 0$, d. h. es muss das Glied von z^3 in der ursprünglichen Gleichung $f = 0$ wegfallen. Für einen B_5 erhält man die weitere Bedingung $E = 0$; es setzt sich aber E aus den Coefficienten von xy, xz^2, yz^2, z^4 und den Constanten c und c_1 zusammen. Ebenso fordert ein B_6 die weitere Relation $F = 0$, welche zwischen den Coefficienten von x^2z, y^2z, xyz, xz^3, yz^3, z^5, xy, xz^2, yz^2 und den Constanten c, c_1, d, d_1 bestehen muss. In gleicher Weise kann man die Bedingungen für einen $B_\varkappa$ aufstellen, die mit zunehmenden $\varkappa$ ganz ungeheuer complicirt werden.

Eine zweite Methode zur Bestimmung der Reduction der Classe einer Fläche durch einen biplanaren Knotenpunkt geht von der Gleichungsform aus:

$$f = x^2 + \varrho y^2 + (xyz)^3 + (xyz)^4 + \cdots = 0.$$

Die Curve $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ besitzt im Knotenpunkte zwei Curvenäste,

deren Potenzreihen man mit Hülfe dieser Gleichungen aufstellen kann, so dass man erhält:

$$y = \mathfrak{P}_1(z),\ x = \mathfrak{P}_1'(z) \quad \text{und} \quad y = \mathfrak{P}_2(z),\ x = \mathfrak{P}_2'(z).$$

Der Tangentencylinder parallel der X-Axe berührt längs dieser Curvenäste, und schneidet die Ebene $x = 0$ offenbar in den beiden Aesten: $y = \mathfrak{P}_1(z)$ und $y = \mathfrak{P}_2(z)$. Stimmen beide Potenzreihen bis zur Potenz z^ν exclusive überein (wo ν entweder eine ganze Zahl oder die Hälfte einer ganzen Zahl ist), so ist die Reduction der Classe der ebenen Curve durch den singulären Punkt gleich 2ν. Ebenso ist die Reduction der Classe des Cylinders durch die singuläre Kante und somit die Erniedrigung der Classe der Fläche durch den biplanaren Knotenpunkt gleich 2ν. Dass das Gesagte in der That immer Gültigkeit behält ganz einerlei, welche Lage die X-Axe besitzt (wenn sie nur nicht in einer singulären Ebene liegt) lässt sich durch die gleichen Betrachtungen beweisen, wie sie sich auf Seite 140 und 141 befinden.

Nachdem wir nun die Art der Bedingungsgleichungen aufgestellt haben, welche für einen biplanaren Knotenpunkt $B_\varkappa$ erfüllt sein müssen, wenden wir uns der Frage zu, ob die Schnittcurven in den singulären Ebenen mit der Classenerniedrigung des Knotenpunktes in irgend einem Zusammenhange stehen. Man ersieht aus der Gleichung der Fläche ohne Weiteres, dass die Schnittcurven im Allgemeinen einen dreifachen Punkt besitzen. Ist der Knotenpunkt ein B_3, so sind die 3 Tangenten im dreifachen Punkt der Schnittcurven noch ganz willkürlich, ist dagegen der Knotenpunkt ein $B_\varkappa$, wo $\varkappa > 3$ ist, so fällt eine der drei Tangenten mit der singulären Geraden zusammen. Das letztere folgt daraus, dass alsdann $D = 0$ sein, d. h. das Glied von z^3 verschwinden muss. Die weiteren Bedingungen $E=0$, $F=0, \ldots, K=0$, welche für einen $B_\varkappa$ sich ergeben, haben ersichtlich auf den singulären Punkt der Curven in den singulären Ebenen keinen Einfluss. Wir können also sagen: *Die Schnittcurven in den singulären Ebenen eines biplanaren Knotenpunktes $B_\varkappa$ sind im Allgemeinen Curven mit einem dreifachen Punkte, dessen eine Tangente die singuläre Gerade ist; weitere Besonderheiten brauchen dabei nicht aufzutreten.*

Die Classenerniedrigung des Knotenpunktes hat demnach keinen Einfluss auf die Curven in den singulären Ebenen; es bleibt aber noch das Umgekehrte zu untersuchen, nämlich der Einfluss dieser Curven auf die Classenerniedrigung des Knotenpunktes. Besitzen die Curven der beiden singulären Ebenen nur je einen *dreifachen* Punkt, und specialisirt man denselben dadurch, dass man zwei oder auch alle drei Tangenten zusammenfallen lässt (so dass Spitzen und Selbstberührungen entstehen), so findet man sofort, dass die hierdurch entstehenden Relationen zwischen den Constanten der Fläche keinen der Ausdrücke

$D, E, F, \ldots$ zum Verschwinden bringen. Besitzt hingegen eine der beiden Curven in den singulären Ebenen einen δ-fachen Punkt, so beginnt eine der beiden Potenzreihen für x und y mit $z^{\delta-1}$ und der Knotenpunkt wird ein $B_\varkappa$, wo $\varkappa \gtrless \delta$. Weitere Specialisirungen des δ-fachen Punktes üben keinen Einfluss. Wir können also nur sagen: *Besitzt eine der beiden Curven in den singulären Ebenen einen δ-fachen Punkt, so reducirt der betr. Knotenpunkt die Classe mindestens um δ Einheiten.* Alle diese Bemerkungen haben jedoch nur dann volle Gültigkeit, wenn die Ordnung der Fläche hoch genug ist, wie man sehr deutlich bei den Flächen 3. Ordnung sieht.

Nun fragt es sich noch, ob ein $B_\varkappa$ wesentlich verschiedene Gestalten zeigt, je nachdem die Schnittcurven in seinen singulären Ebenen einen 3-fachen, 4-fachen ... Punkt besitzen. Hierzu erinnere ich an die Verhältnisse, welche bei einem einfachen Punkt einer Fläche auftreten, je nachdem seine Tangentialebene eine Curve mit Doppelpunkt, dreifachem ... Punkt ausschneidet. Derartige Vorkomnisse pflegt man nicht besonders zu unterscheiden (wenn es sich nicht gerade um Haupttangentencurven handelt), obgleich der Tangentenkegel an die Fläche, von allen Punkten der Tangentialebene aus, die Kante durch den Berührungspunkt als singuläre Kante besitzt. Genau dasselbe tritt für einen $B_\varkappa$ ein, indem der Tangentenkegel im Allgemeinen die früher gefundene Gestalt besitzt, für alle Punkte einer singulären Ebene jedoch wesentlich durch die Schnittcurve in dieser Ebene afficirt wird. Lässt man einen Punkt, dessen Tangentialebene die Fläche in einer Curve mit δ-fachem Punkt schneidet, in einen $B_\varkappa$ hineinrücken, so zeigt die bezügliche singuläre Ebene ebenfalls eine Curve mit δ-fachem Punkt, wie man das durch Rechnung leicht zeigen kann. Da man nun Punkte, deren Tangentialebenen Curven mit Doppelpunkt, dreifachem Punkt u. s. w. ausschneiden, nicht unterscheidet, so ist eine solche Unterscheidung auch bei biplanaren Knotenpunkten überflüssig.

Der uniplanare Knotenpunkt.

Die Untersuchung des uniplanaren Knotenpunktes knüpft am bequemsten an die Flächengleichung an, die man zuvor in einer zweckmässigen Form schreibt. Sie ist, wie sich später zeigt, die folgende:

$$f = z^2 + \{(xy)^\varkappa + (xy)^{\varkappa+1} + \cdots\} + z\,\{[xy]^\lambda + [xy]^{\lambda+1} + \cdots\} + z^2\,\{\cdots\} + z^3\,\{\cdots\} + \cdots = 0.$$

oder kürzer:

$$f = z^2 + A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots = 0.$$

Zum richtigen Verständniss dieser Gleichung muss noch hinzugefügt

werden, dass die Symbole $(xy)^n$ und $[xy]^n$ ganz beliebige Ausdrücke n. Grades in x, y bedeuten, und dass für $\varkappa$ und λ die Bedingungen bestehen: $\varkappa \geqq 3$ und $\lambda \geqq 2$, während der Coefficient von z^2 auch lineare Glieder in x, y, und alle übrigen Coefficienten constante Glieder besitzen können. Der Coordinatenanfang ist alsdann der singuläre Punkt, die Ebene $z = 0$ die singuläre Ebene; dieselbe schneidet die Fläche in einer Curve mit $\varkappa$-fachem Punkt und die $\varkappa$ Tangenten in diesem Punkt sind dargestellt durch die Gleichung: $(xy)^\varkappa = 0$.

Der Tangentenkegel, aus irgend einem Punkte des Raumes an die gegebene Fläche gelegt, wird die Kante durch den uniplanaren Knotenpunkt als mehrfache Kante besitzen, und es soll das Verhalten des Kegels in dieser Kante näher studirt werden. Wir wählen zu diesem Zwecke den Tangentenkegel aus dem unendlich fernen Punkte der Z-Axe; die Reduction der Classenzahl dieses Cylinders durch die mehrfache Kante ist identisch mit der Reduction der Classenzahl unserer Fläche durch den uniplanaren Knotenpunkt. Dazu ist aber erforderlich, dass der unendlich ferne Punkt der Z-Axe nicht auf unserer Fläche liege, und dass die Z-Axe die Fläche nicht berühre, was man ja leicht erreichen kann. Die Gleichung jenes Tangentencylinders wird dargestellt durch die Discriminante:

$$0 = \begin{vmatrix} nA, & (n-1)B, & (n-2)(C+1), & \ldots\ 0, & 0, & 0, \ldots \\ 0, & nA, & (n-1)B, & \ldots\ldots & 0, & 0, \ldots \\ 0, & 0, & nA, & \ldots\ldots & . & 0, \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B, & 2(C+1), & 3D, & \ldots\ 0, & 0, & 0, \ldots \\ 0, & B, & 2(C+1), & \ldots\ldots & 0, & 0, \ldots \\ 0, & 0, & B, & \ldots\ldots & . & 0, \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Die Gerade $x = 0$, $y = 0$ ist die mehrfache Kante durch den uniplanaren Knotenpunkt, und das Verhalten des Cylinders in dieser Kante wird zunächst durch die Glieder niedrigster Dimension charakterisirt. Nun sind die niedrigsten Glieder in A von der Dimension $\varkappa$, in B von der Dimension λ, in C von der Dimension 1, in $D, E, \ldots$ von der Dimension 0, und wir bezeichnen dieselben resp. mit A_1, B_1, u. s. w. Demnach werden die Glieder niedrigster Dimension in der Discriminante die folgenden beiden sein: $nA_1 \cdot 2\Delta$ oder $(n-1)B_1^2 \cdot \Delta$, wobei Δ den constanten, von x und y unabhängigen Theil einer Determinante bezeichnet, (welche aus der obigen entsteht, indem man die erste und zweite Verticalreihe und die erste und n^{te} Horizontal-

reihe weglässt). Alle übrigen Glieder der Discriminante sind von höherer Dimension als *eines* der beiden Glieder $2n\Delta A_1$ und $(n-1)\Delta B_1^2$. Wir müssen demnach drei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem die Dimension von A_1 oder die Dimension von B_1^2 prävalirt, oder aber beide gleich sind.

Ist A_1 das niedrigste Glied der Discriminante, d. h. ist $\varkappa < 2\lambda$, so ist die Gerade $x=0$, $y=0$ eine $\varkappa$-fache Kante des Cylinders; die $\varkappa$ Tangentialebenen in dieser Kante sind bestimmt durch die Gleichung: $A_1 = (xy)^\varkappa = 0$. Sie enthalten demnach die $\varkappa$ Tangenten des $\varkappa$-fachen Punktes der Schnittcurve in der singulären Ebene $z=0$. Man kann noch weitere Schlüsse daraus ziehen, dass alle Glieder entweder den Factor A oder den Factor B besitzen; es soll dieser Gegenstand jedoch erst weiter unten seine Erledigung finden.

Ist B_1^2 das Glied niedrigster Dimension, ist also: $2\lambda < \varkappa$, so ist $x=0$, $y=0$ eine 2λ-fache Kante unseres Cylinders; je zwei Tangentialebenen in dieser Kante fallen zusammen, sodass nur λ verschiedene Tangentialebenen existiren, die durch $B_1 = 0$ repräsentirt werden. Auch die weitere Ausführung hiervon wird erst später gegeben werden.

Sind endlich B_1^2 und A_1 von gleicher Dimension, d. h. ist: $2\lambda = \varkappa$, so besitzt unser Cylinder eine $\varkappa$-fache Kante, deren Tangentialebenen durch die Gleichung: $2nA_1 - (n-1)B_1^2 = 0$ bestimmt werden.

Um nun die Verhältnisse, welche sich in den einzelnen Fällen darbieten, eingehender zu studiren, verlasse ich den eingeschlagenen Weg, indem ich weiterhin nicht den Tangentencylinder, sondern seine Berührungscurve auf der gegebenen Fläche der Betrachtung zu Grunde lege. Kennt man das Verhalten dieser Curve im Anfangspunkt, was man durch Reihenentwicklung thatsächlich erreichen kann, so ist es leicht auf den Berührungscylinder zurück zu schliessen. Die Berührungscurve ist nun dargestellt durch die beiden Gleichungen $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, und es kommt Alles darauf an mit Hülfe dieser beiden Gleichungen die Reihenentwickelungen der einzelnen Curvenzweige im Coordinatenanfang wirklich anzugeben.

Es mag nun gestattet sein, bevor wir die etwas complicirten Verhältnisse des allgemeinen Falles darlegen, einen speciellen Fall kurz zu erläutern. Es sei dies die Flächengleichung:

$$f = z^2 + \{(xy)^3 + (xy)^4 + \cdots\} + z\,\{[xy]^2 + [xy]^3 + \cdots\} \\ + z^2\,\{\cdots\} + \cdots = 0,$$

in welcher Glieder von höherem als dem zweiten Grade nicht fehlen. Zur Bestimmung unserer Curve dient noch die weitere Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + \{[xy]^2 + [xy]^3 + \cdots\} + 2z\,\{\cdots\} + \cdots = 0.$$

Wir entwickeln vermittelst dieser Gleichungen y und z nach Potenzen von x, und es muss die Reihe für y mit der ersten und die Reihe für z mit der zweiten Potenz von x beginnen. Die Potenzreihen, in f und $\frac{\partial f}{\partial z}$ eingesetzt, müssen diese identisch zum Verschwinden bringen; man erhält demnach die Coefficienten der Potenzreihen, indem man die Ausdrücke gleicher Dimension sowohl in f als auch in $\frac{\partial f}{\partial z}$ einzeln gleich Null setzt. Der Ausdruck niedrigster Dimension in f ist $(xy)^3$, man erhält desshalb 3 Paare von Potenzreihen:

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + b_1 x^2 + \cdots, & z &= p_1 x^2 + q_1 x^3 + \cdots, \\ y &= a_2 x + b_2 x^2 + \cdots, & z &= p_2 x^2 + q_2 x^3 + \cdots, \\ y &= a_3 x + b_3 x^2 + \cdots, & z &= p_3 x^2 + q_3 x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Unsere Curve besitzt also 3 getrennte Zweige im Anfangspunkt, deren Tangenten durch $(xy)^3 = 0$, $z = 0$ bestimmt werden.

Fallen von den Tangenten zwei zusammen, dann kann man $(xy)^3 = (\alpha x + \beta y)^2 (\gamma x + \delta y)$ setzen, und es fangen zwei Reihen für y mit dem nämlichen Gliede $a_1 x$ an, wenn man für $-\frac{\alpha}{\beta}$ kurz a_1 schreibt. In Folge dessen erhalten wir folgende Paare von zusammengehörigen Reihen:

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + b_1 x^{\frac{3}{2}} + c_1 x^2 + \cdots, & z &= p_1 x^2 + q_1 x^{\frac{5}{2}} + r_1 x^3 + \cdots, \\ y &= a_1 x - b_1 x^{\frac{3}{2}} + c_2 x^2 + \cdots, & z &= p_1 x^2 - q_1 x^{\frac{5}{2}} + r_2 x^3 + \cdots, \\ y &= a_3 x + b_3 x^2 + \cdots, & z &= p_3 x^2 + q_3 x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Die Curve besteht also aus einem einfachen Zweige und einem Zweige mit Spitze, deren Tangenten durch $\gamma x + \delta y = 0$ resp. $\alpha x + \beta y = 0$ gegeben sind. Die Constante b_1 bestimmt sich hierbei, indem man den Ausdruck von der Dimension 4 in f, nämlich: $p_1{}^2 + (1 a_1)^4 + p_1 [1 a_1]^2 + b_1{}^2 \frac{\gamma + \delta a_1}{\beta^2} = 0$ setzt. Besteht also zwischen den Constanten der Fläche $f = 0$ die Relation: $p_1{}^2 + (1 a_1)^4 + p_1 [1 a_1]^2 = 0$, so ergiebt sich $b_1 = 0$; die obigen Reihen schreiten dann nach ganzen Potenzen von x fort, und unsere Curve besteht aus 3 getrennten Zweigen, von denen sich zwei berühren.

Fallen alle drei Tangenten $(xy)^3 = 0$ zusammen, so reducirt sich $(xy)^3$ auf $(\alpha x + \beta y)^3$; alle drei Reihen für y beginnen mit dem nämlichen Gliede $a_1 x$, wenn wiederum $a_1 = -\frac{\alpha}{\beta}$. Die Reihenentwicklungen schreiten hier nach Potenzen von $x^{\frac{1}{3}}$ fort, so dass wir erhalten:

$$y = a_1 x + b_1 x^{\frac{4}{3}} + c_1 x^{\frac{5}{3}} + d_1 x^2 + \cdots,$$
$$y = a_1 x + \varepsilon b_1 x^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 c_1 x^{\frac{5}{3}} + d_2 x^2 + \cdots,$$
$$y = a_1 x + \varepsilon^2 b_1 x^{\frac{4}{3}} + \varepsilon c_1 x^{\frac{5}{3}} + d_3 x^2 + \cdots,$$
$$z = p_1 x^2 + q_1 x^{\frac{7}{3}} + r_1 x^{\frac{8}{3}} + s_1 x^3 + \cdots,$$
$$z = p_1 x^2 + \varepsilon q_1 x^{\frac{7}{3}} + \varepsilon^2 r_1 x^{\frac{8}{3}} + s_2 x^3 + \cdots,$$
$$z = p_1 x^2 + \varepsilon^2 q_1 x^{\frac{7}{3}} + \varepsilon r_1 x^{\frac{8}{3}} + s_3 x^3 + \cdots,$$

wo $\varepsilon^3 = +1$ ist. Die Curve besteht nur aus einem einzigen Zweige; die Classenerniedrigung des längs der Curve berührenden Cylinders beträgt 8. Ist $p_1^2 + (1a_1)^4 + p_1[1a_1]^2 = 0$, so wird $b_1 = 0$, und die bezüglichen Reihenentwicklungen werden:

$$y = a_1 x + b_1 x^{\frac{3}{2}} + c_1 x^2 + \cdots, \qquad z = p_1 x^2 + q_1 x^{\frac{5}{2}} + r_1 x^3 + \cdots,$$
$$y = a_1 x - b_1 x^{\frac{3}{2}} + c_2 x^2 + \cdots, \qquad z = p_1 x^2 - q_1 x^{\frac{5}{2}} + r_2 x^3 + \cdots,$$
$$y = a_1 x + b_3 x^2 + \cdots, \qquad z = p_1 x^2 + q_3 x^3 + \cdots.$$

Die Curve besteht aus einem Zweig mit Spitze und einem einfachen Zweige, der die Spitze in der Richtung der Tangente durchsetzt; die bezügliche Classenerniedrigung ist 9.

Setzt man für p_1 seinen Werth in die obige Bedingungsgleichung ein, so geht dieselbe über in:

$([1a_1]^2)^2 - 4(1a_1)^4 = 0$; d. h. ist a_1 eine Wurzel der homogenen Gleichung: $([xy]^2)^2 - 4(xy)^4 = 0$, so tritt der zuletzt erwähnte Fall ein. Soll nun auch noch der Coefficient von $x^{\frac{3}{2}}$ verschwinden, so muss die Relation:

$$2p_1 q_1 + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1}(1a_1)^4 + p_1 b_1 \frac{\partial}{\partial a_1}[1a_1]^2 + q_1[1a_1]^2 = 0$$

bestehen, wo wiederum

$$p_1 = -\frac{1}{2}[1a_1]^2 \quad \text{und} \quad q_1 = -\frac{1}{2} b_1 \frac{\partial}{\partial a_1}[1a_1]^2$$

ist. Diese Werthe in jene Relation eingesetzt verwandeln dieselbe in:

$$\frac{\partial}{\partial a_1}(1a_1)^4 - \frac{1}{2}[1a_1]^2 \frac{\partial}{\partial a_1}[1a_1]^2 = 0,$$

oder was dasselbe ist, in:

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\left\{([1a_1]^2)^2 - 4(1a_1)^4\right\} = 0.$$

Besitzt demnach die Gleichung $([xy]^2)^2 - 4(xy)^4 = 0$ die Doppelwurzel:

$\frac{y}{x} = a_1$, so sind die obigen Reihenentwicklungen nicht mehr zutreffend, indem der Coefficient von $x^{\frac{3}{2}}$ verschwindet. Es ergeben sich vielmehr die neuen Entwicklungen:

$$y = a_1 x + c_1 x^{\frac{5}{3}} + d_1 x^2 + \cdots, \qquad z = p_1 x^2 + r_1 x^{\frac{8}{3}} + s_1 x^3 + \cdots,$$
$$y = a_1 x + \varepsilon^2 c_1 x^{\frac{5}{3}} + d_2 x^2 + \cdots, \qquad z = p_1 x^2 + \varepsilon^2 r_1 x^{\frac{8}{3}} + s_2 x^3 + \cdots,$$
$$y = a_1 x + \varepsilon c_1 x^{\frac{5}{3}} + d_3 x^2 + \cdots, \qquad z = p_1 x^2 + \varepsilon r_1 x^{\frac{8}{3}} + s_3 x^3 + \cdots,$$

indem in f der Coefficient von $x^{\frac{14}{3}}$ verschwindet und der Coefficient von x^5 den Werth der Constanten c_1 ergiebt. Die zugehörige Curve besitzt wieder nur einen einzigen Zweig; aber die Reduction der Classenzahl durch den singulären Punkt beträgt 10.

Der Coefficient von $x^{\frac{5}{3}}$ kann ebenfalls zum Verschwinden gebracht werden, wenn man:

$$(1 a_1)^5 - \frac{1}{2}\,[1 a_1]^2\,[1 a_1]^3 + \frac{1}{4}\,([1\,a_1]^2)^2\,\{1 a_1\} = 0$$

setzt. Dann bestimmen sich die Coefficienten von x^2 in den Reihen für y durch Nullsetzen des Coefficienten von x^6 in f; wodurch die Reihen entstehen:

$$y = a_1 x + b_1 x^2 + \cdots, \qquad z = p_1 x^2 + q_1 x^3 + \cdots,$$
$$y = a_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \qquad z = p_1 x^2 + q_2 x^3 + \cdots,$$
$$y = a_1 x + b_3 x^2 + \cdots, \qquad z = p_1 x^2 + q_3 x^3 + \cdots.$$

Die Constanten $b_1 b_2 b_3$ sind die Wurzeln einer Gleichung dritten Grades, unsere Curve besteht desshalb, entweder aus drei sich berührenden reellen Zweigen, oder aus einem einzigen reellen Zweige und zwei zusammengefallenen isolirten Knotenpunkten, deren Verbindungslinie mit der Tangente des reellen Zweiges identisch ist. Die Reduction der Classenzahl der Fläche durch den singulären Punkt beträgt hier 12. In der angegebenen Weise kann man weiter fortfahren, aber die Bedingungsgleichungen werden immer complicirter, so dass eine weitere Ausführung hier unterbleiben muss.

Es ist nun leicht anzugeben, wie man die Reduction der Classenzahl einer Fläche durch einen beliebigen uniplanaren Knotenpunkt ermessen kann. Man wird zunächst die Curve $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, mit Hülfe ihrer Gleichungen, den einzelnen Zweigen entsprechend, durch Potenzreihen darstellen, indem man etwa y und z als Potenzreihen von x entwickelt. Der Berührungscylinder parallel der Z-Axe berührt aber die gegebene Fläche längs dieser Curve; seine Schnittcurve mit

der singulären Ebene $z = 0$ ist also eine Parallelprojection der Curve $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Auch diese Projection kann man, ihren einzelnen Zweigen entsprechend, durch Potenzreihen darstellen, indem man y nach Potenzen von x entwickelt. Sind die Reihenentwicklungen der Projection bekannt, so kann man nach bekannten Formeln*) die Erniedrigung ihrer Classenzahl durch den singulären Punkt ermitteln. Diese Classenerniedrigung stimmt mit derjenigen des Berührungscylinders durch die singuläre Kante und folglich auch mit der gesuchten Classenerniedrigung unserer Fläche durch den uniplanaren Knotenpunkt überein. Die Potenzreihen für die Curvenzweige der Projection (y gleich einer Potenzreihe in x), müssen aber völlig identisch sein mit den ursprünglichen Potenzreihen für y, welche sich aus $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ergeben. Denn eine Aenderung der Reihen könnte nur dann eintreten, wenn die Tangente eines Curvenzweiges im singulären Punkte mit der Projectionsrichtung zusammenfiele. *Man erhält also die gesuchte Reduction der Classe durch den uniplanaren Knotenpunkt, wenn man, den einzelnen Zweigen der Curve $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ gemäss, y und z in Potenzreihen nach x entwickelt, die Potenzreihen für y als Zweige einer ebenen Curve auffasst, und die Reduction der Classe dieser ebenen Curve durch ihren singulären Punkt bestimmt.*

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken. Die Classe einer Fläche und die Classe irgend eines Berührungscylinders dieser Fläche stimmen überein, aber trotzdem ist es nicht unbedingt nöthig, dass die Reduction der Classe der Fläche durch einen singulären Punkt übereinstimmt mit der Reduction der Classe des Cylinders durch die bezügliche singuläre Kante. Der Cylinder besitzt nämlich eine Anzahl Doppel- und Rückkehrkanten, welche keinen Singularitäten der Fläche entsprechen, und es kann eintreten, dass eine solche Doppelkante oder Rückkehrkante in jene singuläre Kante hineinrückt, wenn man die Richtung des Cylinders geeignet wählt. Es rückt alsdann eine Kante des Cylinders, welche Doppeltangente der Fläche ist, in die singuläre Kante hinein. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder berührt die singuläre Kante des Cylinders die Fläche ausserhalb des singulären Punktes — einen Fall, den wir bereits früher ausgeschlossen haben — oder die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente rücken in den singulären Punkt, wenn diese in die singuläre Kante rückt. Auf die Berührungscurve des Cylinders übertragen bedeutet dieses nichts Anderes, als dass ein scheinbarer Doppelpunkt dieser Curve in ihren singulären

*) Vergl. insbesondere Stephen Smith, Proceedings of the London Mathematical Society v. VI, p. 159 ff. Halphen, Mémoires présentées par divers savants, XXVI, 2.

Punkt hineinrückt, oder besser gesagt, demselben unendlich nahe rückt. Dann müssen die Projectionen der beiden dabei betheiligten Curvenzweige eine um eins höhere Berührung eingehen als diese Zweige selbst. Nun sind die Zweige der Berührungscurve durch Potenzreihen dargestellt — y gleich einer Potenzreihe in x und z gleich einer Potenzreihe in x für jeden Zweig — und ebenso die Zweige der Projection durch die nämlichen Potenzreihen für y, während $z=0$ ist. Handelt es sich also um die beiden Curvenzweige $y=\mathfrak{P}_1(x)$, $z=\mathfrak{P}_1'(x)$ resp. $y=\mathfrak{P}_2(x)$, $z=\mathfrak{P}_2'(x)$ und um ihre Projectionen: $y=\mathfrak{P}_1(x)$ resp. $y=\mathfrak{P}_2(x)$, und stimmen die Reihen $\mathfrak{P}_1(x)$ und $\mathfrak{P}_2(x)$ und ebenso die Reihen $\mathfrak{P}_1'(x)$ und $\mathfrak{P}_2'(x)$ *gleichzeitig* bis zu dem Gliede x^ν inclusive überein, so müssen die Reihen $\mathfrak{P}_1(x)$ und $\mathfrak{P}_2(x)$ noch über x^ν hinaus übereinstimmen, sollen anders die beiden Zweige der Projection eine höhere Berührung eingehen. Mit andern Worten: es müssen die beiden Potenzreihen für y, nämlich $\mathfrak{P}_1(x)$ und $\mathfrak{P}_2(x)$ bis zu einer höheren Potenz von x übereinstimmen, als die beiden Reihen für z, nämlich $\mathfrak{P}_1'(x)$ und $\mathfrak{P}_2'(x)$. Da man aber leichi nachweisen kann, dass die beiden Potenzreihen $z=\mathfrak{P}_1'(x)$ und $z=\mathfrak{P}_2'(x)$ immer bis zu einer um eins höheren Potenz in x übereinstimmen, als die zugehörigen Reihen $y=\mathfrak{P}_1'(x)$ und $y=\mathfrak{P}_2'(x)$, so ist die obige Annahme, die ja das Gegentheil hiervon verlangt, unzulässig. Um jenen Nachweis wirklich zu liefern, beachte man, wie sich zwei zusammengehörige Potenzreihen $y=\mathfrak{P}_1(x)$, $z=\mathfrak{P}_1'(x)$ mit Hülfe der Gleichungen $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial z}=0$ entwickeln lassen. Ist die Reihe $y=\mathfrak{P}_1(x)$ entwickelt bis zur Potenz x^ν inclusive, so bestimmt sich daraus vermittelst der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z}=0$ der Coefficient von $x^{\nu+1}$ in der Reihe $z=\mathfrak{P}_1'(x)$, und zwar *linear*. Das Gesagte gilt aber für jede beliebige Potenz ν (wo ν ganz oder gebrochen sein kann) und wir folgern daraus, dass die beiden Reihen $z=\mathfrak{P}_1'(x)$ und $z=\mathfrak{P}_2'(x)$ bis zur Potenz $x^{\nu+1}$ übereinstimmen, wenn die zugehörigen Reihen $y=\mathfrak{P}_1(x)$ und $y=\mathfrak{P}_2(x)$ bis zur Potenz x^ν gleich sind. Wir sind so zu dem wichtigen Schluss gelangt, *dass sich die Reduction der Classenzahl durch den uniplanaren Knotenpunkt immer auf die oben angegebene Weise bestimmt, wie man auch die Z-Axe wählen mag.* Die Z-Axe kann die gegebene Fläche auch ein oder mehrere Male berühren (was wir vorher ausgeschlossen hatten), ohne dass sich etwas bei der Bestimmung der Reduction der Classenzahl ändert, da hierbei blos diejenigen Zweige der Berührungscurve in Betracht kommen, welche durch den singulären Punkt verlaufen.

Es mag hier erwähnt werden, dass man auch noch folgende Methode zur Bestimmung der Classenerniedrigung einer Fläche durch einen uniplanaren Knotenpunkt verwenden kann. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial z}=0$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ schneidet aus der Fläche $f = 0$ die Berührungspunkte der Tangentialebenen aus, welche zur Ebene $x = 0$ parallel sind. Fallen von diesen Schnittpunkten $\varkappa$ in den uniplanaren Punkt, und besitzt die Gerade $x = 0$, $z = 0$ keine specielle Lage zur Fläche, so ist $\varkappa$ die gesuchte Classenerniedrigung. Man wird desshalb für die einzelnen Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ die bez. Potenzreihen $y = \mathfrak{P}(x)$, $z = \mathfrak{P}'(x)$ aufstellen und diese Werthe in den Ausdruck f substituiren. Es lässt sich alsdann, den einzelnen Aesten entsprechend, aus f jedesmal eine bestimmte Potenz von x ausscheiden, und die Summe aller dieser Exponenten ergiebt die Zahl $\varkappa$.

Zum Schluss soll noch die Form der Reihenentwicklungen für einige allgemeinen Fälle angegeben werden. Wir legen dabei die allgemeine Gleichungsform zu Grunde:

$$f = z^2 + \left\{(xy)^\varkappa + (xy)^{\varkappa+1} + \cdots\right\} + z\left\{[xy]^\lambda + [xy]^{\lambda+1} + \cdots\right\} + z^2\left\{\cdots\right\} + \cdots = 0.$$

Dann ist:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + \left\{[xy]^\lambda + [xy]^{\lambda+1} + \cdots\right\} + 2z\left\{\cdots\right\} + \cdots = 0.$$

Um die Gestalt der Schnittcurve beider Flächen im singulären Punkt, oder was dasselbe ist, ihre Reihenentwicklungen daselbst anzugeben, müssen wir, wie dies bereits oben geschehen ist, drei verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem $\varkappa < 2\lambda$ oder $\varkappa > 2\lambda$ oder $\varkappa = 2\lambda$ ist.

1. $\varkappa < 2\lambda$. Da z von der Dimension λ in x, y ist und die Potenzreihen für y immer mit der ersten Potenz von x beginnen müssen, weil die X-Axe und Y-Axe keine specielle Lage zu der Curve in der singulären Ebene $z = 0$ einnehmen sollen, so sind die Glieder niedrigster Dimension in f die folgenden: $(xy)^\varkappa + (xy)^{\varkappa+1} + \cdots + (xy)^{2\lambda-1}$. Es ergeben sich hieraus, indem wir diesen Ausdruck gleich Null setzen, die $2\lambda - \varkappa$ ersten Glieder der Potenzreihen für y, so dass die folgenden Entwicklungen entstehen:

$$\left.\begin{aligned} y &= b_i x + c_i x^2 + \cdots + g_i x^{2\lambda-\varkappa} + h_i x^{2\lambda-\varkappa+1} + \cdots, \\ z &= p_i x^\lambda + q_i x^{\lambda+1} + r_i x^{\lambda+2} + \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3, \cdots, \varkappa.$$

Daraus folgt, *dass der Tangentencylinder, aus dem unendlich fernen Punkte der Z-Axe an unsere Fläche gelegt, durch die Z-Axe $\varkappa$ Mäntel schickt, welche mit den entsprechenden Zweigen der Curve in der singulären Ebene je* $(2\lambda - \varkappa + 1)$ *consecutive Punkte gemein haben.* Dieser Satz hat keine Gültigkeit mehr, wenn $(xy)^\varkappa = 0$ mehrere vielfache Wurzeln besitzt und diese Wurzeln gleichzeitig in $(xy)^{\varkappa+1} = 0$ etc.

sich vorfinden. Die dabei auftretenden Verhältnisse sind zu complicirt und vor allen Dingen zu mannichfaltig um sie in allgemeiner Weise zu behandeln.

2. $2\lambda < \varkappa$. Man muss hier noch zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $\varkappa$ gerade ist oder ungerade. Ist $\varkappa$ *gerade*, und setzt man in f die Glieder von den Dimensionen $2\lambda, 2\lambda+2, \cdots, \varkappa-2$, und zugleich in $\frac{\partial f}{\partial z}$ die Glieder von den Dimensionen $\lambda, \lambda+1, \cdots, \frac{\varkappa}{2}-1$ der Reihe nach gleich Null, so erkennt man, dass dies nur dadurch erreicht werden kann, dass man in: $[xy]^\lambda + [xy]^{\lambda+1} + \cdots + [xy]^{\frac{\varkappa}{2}-1}$ der Reihe nach die Glieder von den Dimensionen $\lambda, \lambda+1, \cdots, \frac{\varkappa}{2}-1$ gleich Null setzt. Hierdurch erhält man die $\left(\frac{\varkappa}{2}-\lambda\right)$ ersten Glieder in den Reihenentwicklungen für y. Das nächste Glied einer solchen Reihe bestimmt sich durch Nullsetzen des Gliedes $\varkappa^{\text{ter}}$ Dimension in f oder in: $(xy)^\varkappa - \frac{1}{4}\left\{[xy]^\lambda + [xy]^{\lambda+1} + \cdots + [xy]^{\frac{\varkappa}{2}}\right\}^2$, woraus folgt, dass sich jedes Mal zwei Werthe für den Coefficienten von $x^{\frac{\varkappa}{2}-\lambda+1}$ ergeben. Es entstehen so im Ganzen 2λ verschiedene Entwicklungen für y, zu jeder Entwicklung giebt es eine zweite, die mit ihr die $\left(\frac{\varkappa}{2}-\lambda\right)$ ersten Glieder gemein hat; also:

$$\left.\begin{aligned} y &= b_i x + c_i x^2 + \cdots + k_i x^{\frac{\varkappa}{2}-\lambda} + l_i x^{\frac{\varkappa}{2}-\lambda+1} + \cdots \\ z &= p_i x^{\frac{\varkappa}{2}} + q_i x^{\frac{\varkappa}{2}+1} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3, \cdots, 2\lambda$$

wobei für ganzzahliges μ die Bedingungen bestehen:

$$b_{2\mu} = b_{2\mu-1}, \quad c_{2\mu} = c_{2\mu-1}, \quad \cdots, \quad k_{2\mu} = k_{2\mu-1}.$$

Der Tangentencylinder aus dem unendlich fernen Punkte der Z-Axe schickt 2λ Mäntel durch die Z-Axe, welche zu zweien die λ Aeste der Curve: $[xy]^\lambda + [xy]^{\lambda+1} + \cdots = 0$ in $\left(\frac{\varkappa}{2}-\lambda+1\right)$ consecutiven Punkten schneiden. Zwei Mäntel, deren Reihen mit denselben Gliedern beginnen, können auch mit einander verzweigt sein; es tritt dies ein, wenn eine der Geraden $(xy)^\varkappa = 0$ die beiden Mäntel berührt. Auch hier werden die Verhältnisse sehr mannichfaltig und complicirt, wenn in $[xy]^\lambda = 0$ vielfache Wurzeln auftreten, die sich auch in $[xy]^{\lambda+1} = 0$ etc. vorfinden.

Wir haben seither vorausgesetzt, dass $\varkappa$ gerade sei; nehmen wir aber an, dass $\varkappa$ *ungerade* ist, so ergeben sich die Entwicklungen:

$$\left.\begin{aligned} y &= b_i x + c_i x^2 + \cdots + k_i x^{\frac{\varkappa+1}{2}-\lambda} + l_i x^{\frac{\varkappa+1}{2}-\lambda+\frac{1}{2}} + \cdots \\ z &= p_i x^{\frac{\varkappa}{2}} + q_i x^{\frac{\varkappa+1}{2}} + r_i x^{\frac{\varkappa+2}{2}} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3, \cdots, 2\lambda,$$

wobei die Bedingungen bestehen:

$$b_{2\mu} = b_{2\mu-1}, \quad c_{2\mu} = c_{2\mu-1}, \cdots, k_{2\mu} = k_{2\mu-1}, \quad l_{2\mu} = -l_{2\mu-1}, \quad p_{2\mu} = -p_{2\mu-1}.$$

Die Reihen schreiten nach halben Potenzen von x fort und sind zu je zweien verzweigt; der erste nicht ganze Exponent in den Reihen für x ist $\left(\frac{\varkappa + 1}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\right)$. Zwei verzweigte Mäntel gehen in zwei sich berührende Mäntel über, wenn sie eine der Geraden $(xy)^\varkappa = 0$ berühren.

3. $\varkappa = 2\lambda$. Hier tritt nichts besonders Bemerkenswerthes auf; es giebt $\varkappa$ verschiedene Curvenäste, deren Tangenten durch: $(xy)^\varkappa - \frac{1}{4}([xy]^\lambda)^2 = 0$ bestimmt werden. Natürlich können auch hier im speciellen Falle mehrere dieser Tangenten zusammenfallen, so dass mehrere Aeste verzweigt sind oder sich berühren.

Eine besondere *gestaltliche* Discussion des uniplanaren Knotenpunktes ist überflüssig, da die Fläche in der Nähe desselben sich eng an die singuläre Ebene anschliesst, so dass der Tangentencylinder parallel zur Z-Axe die Gestalt des Knotenpunktes auf's deutlichste erkennen lässt.

Leipzig, 3. Februar 1883.

Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen 1. Ordnung im System der confocalen Flächen 2. Grades.

(Schluss*)).

Von

Otto Staude in Breslau.

Kapitel IV.

Schliessungssätze innerhalb der Liniencongruenz der gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen.

§ 19.

Geradlinige Polygone, welche den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und einem confocalen Ellipsoid gleichzeitig einbeschrieben sind.

Neben dem Ellipsoid λ_0 und dem einschaligen Hyperboloid μ_0 sei eine dritte confocale Fläche gegeben, und zwar ein Ellipsoid $\lambda < \lambda_0$, welches das Ellipsoid λ_0 umschliesst. Es sollen im vorliegenden § 19 geradlinige Polygone betrachtet werden, welche den beiden Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und dem Ellipsoid λ einbeschrieben sind. Was die Willkür eines solchen Polygons, das im Allgemeinen nicht geschlossen sein wird, anbelangt, so kann man einen Eckpunkt $P^{(0)}$ desselben auf dem Ellipsoid λ beliebig wählen; der Punkt sei ein äusserer, sodass von ihm 4 reelle Tangenten an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 hinlaufen. Von diesen 4 Tangenten kann man eine als Anfangsseite $S^{(1)}$ des Polygons auswählen. Sie schneidet, nachdem sie das Ellipsoid λ_0 berührt hat, das Ellipsoid λ zum 2. Mal; der Schnittpunkt ist der 2. Eckpunkt $P^{(1)}$ des Polygons. Die 2. Seite $S^{(2)}$ kann nun unter denjenigen 3 gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, die neben $S^{(1)}$ noch durch $P^{(1)}$ hindurchgehen, ausgewählt werden. Um die Auswahl unter den 3 gebotenen Seiten eindeutig festzusetzen, wird dem Polygon die Bedingung auferlegt, *dass in jedem Eckpunkte die Normale des Ellipsoides λ den Polygonwinkel halbirt.* Bei dieser Festsetzung ist die Construction des Polygons von Seite zu Seite ein-

*) Fortsetzung von pag. 69 dieses Bandes.

deutig bestimmt, sobald der *Anfangspunkt* und unter den hiernach noch möglichen 4 *Anfangsseiten* eine nach Willkür gegeben wird.

Die Polygonconstruction bezeichnet den Weg eines Lichtstrahls, der vom Punkte $P^{(0)}$ in der Richtung $S^{(1)}$ in das Innere des Ellipsoides λ hineingeht und an der Innenfläche desselben nach dem gewöhnlichen Gesetze der Reflexion gespiegelt wird.*) Die Rolle welche die beiden Flächen λ_0 und μ_0 bei dieser Polygonconstruction spielen, ist, wie man bemerkt, eine verschiedene, obwohl die Seiten des Polygons gemeinsame Tangenten der *beiden* Flächen sind. Es wird nämlich postulirt, dass jede Polygonseite zwischen ihren beiden Endpunkten das *Ellipsoid* berührt. Ob dagegen die Polygonseite auch den Berührungspunkt der unbegrenzten Geraden, auf der sie abgegrenzt ist, mit dem *Hyperboloid* μ_0 enthält, oder ob derselbe irgendwo auf der Verlängerung der Seite über ihre Endpunkte hinaus zu suchen ist, das ist einer willkürlichen Festsetzung nicht mehr unterworfen und bleibt vorläufig dahingestellt (vgl. § 20).

Da jede gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 auch Tangente derjenigen geodätischen Linie auf dem Ellipsoid λ_0 ist, welche zwischen den beiden Zweigen der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ hin und her oscillirt, so *sind die betrachteten Polygone zugleich dieser geodätischen Linie umbeschrieben.*

Es handelt sich gegenwärtig um die Frage, ob die bei der geschilderten Polygonconstruction gegebenen Elemente, nämlich die Parameter λ_0, μ_0, λ der vorgelegten Flächen, sowie Anfangspunkt und Anfangsseite der Polygonconstruction, so gewählt sein können, dass sich die Construction mit l Seiten schliesst, d. h. die Seite $S^{(l)}$ wieder in die Anfangsecke $P^{(0)}$ einläuft, und zwar so einläuft, dass der Winkel zwischen den Seiten $S^{(l)}$ und $S^{(1)}$, wie die übrigen Winkel des Polygons, von der Normale des Ellipsoides λ in seinem Scheitel halbirt wird.

Zur Beantwortung dieser Frage sind die bisher entwickelten Hülfsmittel unmittelbar zu verwerthen. Denn die in Kapitel II durch vierfach periodische Functionen dargestellten Punkte (33), Ebenen (43) und geraden Linien (46) sind gerade die Ecken, Ebenen und Seiten des Polygons. In jedem Eckpunkt $P^{(\varkappa)}$ des Polygons stossen, um die *Bezeichnung* zu fixiren, 2 Seiten $S^{(\varkappa)}$ und $S^{(\varkappa+1)}$ zusammen, welche in einer der beiden dem Eckpunkt zugehörigen Normalebenen $E_\lambda^{(\varkappa)}$ enthalten sind. Diese Ebene enthält 3 aufeinanderfolgende Ecken $P^{(\varkappa-1)}$, $P^{(\varkappa)}$, $P^{(\varkappa+1)}$ des Polygons, nimmt aber nur in der mittleren Ecke $P^{(\varkappa)}$

*) Diese Polygone erwähnt zuerst Liouville, Journal des Mathématiques, 1. Serie, Bd. 12, S. 255 (1847). Mehrere Sätze über dieselben, an die sich die im Text (§ 19) gegebene Darstellung zum Theil anlehnt, giebt Darboux, L'Institut, I. Section, Sciences Mathématiques etc., 38. année, No. 1896 (1870), aber ohne Beweis.

die Normale des Ellipsoides λ in sich auf. Mit gegebenem Anfangspunkt $P^{(0)}$ und gegebener Anfangsseite $S^{(1)}$ ist auch bereits die Anfangsebene $E_\lambda^{(0)}$ des Polygons gegeben.

Die Polygonconstruction sei nun bis zum $(l+1)$ten Eckpunkt $P^{(l)}$, bis zur $l$ten Seite $S^{(l)}$ und der $(l+1)$ten Ebene $E^{(l)}$ fortgeführt.

Dem Anfangspunkte $P^{(0)}$ auf dem Ellipsoid λ oder $v_1 \mid v_2$ kommen 2 Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ zu, von denen er eines mit der Ebene $E_\lambda^{(0)}$ gemein hat; dieses sei $u_1^{(0)} \mid u_2^{(0)}$. Von den beiden Tangenten durch den Punkt $P^{(0)}$ in der Ebene $E_\lambda^{(0)}$ mag diejenige, auf deren negativer Hälfte $P^{(0)}$ liegt, als Anfangsseite $S^{(1)}$ gelten. Indem dann die Richtung der Polygonconstruction der positiven Richtung der successiven Strahlen $S^{(\varkappa)}$ entspricht, ergiebt sich durch wiederholte Anwendung des Satzes III des § 18, dass die Parameter der Eckpunkte $P^{(\varkappa)}$ allgemein die Werthe haben:

$$(70) \qquad u_1^{(\varkappa)} \mid u_2^{(\varkappa)} = u_1^{(0)} + 2\varkappa v_1 \mid u_2^{(0)} + 2\varkappa v_2.$$

Die Parameter der Punkte $P^{(\varkappa)}$ sind zugleich die der Ebenen $E_\lambda^{(\varkappa)}$. Soll das Polygon sich in der verlangten Weise schliessen, so reicht es nicht aus, dass der Punkt $P^{(l)}$ mit dem Punkte $P^{(0)}$ identisch wird; vielmehr muss auch die Ebene $E_\lambda^{(l)}$ mit der Ebene $E_\lambda^{(0)}$ zusammenfallen, worauf dann von selbst $S^{(l)}$ und $S^{(1)}$ in Bezug auf N_λ im Punkte $P^{(0)}$ conjugirt werden. Der Zusammenfall der Punkte $P^{(l)}$ und $P^{(0)}$, sowie der Ebenen $E_\lambda^{(l)}$ und $E_\lambda^{(0)}$, ereignet sich aber nach den Erörterungen des § 10 und § 11 unter der Bedingung:

$$u_1^{(l)} \mid u_2^{(l)} \equiv u_1^{(0)} \mid u_2^{(0)} \quad (\text{mod. } 2\pi i \mid 0,\ 0 \mid 2\pi i)$$

oder nach (70):

$$(71) \qquad 2lv_1 \mid 2lv_2 \equiv 0 \mid 0 \quad (\text{mod. } 2\pi i \mid 0,\ 0 \mid 2\pi i).$$

Da nämlich bei rein imaginärem Parameterpaare $u_1^{(0)} \mid u_2^{(0)}$ nach (70) auch das Parameterpaar $u_1^{(l)} \mid u_2^{(l)}$ rein imaginär ausfällt, so können die beiden Parameterpaare, wenn sie überhaupt nur um Multipla zusammengehöriger Perioden differiren, sich nur um Multipla der beiden rein imaginären Periodenpaare $2\pi i \mid 0$ und $0 \mid 2\pi i$ unterscheiden, weshalb bei den Congruenzen (71) auch nur diese als Moduln beigefügt sind. Die Form der Bedingungen (71) zeigt sofort:

I. *Wenn ein den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschriebenes und der Fläche λ einbeschriebenes Polygon sich einmal mit l Seiten schliesst, so schliesst es sich immer mit der gleichen Seitenzahl, wie auch der Anfangspunkt der Construction auf der äusseren Zone des Ellipsoides λ und die Anfangsebene unter den 2 alsdann noch möglichen Anfangsebenen gewählt sein mag.*

Der vorstehenden Ableitung dieses Schliessungssatzes, welche mit den *Punkten* und *Ebenen* des Polygons operirt, kann eine einfachere

Gestalt gegeben werden, bei der nur die *Strahlen* der Congruenz (46) in Betracht kommen. Diese veränderte Auffassung knüpft sich zugleich an die Frage:

Wie construirt man, wenn irgend ein Congruenzstrahl durch seine Parameter $u_1 \mid u_2$ gegeben ist, denjenigen Strahl, welcher die Parameter $u_1 + 2v_1 \mid u_2 + 2v_2$ besitzt, vorausgesetzt, dass die gegebenen Constanten $v_1 \mid v_2$ rein imaginär sind, und somit als Parameterpaar eines äusseren Ellipsoides λ ($\lambda < \lambda_0$) aufgefasst werden können (vgl. § 18)?

Die Frage ist unmittelbar zu beantworten. Der positive Halbstrahl u schneidet das Ellipsoid in dem Punkte $u + v$ (vgl. § 19, I); die Parameter des im Punkte $u + v$ zu dem Strahl u in Bezug auf N_λ conjugirten Strahles sind dann $u + 2v$ (vgl. § 16, V). Man hat also den Satz:

II. *Ist* $v_1 \mid v_2$ (*mit positivem* Λ) *das Parameterpaar eines Ellipsoides* λ, *welches das Ellipsoid* λ_0 *umschliesst, so führt die Transformation:*

$$(72) \qquad u_1' \mid u_2' = u_1 + 2v_1 \mid u_2 + 2v_2$$

der Parameter $u_1 \mid u_2$ *jeden reellen Congruenzstrahl* $u_1 \mid u_2$ *in einen andern reellen Congruenzstrahl* $u_1' \mid u_2'$ *über, der die positive Hälfte von* $u_1 \mid u_2$ *auf dem Ellipsoid* λ *conjugirt schneidet.*

Hiernach ergiebt sich unmittelbar, dass jeder reelle Congruenzstrahl nach l-maliger Wiederholung derselben Transformation an seine ursprüngliche Stelle zurückgeführt wird, wenn die Bedingung:

$$2lv_1 \mid 2lv_2 \equiv 0 \mid 0 \quad (\text{mod. } 2\pi i \mid 0,\ 0 \mid 2\pi i)$$

erfüllt ist; damit hat man wieder den obigen Schliessungssatz erhalten.

§ 20.

Discussion der Bedingungsgleichungen des Schliessungssatzes.

Indem unter m und n ganze positive oder negative Zahlen verstanden werden, kann man die Congruenzen (71) durch die Gleichungen ersetzen:

$$2lv_1 = -2m\pi i, \qquad 2lv_2 = -2n\pi i.$$

Durch geeignete lineare Combination dieser Gleichungen lassen sich die entsprechenden Relationen für die Integrale V_1 und V_2 (vgl. § 8, 25) herstellen, nämlich:

$$2l\,V_1 = -4mA_1 - 4nB_1,$$
$$2l\,V_2 = -4mA_2 - 4nB_2$$

oder mit Einsetzung der Werthe der V, A, B aus § 8, 24 und 26:

$$(73)\qquad \begin{cases} 2l\int\limits_{\lambda, \varLambda}^{\lambda_0}\frac{d\lambda}{\Lambda} - 4m\int\limits_{\gamma}^{\mu_0}\frac{d\mu}{\mathsf{M}} + 4n\int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{d\nu}{\mathsf{N}} = 0, \\ 2l\int\limits_{\lambda, \varLambda}^{\lambda_0}\frac{\lambda\, d\lambda}{\Lambda} - 4m\int\limits_{\gamma}^{\mu_0}\frac{\mu\, d\mu}{\mathsf{M}} + 4n\int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{\nu\, d\nu}{\mathsf{N}} = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen, die man auch unmittelbar ableitet, wenn man die Differentialgleichung (20) des § 5 längs des als geschlossen angenommenen Polygons hin integrirt, erhellt unmittelbar die *geometrische Bedeutung der Zahlen m und n.* Denn die Variablen μ und ν bewegen sich längs des Polygonumfanges stetig oscillirend zwischen den beiden Grenzen γ und μ_0, resp. β und α hin und her, und die Vorzeichen von M und N wechseln immer und nur in diesen Grenzen (vgl. § 6). Demnach bezeichnet $2n$ die Anzahl der Durchgangspunkte des Polygonumfanges durch jede der Ebenen $\nu = \beta$ und $\nu = \alpha$, und $2m$ die Anzahl der Durchgangspunkte durch die Ebene $\mu = \gamma$ und der Berührungspunkte des Polygonumfanges mit dem Hyperboloid μ_0. Es mag daher *m die Oscillations- und n die Windungszahl des Polygons* heissen.

Damit ergiebt sich:

Ein den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschriebenes und der Fläche λ einbeschriebenes Polygon, dessen Winkel von der Normale des letzteren in dem betreffenden Eckpunkt halbirt werden, schliesst sich mit l Seiten, m Oscillationen und n Windungen, wenn die Parameter λ, λ_0, μ_0 den Bedingungen genügen:

$$(74)\qquad \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, \varLambda} d\omega_1 \,\Big|\, \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, \varLambda} d\omega_2 = -\frac{m\pi i}{l} \,\Big|\, -\frac{n\pi i}{l}.$$

Dieser Satz ergänzt zugleich die Lücke, welche im vorigen Paragraphen an der Beschreibung der Polygone offen geblieben war. Es wurde dort bereits die Verschiedenheit in der Bedeutung der Berührungspunkte des Polygonumfanges mit dem Ellipsoid λ_0 und der Berührungspunkte mit dem Hyperboloid μ_0 hervorgehoben. Von jenen wurde auf jede Polygonseite einer gelegt; die Vertheilung dieser blieb unbestimmt. In der That zeigt sich jetzt, dass, wenn die Bedingungen (74) erfüllt sind, für alle die unendlich vielen Polygone, die alsdann den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und der Fläche λ einbeschrieben werden können, die *Gesammtzahl* der Berührungspunkte der Polygonseiten mit dem Hyperboloid μ_0 die nämliche bleibt, während die *Vertheilung* dieser Berührungspunkte auf die einzelnen Seiten bei den verschiedenen Polygonen im Allgemeinen verschieden ist.

Dieser Umstand verliert seine Bedeutung, wenn man die Seiten des Polygons als *unbegrenzte Strahlen* betrachtet. Aber es ist für spätere Zwecke dienlich, neben die Anschauung der *Polygone mit unbegrenzten Seiten*, die *Polygone mit begrenzten**) *Seiten* im Auge zu behalten. Man muss dabei allerdings der Vollständigkeit wegen neben die bisherige Vorstellung des dem Ellipsoide λ im gewöhnlichen Sinne *einbeschriebenen* Polygons die coordinirte Vorstellung desjenigen Polygons treten lassen, welches hervorgeht, wenn man von dem Polygon mit unbegrenzten Seiten alle Bestandtheile *innerhalb* des Ellipsoides λ wegnimmt und alle *ausserhalb* beibehält. Von diesem neuen *Polygon mit begrenzten Seiten* berührt keine Seite das Ellipsoid λ_0, durchsetzt aber jede Seite die unendlich ferne Ebene, während die Bildung der Ecken dem Gesetz einer an der *Aussenseite* des Ellipsoides λ stattfindenden Reflexion gehorcht. Anknüpfend an die Vorstellung *einer Reflexion an der äusseren oder inneren Seite des Ellipsoides* λ, wird man die Ecken des neuen Polygons *„äussere Ecken auf dem Ellipsoid"*, die des ursprünglich betrachteten *„innere Ecken auf dem Ellipsoid"* nennen, eine Unterscheidung, die später von Wichtigkeit werden soll.

Die Bedingungsgleichungen (74) zeigen, dass *es im Allgemeinen nicht möglich ist, bei gegebenem* λ_0 *und* μ_0 *das* λ *so zu bestimmen, dass sich das den Flächen* λ_0 *und* μ_0 *um- und der Fläche* λ *einbeschriebene Polygon mit vorgeschriebenen Zahlen* l, m, n *schliesst.* Vielmehr müssen bereits die Flächen λ_0 und μ_0 der Bedingung genügen:

$$(75) \qquad \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{m\pi i}{l}\,\middle|\,\frac{n\pi i}{l}\right)=0,$$

damit die beiden Gleichungen (74) überhaupt miteinander verträglich seien. Die Bedingung (75) aber als erfüllt vorausgesetzt, bestimmen die Gleichungen (74) die Fläche λ eindeutig.

Für die Seitenzahl $l=\infty$ ist die Bedingung (75) bei beliebig gegebenen Flächen λ_0 und μ_0 und beliebigen endlichen Zahlen m und n erfüllt, für die Seitenzahl $l=2$ bei beliebig gegebenen Flächen λ_0 und μ_0, wenn die Zahlen m und n einander nach dem Modul 2 congruent sind. Es ergiebt sich dann beispielsweise mit den Oscillations- und Windungszahlen $m=1$ und $n=1$ die Lösung $\lambda=\lambda_0$ und bezüglich $\lambda=-\infty$. Für $\lambda=-\infty$ bestehen die gesuchten Polygone aus zwei diametral gelegenen, parallelen gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, für $\lambda=\lambda_0$ aus unendlich vielen, unendlich kleinen

---

*) Die Benennung „begrenzt" soll hier und fernerhin keineswegs bedeuten, dass die betreffende Polygonseite von *endlicher Länge* sei; als „begrenzte Polygonseite" gilt vielmehr allgemein eines der beiden Stücke, in welche der im Unendlichen in sich geschlossene Congruenzstrahl durch die zwei der Seite angehörigen Polygoneckpunkte getheilt wird.

Stücken gemeinsamer Tangenten der beiden Flächen, die ganz in die Fläche λ_0 hineinfallen. Jedes Polygon dieser letzteren Art ist folglich aus *geodätischen* Tangenten der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ auf dem Ellipsoid λ_0 und aus Stücken der Krümmungscurve selbst zusammengesetzt.*)

§ 21.

Geradlinige Polygone, welche den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und einem confocalen einschaligen Hyperboloid gleichzeitig einbeschrieben sind.

Die bisher untersuchten Polygone waren den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und *einem Ellipsoid* λ nach dem Gesetz der Reflexion einbeschrieben. Da aber die benutzten Polygonseiten zu *dem Ellipsoid* λ_0 *und dem einschaligen Hyperboloid* μ_0 in gleicher Beziehung stehen, muss man der Vollständigkeit wegen auch Polygone betrachten, welche den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und *einem einschaligen Hyperboloid* μ ($\mu < \mu_0$) nach dem Gesetz der Reflexion einbeschrieben sind, d. h. deren Winkel jeweils von der Normale des Hyperboloides halbirt werden. Diese Polygone können in ganz analoger Weise behandelt werden, wie die früheren.

Man wird, von der Anschauung eines *Polygons mit begrenzten Seiten* ausgehend, annehmen, dass der Umfang des geschlossenen Polygons zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ecken das Hyperboloid μ_0 berührt; das Polygon besitzt dann ausserdem eine bestimmte Anzahl Berührungspunkte mit dem Ellipsoid λ_0 und ebensoviele Durchgangspunkte durch die unendlich ferne Ebene $\lambda = -\infty$. Das Polygon verläuft ganz *innerhalb des Hyperboloides* μ, d. h. auf derselben Seite der Fläche, wie die Focalhyperbel. Die Ecken des Polygons werden daher „*innere Ecken auf dem Hyperboloid* μ“ heissen. Ergänzt man das erhaltene Polygon durch das entsprechende Polygon mit „*äusseren Ecken auf dem Hyperboloid* μ“, so gelangt man zu dem allgemeineren *Polygon mit unbegrenzten Seiten*. Von den aus der Betrachtung dieser Polygone resultirenden Sätzen sei nur der eine hervorgehoben:

II′. *Ist* $w_1 \mid w_2$ (*mit positivem* M *definirt durch die Formel* (68)) *das Parameterpaar eines einschaligen Hyperboloides* μ, *welches das Hyperboloid* μ_0 *umschliesst, so führt die Transformation:*

$$(72') \qquad u_1' \mid u_2' = u_1 + 2w_1 \mid u_2 + 2w_2$$

der Parameter $u_1 \mid u_2$ *jeden reellen Congruenzstrahl* $u_1 \mid u_2$ *in einen anderen reellen Congruenzstrahl* $u_1' \mid u_2'$ *über, der den positiven Abschnitt* (*vgl.* § 18) *von* $u_1 \mid u_2$ *auf dem Hyperboloid* μ *conjugirt schneidet.*

---

*) Vgl. über diese Curvenzüge Mathematische Annalen, Bd. XX, S. 172.

§ 22.

Eine Transformation im reellen Gebiete des Strahlensystems (46).

Die Transformation (72) und (72'):

$$u_1' \mid u_2' = u_1 + 2v_1 \mid u_2 + 2v_2 \quad \text{und} \quad u_1' \mid u_2' = u_1 + 2w_1 \mid u_2 + 2w_2$$

des reellen Gebietes der Strahlencongrunz (46) in sich sind nicht die allgemeinsten ihrer Art, da den additiven Constanten $v_1 \mid v_2$ und $w_1 \mid w_2$ die Bedingungen:

$$\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2) = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}(w_1 \mid w_2) = 0$$

auferlegt waren. Der *geometrische* Sinn dieser Bedingungen war der, dass der gegebene Strahl u und der transformirte u' sich auf einem Ellipsoid oder einschaligen Hyperboloid conjugirt schneiden (vgl. § 18, IV, V), der *analytische* der, dass die Constanten der Transformation gleichgesetzt werden können *einfachen Integralen* von der Form (vgl. § 8, 31):

$$v_1 \mid v_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, \varLambda} d\omega_1 \mid \int_{\lambda_0}^{\lambda, \varLambda} d\omega_2 \quad \text{und} \quad w_1 \mid w_2 = -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_1 \mid -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_2,$$

wo bei rein imaginären $v_1 \mid v_2$ und $w_1 \mid w_2$ λ zwischen den reellen Grenzen $-\infty$ und λ_0, und μ ebenso zwischen γ und μ_0 liegt.

Handelt es sich jetzt um die allgemeinere Transformation:

$$u_1' \mid u_2' = u_1 + 2t_1 \mid u_2 + 2t_2, \tag{76}$$

deren Constanten $t_1 \mid t_2$ keiner Bedingung der früheren Art unterworfen sind, so werden sich die Strahlen u und u' im Allgemeinen nicht mehr schneiden. Damit steht der Umstand in Parallele, dass $t_1 \mid t_2$ nicht *einfachen* Integralen, sondern nur *Integral-Summen* (oder Differenzen) gleichgesetzt werden können, etwa in der folgenden Weise:

$$t_1 \mid t_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, \varLambda} d\omega_1 - \int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_1 \mid \int_{\lambda_0}^{\lambda, \varLambda} d\omega_2 - \int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_2 = v_1 + w_1 \mid v_2 + w_2. \tag{77}$$

Die allgemeine Transformation (76) soll indessen an dieser Stelle nur für den Fall untersucht werden, dass $t_1 \mid t_2$ *rein imaginär* sind. Diese Voraussetzung ist nämlich immer erfüllt, wenn die Transformation irgend einen *reellen* Strahl u in einen beliebigen *reellen* Strahl u' überführen soll, indem dann $t_1 \mid t_2 = \frac{u_1' - u_1}{2} \mid \frac{u_2' - u_2}{2}$ zu nehmen ist.

Die quadratische Gleichung des Umkehrproblems (77) kann unter anderen in folgenden beiden äquivalenten Formen gegeben werden:

$$(78)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta^2\binom{0\,1}{1\,0}\cdot\vartheta^2\binom{1\,1}{0\,1}(t_1\mid t_2)}{\vartheta^2\binom{1\,1}{1\,1}\cdot\vartheta^2\binom{0\,1}{0\,0}(t_1\mid t_2)}\cdot\dfrac{\mu_0-\lambda_0}{\mu_0-z}+\dfrac{\vartheta^2\binom{0\,1}{0\,0}\cdot\vartheta^2\binom{1\,1}{1\,1}(t_1\mid t_2)}{\vartheta^2\binom{1\,1}{1\,1}\cdot\vartheta^2\binom{0\,1}{0\,0}(t_1\mid t_2)}\cdot\dfrac{\gamma-\lambda_0}{\gamma-z}=1, \\[2ex] \dfrac{\vartheta^2\binom{0\,1}{1\,0}\cdot\vartheta^2\binom{1\,1}{0\,1}(t_1\mid t_2)}{\vartheta^2\binom{1\,1}{1\,1}\cdot\vartheta^2\binom{0\,1}{0\,0}(t_1\mid t_2)}\cdot\dfrac{\mu_0-\gamma}{\mu_0-z}+\dfrac{\vartheta^2\binom{1\,1}{0\,0}\cdot\vartheta^2\binom{0\,1}{1\,1}(t_1\mid t_2)}{\vartheta^2\binom{1\,1}{1\,1}\cdot\vartheta^2\binom{0\,1}{0\,0}(t_1\mid t_2)}\cdot\dfrac{\gamma-\lambda_0}{\lambda_0-z}=1. \end{cases}$$

Da die ϑ-Quotienten bei der den Variablen $t_1 \mid t_2$ auferlegten Beschränkung reell sind, so folgt aus diesen beiden Gleichungen, ähnlich wie in § 10, *dass die beiden Wurzeln $z=\lambda$ und $z=\mu$ zwischen den reellen Grenzen $-\infty$ und λ_0, und bezüglich γ und μ_0 liegen*, womit die Bezeichnung der oberen Grenzen in (77) sich rechtfertigt. *Um diese einfache Realitätseigenschaft der Lösungen des Umkehrproblems* (77) *zu erzielen, sind in* (77) *gerade λ_0 und μ_0 als untere Integralgrenzen gewählt.* Wollte man etwa in (77) alle untern Grenzen gleich λ_0 nehmen, so würde eine solche Eigenschaft nicht bestehen.

Die Constanten $t_1 \mid t_2$ der Transformation (76) charakterisiren also immer 2 reelle Flächen des confocalen Systems, ein Ellipsoid λ und ein einschaliges Hyperboloid μ; und diese Flächen sind es, welche die *geometrische Bedeutung der Transformation* vermitteln.

Man construire nämlich in jedem der beiden Schnittpunkte eines beliebigen reellen Strahles u mit dem Ellipsoid λ denjenigen Strahl, der den Strahl u „auf dem Ellipsoid λ conjugirt schneidet"; ferner in jedem der beiden Schnittpunkte des Strahles u mit dem Hyperboloid μ denjenigen Strahl, der den Strahl u „auf dem Hyperboloid μ conjugirt schneidet." Von jedem der 4 erhaltenen Strahlen aus mache man die analoge Construction, wie die von u aus vollzogene. Man erhält dann eine Reihe von Strahlen, deren Parameter die folgende Tabelle angiebt, in der allgemein $v = v_1 \mid v_2$ mit positivem Λ das in (28) und $w = w_1 \mid w_2$ mit positivem M das in (68) definirte Integralpaar bedeutet:

$$u$$

$u+2v$	$u+2w$	$u-2v$	$u-2w$
$u+2v+2v$,	$u+2w+2v$,	$u-2v+2v$,	$u-2w+2v$,
$u+2v+2w$,	$u+2w+2w$,	$u-2v+2w$,	$u-2w+2w$,
$u+2v-2v$,	$u+2w-2v$,	$u-2v-2v$,	$u-2w-2v$,
$u+2v-2w$,	$u+2w-2w$,	$u-2v-2w$,	$u-2w-2w$.

Die Tabelle giebt in der 1. Zeile unter dem Symbol u das Parameterpaar $u_1 \mid u_2$ des gegebenen Strahles, in der 2. Zeile die Parameterpaare derjenigen Strahlen, welche den Strahl u in seinen 4 Schnittpunkten

mit den Flächen λ und μ je auf der betreffenden Fläche conjugirt schneiden. Die 4 folgenden Zeilen geben zu jedem der in der 2. Zeile bezeichneten Strahlen die 4 weiteren Strahlen, die ihm in seinen 2 Schnittpunkten mit λ in Bezug auf N_λ, und in seinen 2 Schnittpunkten mit μ in Bezug auf N_μ conjugirt sind. Unter den 16 durch die verschiedenen gleichberechtigten Constructionen erhaltenen Strahlen sind 4 mit dem ursprünglichen Strahl u identisch, und weitere 4 solche Strahlen, die durch zweimalige Anwendung der in § 19, II und § 21, II′ behandelten Construction aus u hervorgehen. Was die übrigen 8, paarweise identischen Strahlen angeht, so ergeben sich aus dem Vorstehenden die Sätze:

Ia. *Wenn man erstens, in dem Schnittpunkte P der positiven Hälfte eines gegebenen Congruenzstrahles $u_1 \mid u_2$ mit dem Ellipsoïd λ, den in Bezug auf N_λ conjugirten Strahl S, und, in dem Schnittpunkte des positiven Abschnittes des Strahles S mit dem Hyperboloid μ, den in Bezug auf N_μ conjugirten Strahl construirt: wenn man zweitens, in dem Schnittpunkte P' des positiven Abschnittes des Strahles $u_1 \mid u_2$ mit dem Hyperboloid μ, den in Bezug auf N_μ conjugirten Strahl S', und, in dem Schnittpunkte der positiven Hälfte des Strahles S' mit dem Ellipsoid λ, den in Bezug auf N_λ conjugirten Strahl construirt: so sind die je zuletzt erhaltenen Strahlen identisch, und ihre Parameter gleich*

$$u_1 + 2v_1 + 2w_1 \mid u_2 + 2v_2 + 2w_2.$$

Ib. Der Strahl $u_1 - 2v_1 - 2w_1 \mid u_2 - 2v_2 - 2w_2$ wird erhalten, indem man den Satz Ia mit durchgängiger Vertauschung der Worte „positiv“ und „negativ“ anwendet.

IIa. *Wenn man erstens, in dem Schnittpunkte P der positiven Hälfte eines gegebenen Congruenzstrahles $u_1 \mid u_2$ mit dem Ellipsoid λ, den in Bezug auf N_λ conjugirten Strahl S, und, in dem Schnittpunkt des negativen Abschnittes des Strahles S mit dem Hyperboloid μ, den in Bezug auf N_μ conjugirten Strahl construirt: wenn man zweitens, in dem Schnittpunkte P' des negativen Abschnittes des Strahles $u_1 \mid u_2$ mit dem Hyperboloid μ, den in Bezug auf N_μ conjugirten Strahl S', und, in dem Schnittpunkt der positiven Hälfte des Strahles S' mit dem Ellipsoid λ, den in Bezug auf N_λ conjugirten Strahl construirt: so sind die je zuletzt erhaltenen Strahlen identisch, und ihre Parameter gleich*

$$u_1 + 2v_1 - 2w_1 \mid u_2 + 2v_2 - 2w_2.$$

IIb. Der Strahl $u_1 - 2v_1 + 2w_1 \mid u_2 - 2v_2 + 2w_2$ wird erhalten, indem man den Satz IIa mit durchgängiger Vertauschung der Worte „positiv“ und „negativ“ anwendet.

III. *Die vorstehenden Sätze enthalten die constructive Deutung der Transformation* (76) *der reellen Strahlen der Congruenz* (46).

Die bei den Constructionen I und II benutzten Flächen λ und μ

nämlich bestimmen sich bei beliebig gegebenen, rein imaginären Constanten $t_1 | t_2$ der Transformation aus dem Ansatze (77); jenachdem die Lösung dieses Umkehrproblems für die durch $t_1 | t_2$ mitbestimmten Wurzelfunctionen Λ, M die Vorzeichen $+, +; -, -; +, -$ oder $-, +$ liefert, sind beziehungsweise die Constructionen Ia, Ib, IIa oder IIb in Anwendung zu bringen.

IV. *Sind umgekehrt u und u' zwei beliebig gegebene reelle Congruenzstrahlen, so kann u immer durch eine Transformation von der Form* (76) *in u' übergeführt werden.*

Die bei der entsprechenden Construction zu benutzenden *Flächen λ und μ*, sowie die *Auswahl unter den 4 Arten der Construction* sind durch die Lösungen λ, Λ und μ, M des Umkehrproblems:

$$(79)\quad v_1 + w_1 \,|\, v_2 + w_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} dw_1 - \int_{\mu_0}^{\mu, M} dw_1 \,\Big|\, \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} dw_2 - \int_{\mu_0}^{\mu, M} dw_2 = \frac{u_1' - u_1}{2} \,\Big|\, \frac{u_2' - u_2}{2}$$

eindeutig bestimmt, während alsdann die Construction noch nach Belieben auf 2 äquivalente Weisen ausgeführt werden kann.

§ 23.

Geradlinige Polygone, welche den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und zweien confocalen Flächen gleichzeitig einbeschrieben sind.

Die in § 22 behandelten Constructionen gewinnen an Anschaulichkeit, wenn man sie in ihrer Wiederholung betrachtet und als Constructionen geradliniger *Polygone mit begrenzten Seiten* auffasst. Solche Polygone werden den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und den Flächen λ und μ einbeschrieben sein. Dabei sollen sie ihre Ecken *abwechselnd* auf λ und auf μ haben und das Gesetz der Reflexion befolgen in dem Sinne, dass in jeder auf dem Ellipsoid λ gelegenen Ecke die Normale des Ellipsoides und in jeder auf dem Hyperboloid gelegenen Ecke die Normale des Hyperboloides den Polygonwinkel halbirt. Der den Polygonumfang beschreibende Punkt soll überdies alle Polygonseiten $S^{(i)}$ in der positiven Richtung der betreffenden Strahlen $u^{(i)}$ durchlaufen, eine Festsetzung, durch welche die Anschauung wesentlich vereinfacht und der Allgemeinheit nicht geschadet wird.

Was die Bezeichnung angeht, so soll im Laufe der Construction immer der Schnittpunkt der (i)ten und $(i+1)$ten Seite ($S^{(i)}$ und $S^{(i+1)}$) als (i)ter Eckpunkt $P^{(i)}$ benannt werden (wie in § 19).

Der Vorzug der Vorstellung der Polygone mit *begrenzten* Seiten gegenüber der Vorstellung mit *unbegrenzten* Seiten besteht darin, dass man bei jenen, anstatt von der wenig anschaulichen Theilung der unbegrenzten *Polygonseiten* in *Hälften* und *Abschnitte* (vgl. § 18), von

inneren und *äusseren Polygonecken* zu reden hat, die anschaulich leicht zu unterscheiden sind.

Die *positive* Hälfte des Strahles $u^{(i)}$ trifft nämlich, wenn der Strahl in seiner positiven Richtung durchlaufen wird, immer auf die *innere*, die *negative* Hälfte immer auf die *äussere* Seite eines beliebigen Ellipsoides λ auf. Demnach wird die auf $S^{(i)}$ folgende Seite $S^{(i+1)}$ des Polygons mit begrenzten Seiten an der inneren oder äusseren Seite des Ellipsoides λ reflectirt erscheinen, jenachdem der Eckpunkt $P^{(i)}$ auf der positiven oder negativen Hälfte des Strahles $u^{(i)}$ gelegen ist.

V. *Jenachdem also ein auf das Ellipsoid λ fallender Eckpunkt $P^{(i)}$ auf der positiven oder negativen „Hälfte" des Strahles $u^{(i)}$ gelegen ist, wird er „ein innerer oder äusserer Eckpunkt auf dem Ellipsoide" sein.*

Ebenso ergiebt sich:

V'. *Jenachdem ein auf das Hyperboloid μ fallender Eckpunkt $P^{(i)}$ auf dem positiven oder negativen „Abschnitte" des Strahles $u^{(i)}$ gelegen ist, wird er „ein innerer oder äusserer Eckpunkt auf dem Hyperboloide" sein.**)

Der Charakter der den Flächen λ und μ einbeschriebenen Polygone ist nun ein verschiedener, jenachdem die Construction der Sätze I oder der Sätze II des vorigen Paragraphen in Anwendung gebracht wird. Mit Beziehung hierauf sollen die Polygone als Polygone I. und II. Art unterschieden werden.

Die Construction eines Polygons I. Art geschieht in folgender Weise: Man wählt einen beliebigen Congruenzstrahl $u^{(1)}$ als erste (beiläufig unbegrenzte) Seite $S^{(1)}$ aus und nimmt den Schnittpunkt seiner positiven Hälfte mit dem Ellipsoid λ als 1. Eckpunkt $P^{(1)}$. Von hier verfolgt man den in Bezug auf N_λ zu $u^{(1)}$ conjugirten Strahl $u^{(2)}$ in seiner positiven Richtung bis zum Schnittpunkt $P^{(2)}$ seines positiven Abschnittes mit dem Hyperboloid μ; vom Punkte $P^{(2)}$ als 2. Eckpunkt geht man auf den in Bezug auf N_μ conjugirten Strahl $u^{(3)}$ über und verfolgt ihn in positiver Richtung bis zum Schnittpunkt $P^{(3)}$ seiner positiven Hälfte mit λ; von $P^{(3)}$ als 3. Eckpunkt geht man auf den in Bezug auf N_λ conjugirten Strahl $u^{(4)}$ über, verfolgt ihn in positiver Richtung bis zum Schnittpunkt $P^{(4)}$ seines positiven Abschnittes mit μ, u. s. f.

Man erhält so ein Polygon mit (im Allgemeinen**)) begrenzten Seiten, welches den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und den Flächen λ und μ in der Weise einbeschrieben ist, dass seine Ecken abwechselnd auf der einen oder andern Fläche liegen. *Charakteristisch ist für dieses*

*) Ueber die Definition der Innen- und Aussenseite des einschaligen Hyperboloides vergl. § 21.

**) Die erste Seite, mit der die Construction begann, und die letzte, mit der sie abgebrochen wird, bleiben unbegrenzt.

unter wiederholter Anwendung von Satz Ia (§ 22) *construirte Polygon I. Art, dass alle Ecken auf den beiden Flächen* λ *und* μ *von derselben Benennung, nämlich innere Ecken sind.*

Der Construction Ib entspricht analog ein Polygon I. Art mit lauter äusseren Ecken.

Die Parameter der ungeraden Polygonseiten $S^{(1)}, S^{(3)}, \ldots S_{2l}^{(2l+1)}, \ldots$ bilden nach den Sätzen Ia und Ib die Reihe:

$$(80)\quad u^{(1)},\ u^{(1)} \pm 2(v+w),\ u^{(1)} \pm 4(v+w),\ \ldots u^{(1)} \pm 2l(v+w), \ldots,$$

wo das doppelte Vorzeichen den beiden Constructionen Ia und Ib entspricht.

Die Construction eines Polygons II. Art geschieht in folgender Weise: Man wählt den Schnittpunkt der positiven Hälfte eines Strahles $u^{(1)}$ mit dem Ellipsoid λ als 1. Eckpunkt $P^{(1)}$ und geht von hier auf den in Bezug auf N_λ conjugirten Strahl $u^{(2)}$ über. Diesen verfolgt man in seiner positiven Richtung bis zum Schnittpunkt $P^{(2)}$ seines negativen Abschnittes mit dem Hyperboloid μ; von $P^{(2)}$ geht man auf den in Bezug auf N_μ conjugirten Strahl über, den man in positiver Richtung verfolgt bis zum Schnittpunkt $P^{(3)}$ seiner positiven Hälfte mit λ; von $P^{(3)}$ geht man auf den in Bezug auf N_λ conjugirten Strahl über und erreicht auf demselben den Schnittpunkt $P^{(4)}$ des negativen Abschnittes mit μ, u. s. f.

Man erhält so ein Polygon mit (im Allgemeinen) begrenzten Seiten, welches den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und den Flächen λ und μ in der Weise einbeschrieben ist, dass seine Ecken abwechselnd auf der einen oder anderen Fläche liegen. *Charakteristisch ist für dieses, unter wiederholter Anwendung von Satz* IIa (§ 22) *construirte Polygon II. Art, dass alle Ecken auf der einen der beiden letztgenannten Flächen, auf dem Ellipsoid* λ, *innere, alle Ecken auf der anderen, auf dem Hyperboloid* μ, *äussere Ecken sind.*

Der Construction IIb *entspricht analog ein Polygon II. Art mit lauter äusseren Ecken auf dem Ellipsoid* λ *und lauter inneren auf dem Hyperboloid* μ.

Die Parameter der ungeraden Polygonseiten $S^{(1)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(2l+1)}, \ldots$ bilden nach den Sätzen IIa und IIb die Reihe:

$$(80')\quad u^{(1)},\ u^{(1)} \pm 2(v-w),\ u^{(1)} \pm 4(v-w),\ \ldots,\ u^{(1)} \pm 2l(v-w), \ldots,$$

wo das doppelte Vorzeichen den beiden Constructionen IIa und IIb entspricht.

An die vorstehenden Polygonconstructionen knüpft sich nun unmittelbar der folgende Schliessungssatz:

Ein den Flächen λ_0 *und* μ_0 *umbeschriebenes und gleichzeitig den Flächen* λ *und* μ *nach dem Gesetz der Reflexion einbeschriebenes Polygon, dessen Ecken abwechselnd auf den beiden letztgenannten Flächen liegen,*

schliesst sich mit $2l$ Seiten, unabhängig von der Wahl der Anfangsseite, wenn die Flächen λ und μ den Bedingungen entsprechen:

$$(81)\quad 2l(v+w)=2l\int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda}d\omega_1-2l\int_{\mu_0}^{\mu,M}d\omega_1 \mid 2l\int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda}d\omega_2-2l\int_{\mu_0}^{\mu,M}d\omega_2\equiv 0\mid 0$$
$$(\mathrm{mod.}\ 2\pi i\mid 0,\ 0\mid 2\pi i),$$

und zwar ist, jenachdem diese Bedingungen mit gleichen oder ungleichen Vorzeichen der beiden Quadratwurzeln Λ und M erfüllt sind, das geschlossene Polygon von der I. oder II. Art.

Handelt es sich bei gegebenen Flächen λ_0 und μ_0 darum, zwei Flächen λ und μ so zu *bestimmen*, dass das bezeichnete Polygon sich mit $2l$ Seiten schliesst, so geben die Congruenzen (81) mit den Parametern λ und μ der gesuchten Flächen auch das Vorzeichen des Productes der zugehörigen Quadratwurzeln Λ und M. Es ist daher bei beliebig angenommenen Flächen λ_0 und μ_0 *nicht nur das Paar der Flächen λ und μ, sondern auch die Art des betreffenden Polygons bestimmt.* Dieses ist nämlich von der I. oder II. Art, jenachdem in den gefundenen Lösungen λ, Λ und μ, M der Congruenzen (81) die Quadratwurzeln Λ und M gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Kapitel V.

Geometrische Bedeutung des Abel'schen Additionstheorems.

§ 24.

Die gemeinsamen Transversalen zweier Strahlen der Strahlencongruenz (46).

Zwei Strahlen S' und S'' der Congruenz 4. Ordnung und 4. Classe (46) haben im Allgemeinen 8 Transversalen S, die ihrerseits der Congruenz angehören. Wenn es sich darum handelt, die transcendenten Parameterpaare der 8 Transversalen S durch die Parameterpaare der Strahlen S' und S'' allgemein darzustellen, muss man die Beschränkung auf reelle Congruenzstrahlen fallen lassen, und damit die volle Variabilität der Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ der Strahlencongruenz auch im complexen Gebiete zulassen.

Unter Zugrundelegung dieser Auffassung sei zur Abkürzung gesetzt:

$$u=u_1\mid u_2,\quad p=\pi i\mid 0,\quad p'=0\mid \pi i,\quad q=a_{11}\mid a_{21},\quad q'=a_{12}\mid a_{22};$$

es sei ferner unter u irgend *eines* der *vier* einem Strahle S zugehörigen Parameterpaare verstanden. Dann sind die *vier* Parameterpaare des Strahles (vgl. § 13):

$$u, \quad u+p+q, \quad -u+q', \quad -u+p+q+q'.$$

Nach § 18 entsprechen nun den Parameterpaaren u und u' zwei sich schneidende Congruenzstrahlen S und S', wenn u und u' einer der 4 Gleichungen genügen:

$$\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}\left(\frac{u-u'}{2}\right)=0, \qquad \vartheta\binom{0\,1}{1\,1}\left(\frac{u-u'}{2}\right)=0,$$

$$\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}\left(\frac{u+u'}{2}\right)=0, \qquad \vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\left(\frac{u+u'}{2}\right)=0,$$

die man beziehungsweise auch schreiben kann:

$$(82)\quad \begin{array}{ll} \vartheta\binom{1\,1}{0\,1}\left(\frac{u-u'}{2}\right)=0, & \vartheta\binom{1\,1}{0\,1}\left(\frac{u-u'+p+q}{2}\right)=0, \\ \vartheta\binom{1\,1}{0\,1}\left(\frac{u+u'+q'}{2}\right)=0, & \vartheta\binom{1\,1}{0\,1}\left(\frac{u+u'+p+q+q'}{2}\right)=0. \end{array}$$

Wenn man nun alle möglichen Differenzen zwischen je einem der 4 Parameterpaare des Strahles S und je einem der 4 Parameterpaare des Strahles S' bildet, und zwei nur um Multipla doppelter Periodenpaare oder nur im Vorzeichen verschiedene Werthe solcher Differenzen als gleich ansieht, so bleiben nur folgende 4 verschiedenen Werthe der Differenzen übrig:

$$(83)\quad u-u', \quad u-u'+p+q, \quad u+u'+q', \quad u+u'+p+q+q';$$

diese sind gerade die 4 Werthe, deren Hälften als Argumente der ϑ-Functionen in (82) auftreten. Man wird das erhaltene Resultat in dem Satze aussprechen:

Die Parameterdifferenz zweier Strahlen S und S' (sie sei schlechthin mit $u-u'$ bezeichnet) *ist, vom Vorzeichen und von Multiplis der doppelten Periodenpaare abgesehen, vierdeutig; sie hat die 4 Werthe* (83), *wenn u, resp. u', irgend eines der 4 Parameterpaare des Strahles S, resp. S', bedeutet.*

Da auf die Gleichungen (82) die Aenderung der Argumente der ϑ-Functionen im Vorzeichen oder um Multipla *einfacher* Periodenpaare ohne Einfluss ist, so kann man das Criterium des Schnittes zweier Strahlen S und S' so formuliren:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Strahlen S und S' der Congruenz sich schneiden, ist die, dass die Gleichung:

$$\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}\left(\frac{u-u'}{2}\right)=0$$

für irgend einen der 4 Werthe der Parameterdifferenz $u-u'$ der beiden Strahlen erfüllt sei.

Demnach wird der Strahl S eine *gemeinsame Transversale* zweier Strahlen S' und S'' sein, wenn gleichzeitig die beiden Gleichungen:

(84) $$\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u-u'}{2}\right)=0,\qquad \vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u-u''}{2}\right)=0,$$

die eine für irgend einen Werth der Parameterdifferenz $u - u'$, die andere für irgend einen Werth der Parameterdifferenz $u - u''$, erfüllt sind.

Die beiden Gleichungen (84) sagen nun nicht mehr und nicht weniger aus, als dass die Argumente der beiden ϑ-Functionen Paaren einfacher Integrale von der Form:

$$v' = v_1' \mid v_2' = \int_{z_0}^{z', Z'} d\omega_1 \mid \int_{z_0}^{z', Z'} d\omega_2, \qquad v'' = v_1'' \mid v_2'' = \int_{z_0}^{z'', Z''} d\omega_1 \mid \int_{z_0}^{z'', Z''} d\omega_2$$

gleichgesetzt werden können, dass also etwa:

(85) $$\frac{u-u'}{2} = v', \qquad \frac{u-u''}{2} = v''$$

ist. Nimmt man also diese beiden Gleichungen in der hingeschriebenen Form, so folgt durch Elimination von u:

(86) $$\frac{u''-u}{2} = v' - v''.$$

In Folge der Vierdeutigkeit ihrer linken Seiten sind aber die Gleichungen (85) 16 Gleichungenpaaren äquivalent. Eliminirt man jedoch aus diesen das jedesmalige u, so erhält man im Ganzen nur 4 verschiedene Formen der Gleichung (86). Diese 4 Formen, von denen sich jede 4 mal einstellt, sind ihrerseits in der hingeschriebenen Gleichung (86) enthalten, wenn man in derselben unter $u'' - u'$ die (vierdeutige) Parameterdifferenz der Strahlen S'' und S' versteht.

Die Gleichung (86) ist somit 4 Umkehrproblemen äquivalent, deren Auflösung bei gegebenen u' und u'' 4 Stellenpaare z', Z'; z'', Z'' des hyperelliptischen Gebildes z, Z und damit 4 Werthepaare v', v'' bestimmt. Diejenigen 4 der 16 Gleichungenpaare (85), welche auf das nämliche der 4 Umkehrprobleme (86) geführt haben, liefern dann mit Benutzung des durch dieses Umkehrproblem gefundenen Werthepaares v', v'' 4 Werthe von u, die aber zu *einem* Congruenzstrahle gehören.

Um dies an einem Beispiel auszuführen, beachte man, dass folgende 4 von den 16 Gleichungenpaaren (85):

$$\frac{u_\alpha - u'}{2} = v_\alpha', \qquad \frac{u_\alpha - u'' + p + q}{2} = v_\alpha'',$$

$$\frac{u_\beta - u' + p + q}{2} = v_\beta', \qquad \frac{u_\beta - u''}{2} = v_\beta'',$$

$$\frac{u_\gamma + u' + q'}{2} = v_\gamma', \qquad \frac{u_\gamma + u'' + p + q + q'}{2} = v_\gamma'',$$

$$\frac{u_\delta + u' + p + q + q'}{2} = v_\delta', \qquad \frac{u_\delta + u'' + q'}{2} = v_\delta''$$

auf das nämliche Umkehrproblem:

$$\frac{u''-u'+p+q}{2}=v_\alpha'-v_\alpha''=v_\beta'-v_\beta''=v_\gamma''-v_\gamma'=v_\delta''-v_\delta'$$

führen.

Die Lösung dieses Umkehrproblems, welches folgendermassen bezeichnet werde:

$$v'-v''=\frac{u''-u'+p+q}{2},$$

bestimmt das Werthepaar v', v'' eindeutig (von Multiplis der *einfachen* Perioden abgesehen), ohne aber die beiden Elemente v' und v'' gegeneinander unterscheidbar zu machen; man hat also mit gleichem Rechte einerseits $v_\alpha'=v'$, $v_\alpha''=v''$ und andererseits $v_\alpha'=-v''$, $v_\alpha''=-v'$ und so auch für v_β, v_γ, v_δ. Mit Benutzung einer jeden dieser beiden Lösungsweisen erhält man aus den ursprünglichen 4 Gleichungenpaaren die jedesmalige Unbekannte u, überdies je in 2 äquivalenten Formen; es ergiebt sich einerseits (von Multiplis der *doppelten* Perioden abgesehen):

$$u_\alpha=\begin{cases}u'+2v',\\ u''+2v''+p+q,\end{cases}\qquad u_\beta=\begin{cases}u'+2v'+p+q,\\ u''+2v'',\end{cases}$$

$$u_\gamma=\begin{cases}-u'-2v'+q',\\ -u''-2v''+p+q+q',\end{cases}\qquad u_\gamma=\begin{cases}-u'-2v'+p+q+q',\\ -u''-2v''+q',\end{cases}$$

und andererseits:

$$u_\alpha=\begin{cases}u'-2v'',\\ u''-2v'+p+q,\end{cases}\qquad u_\beta=\begin{cases}u'-2v''+p+q,\\ u''-2v',\end{cases}$$

$$u_\gamma=\begin{cases}-u'+2v''+q',\\ -u''+2v'+p+q+q',\end{cases}\qquad u_\delta=\begin{cases}-u'+2v''+p+q+q',\\ -u''+2v'+q'.\end{cases}$$

Mit Rücksicht auf § 13 erkennt man nun, dass die beiden Werthereihen u_α, u_β, u_γ, u_δ, wie behauptet wurde, je die vier Werthepaare eines und desselben Congruenzstrahles geben.

In analoger Weise liefert *jedes* der 4 Umkehrprobleme (86) *je* 2 der gesuchten 8 Transversalen der Strahlen S' und S''. Das Resultat ist dieses:

Um die 8 gemeinsamen Transversalen der beiden Congruenzstrahlen S' und S'', die je durch irgend eines ihrer 4 Parameterpaare $u'=u_1'\mid u_2'$ und $u''=u_1''\mid u_2''$ gegeben sind, zu finden, bestimmt man aus den 4 Gleichungen:

$$(87)\quad\begin{cases}v'^{(1)}-v''^{(1)}=\dfrac{u''-u'}{2}, & v'^{(3)}-v''^{(3)}=-\dfrac{u''+u'+q'}{2},\\[2ex] v'^{(2)}-v''^{(2)}=\dfrac{u''-u'+p+q}{2}, & v'^{(4)}-v''^{(4)}=-\dfrac{u''+u'+p+q+q'}{2},\end{cases}$$

wo allgemein

$$v'^{(\varkappa)} - v''^{(\varkappa)} = \int_{\lambda_0}^{z'^{(\varkappa)}, Z'^{(\varkappa)}} d\omega_1 - \int_{\lambda_0}^{z''^{(\varkappa)}, Z''^{(\varkappa)}} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\lambda_0}^{z'^{(\varkappa)}, Z'^{(\varkappa)}} d\omega_2 - \int_{\lambda_0}^{z''^{(\varkappa)}, Z''^{(\varkappa)}} d\omega_2,$$

die 4 Stellenpaare $z'^{(\varkappa)}$, $Z'^{(\varkappa)}$; $z''^{(\varkappa)}$, $Z''^{(\varkappa)}$ des hyperelliptischen Gebildes z, Z, und damit die 4 mal 2 Paare einfacher Integrale $v'^{(\varkappa)} = v_1'^{(\varkappa)} | v_2'^{(\varkappa)}$, $v''^{(\varkappa)} = v_1''^{(\varkappa)} | v_2''^{(\varkappa)}$. Alsdann sind die 8 gesuchten Transversalen eindeutig bestimmt unter anderen durch folgende 8 Parameterpaare $\tau = \tau_1 | \tau_2$:

$$(88) \quad \begin{cases} \tau'^{(1)} = u' + 2v'^{(1)}, & \tau''^{(1)} = u' - 2v''^{(1)}, \\ \tau'^{(2)} = u' + 2v'^{(2)}, & \tau''^{(2)} = u' - 2v''^{(2)}, \\ \tau'^{(3)} = u' + 2v'^{(3)}, & \tau''^{(3)} = u' - 2v''^{(3)}, \\ \tau'^{(4)} = u' + 2v'^{(4)}, & \tau''^{(4)} = u' - 2v''^{(4)}. \end{cases}$$

Die übrigen Parameterpaare einer jeden Transversale τ sind nach dem oben ausgeführten Beispiel leicht zusammenzustellen.

§ 25.

Die Unterscheidung der reellen gemeinsamen Transversalen zweier Congruenzstrahlen.

Wenn die beiden gegebenen Parameterpaare u' und u'' rein imaginär sind, und damit nach § 10 und § 12 die entsprechenden Congruenzstrahlen S' und S'' reell ausfallen, so entsteht die Frage, welche von den 8 gemeinsamen Transversalen der letzteren reell, und welche nicht reell sind. Bei den reellen Transversalen würde sich weiter die Frage stellen, ob dieselben in ihren Schnittpunkten λ, μ, ν mit dem einen oder anderen der gegebenen Strahlen zu diesem in Bezug auf N_λ, N_μ oder N_ν conjugirt sind. Um diese Fragen zu entscheiden, schreibt man die Umkehrprobleme (87) in etwas veränderter Form, indem man die folgenden Werthe halber Periodenpaare (vgl. § 8, (29)):

$$\frac{p+q}{2} = \frac{\pi i + a_{11}}{2} \,\Big|\, \frac{a_{21}}{2} = \int_{\lambda_0}^{\mu_0} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\lambda_0}^{\mu_0} d\omega_2,$$

$$\frac{p+q'}{2} = \frac{\pi i + a_{12}}{2} \,\Big|\, \frac{a_{22}}{2} = \int_{\lambda_0}^{\beta} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\lambda_0}^{\beta} d\omega_2$$

benutzt und zur Abkürzung setzt:

$$w_1^{(\varkappa)} \,|\, w_2^{(\varkappa)} = \int_{\mu_0}^{z^{(\varkappa)}, Z^{(\varkappa)}} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\mu_0}^{z^{(\varkappa)}, Z^{(\varkappa)}} d\omega_2, \qquad s_1^{(\varkappa)} \,|\, s_2^{(\varkappa)} = \int_{\beta}^{z^{(\varkappa)}, Z^{(\varkappa)}} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\beta}^{z^{(\varkappa)}, Z^{(\varkappa)}} d\omega_2.$$

Es bestehen dann in Bezug auf die einfachen Periodenpaare als Moduln die Congruenzen:

$$v^{(\varkappa)} + \frac{p+q}{2} \equiv w^{(\varkappa)}, \qquad v^{(\varkappa)} - \frac{q'}{2} \equiv s^{(\varkappa)} + \frac{p}{2}.$$

Man kann daher den Ansätzen (87), die für Congruenzen in Bezug auf die einfachen Perioden als Moduln anzusehen sind, folgende Form geben:

$$(87') \quad \begin{cases} v'^{(1)} - v''^{(1)} \equiv w'^{(1)} - w''^{(1)} \equiv s'^{(1)} - s''^{(1)} \equiv \dfrac{u''-u'}{2}, \\ v'^{(2)} - w''^{(2)} \equiv \dfrac{u''-u'}{2}, \\ v'^{(3)} - s''^{(3)} \equiv -\dfrac{u''+u'+p}{2}, \\ w'^{(4)} - s''^{(4)} \equiv -\dfrac{u''+u'+p}{2}. \end{cases}$$

Stellt man nun die quadratischen Gleichungen dieser 4 Umkehrprobleme auf, so erkennt man ähnlich, wie in § 10, dass bei rein imaginären Werthen von u' und u'' (p ist ebenfalls rein imaginär) die Lösungen der 3 letzten Umkehrprobleme reell sind und beziehungsweise zwischen den Grenzen liegen:

$$\begin{aligned} -\infty < z'^{(2)} < \lambda_0, \qquad & \gamma < z''^{(2)} < \mu_0, \\ -\infty < z'^{(3)} < \lambda_0, \qquad & \beta < z''^{(3)} < \alpha\;, \\ \gamma < z'^{(4)} < \mu_0, \qquad & \beta < z''^{(4)} < \alpha\;, \end{aligned}$$

während sich über die Lösungen $z'^{(1)}$ und $z''^{(1)}$ des ersten Umkehrproblems nur soviel ergiebt, dass, wenn die eine reell und in einem der Intervalle $-\infty\,\lambda_0$, $\gamma\mu_0$, $\beta\alpha$ gelegen ist, nothwendig auch die andere reell und in demselben Intervalle gelegen sein muss. Jenachdem die beiden Lösungen $z'^{(1)}$ und $z''^{(1)}$ in dem 1. oder 2. oder 3. der genannten Intervalle liegen, fallen beziehungsweise $v'^{(1)}$ und $v''^{(1)}$ oder $w'^{(1)}$ und $w''^{(1)}$ oder $s'^{(1)}$ und $s''^{(1)}$ rein imaginär aus. Dagegen bleiben $v'^{(2)}$ und $w''^{(2)}$, $v'^{(3)}$ und $s''^{(3)}$, $w'^{(4)}$ und $s''^{(4)}$ immer rein imaginär.

Stellt man nun die volle Tabelle der Parameterpaare (88) der 8 gemeinsamen Transversalen auf, und zwar jedes der 4 Parameterpaare einer jeden Transversalen in doppelter Form, so übersieht man unmittelbar, dass nach dem eben Bemerkten unter den 4 Parameterpaaren einer jeden der 6 Transversalen, welche den 3 letzten Umkehrproblemen (87') entsprechen, immer ein rein imaginäres Parameterpaar sich vorfindet, woraus nach § 10 und § 12 die Realität dieser 6 Transversalen folgt. Das 1. Transversalenpaar ist nur reell, wenn die Lösungen des 1. Umkehrproblems (87') in einem der Intervalle $-\infty\,\lambda_0$, $\gamma\mu_0$, $\beta\alpha$ liegen.

Betrachtet man nun beispielsweise die beiden dem 2. Umkehrproblem (87') entsprechenden Transversalen, deren rein imaginäre Parameterpaare die folgenden sind:

$$\tau'^{(2)} = u' + 2v'^{(2)} = u'' + 2w''^{(2)},$$
$$\tau''^{(2)} = u' - 2w''^{(2)} = u'' - 2v'^{(2)},$$

so erfüllen dieselben die Relationen:

$$\vartheta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{\tau'^{(2)} - u'}{2}\right) = 0, \qquad \vartheta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{\tau'^{(2)} - u''}{2}\right) = 0,$$
$$\vartheta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{\tau''^{(2)} - u'}{2}\right) = 0, \qquad \vartheta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{\tau''^{(2)} - u''}{2}\right) = 0.$$

Daraus folgt nach § 18, IV und V: Die Strahlen $\tau'^{(2)}$ und u' einerseits und die Strahlen $\tau''^{(2)}$ und u'' andererseits schneiden sich auf dem Ellipsoid $\lambda = z'^{(2)}$, die Strahlen $\tau'^{(2)}$ und u'' einerseits und die Strahlen $\tau''^{(2)}$ und u' andererseits schneiden sich auf dem Hyperboloid $\mu = z''^{(2)}$ conjugirt.

Indem man die analogen Schlüsse bei den übrigen Transversalenpaaren wiederholt, erhält man folgendes Resultat:

Von den 4 *Paaren gemeinsamer Transversalen zweier beliebig gegebener reeller Congruenzstrahlen sind* 3 *Paare immer reell.*

Die beiden Transversalen des 1. *dieser reellen Paare schneiden je den einen gegebenen Strahl auf einem Ellipsoid, den anderen auf einem einschaligen Hyperboloid conjugirt; die des* 2. *Paares je den einen gegebenen Strahl auf einem Ellipsoid, den anderen auf einem zweischaligen Hyperboloid conjugirt; die des* 3. *Paares je den einen gegebenen Strahl auf einem einschaligen, den anderen auf einem zweischaligen Hyperboloid conjugirt.*

Die beiden Transversalen des 4. *Paares schneiden, wenn sie reell sind, je* b e i d e *gegebenen Strahlen entweder auf einem Ellipsoid oder auf einem einschaligen oder auf einem zweischaligen Hyperboloid conjugirt.*

In der Reihenfolge der hiermit gegebenen Charakteristiken sollen die Transversalen der 4 Paare als Transversalen 1., 2., 3. und 4. Art bezeichnet werden. In den folgenden Paragraphen werden nun vornehmlich die beiden (immer reellen) Transversalen 1. Art benutzt werden; es soll deshalb nochmals die Bestimmung derselben recapitulirt, und zugleich auf eine Vorzeichendiscussion hingewiesen werden, die bisher ausser Acht blieb. Für eine reelle Transversale bestimmt nämlich das betreffende Umkehrproblem (87′) nicht nur die beiden Flächen, auf welchen die Transversale die gegebenen Strahlen conjugirt schneidet, sondern, wie aus § 18, IV und V ohne Schwierigkeit hervorgeht, auch die Benennung (positiv oder negativ) der Hälfte oder des Abschnittes der Transversale, auf welchem jeder der Schnittpunkte mit den gegebenen Strahlen liegt. Um dabei mit früheren Bezeichnungen (§ 18 und § 21) in Einklang zu kommen, wird wie dort

$$v = v_1 \mid v_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_1 \mid \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_2$$

und

$$w = w_1 \mid w_2 = -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_1 \mid -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_2$$

angenommen, und die bisherigen Bezeichnungen $v'^{(2)}$ und $w''^{(2)}$ des § 25 resp. durch v und $-w$ ersetzt. Man hat dann folgende Sätze:

Sind $u' = u_1' \mid u_2'$ und $u'' = u_1'' \mid u_2''$ zwei beliebig gegebene reelle Congruenzstrahlen, so giebt es zu denselben innerhalb der Congruenz immer und nur zwei gemeinsame Transversalen 1. *Art.*

Jede derselben schneidet den einen der beiden gegebenen Strahlen auf dem Ellipsoid λ, den anderen auf dem einschaligen Hyperboloid μ conjugirt, wo λ und μ sich aus dem Umkehrproblem:

$$(89)\qquad v_1 + w_1 \mid v_2 + w_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_1 - \int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_1 \mid \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_2 - \int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_2$$
$$= \frac{u_1'' - u_1'}{2} \,\Big|\, \frac{u_2'' - u_2'}{2}$$

bestimmen.

Die Parameter der beiden Transversalen sind:

$$(90)\qquad \tau' = u' + 2v = u'' - 2w \quad \text{und} \quad \tau'' = u' + 2w = u'' - 2v.$$

Hiernach ist das Problem, die gemeinsamen Transversalen 1. Art der Strahlen u' und u'' zu finden, identisch mit dem Transformationsproblem, auf welches sich der Satz IV des § 22 bezog. Die *hier* gesuchten Transversalen sind gerade die beiden *dort* zur Verfügung gestellten Mittelglieder einer Construction, welche den Strahl u' in den Strahl u'' überführte. In der That sind die aus (90) abzulesenden Relationen:

$$u' = u', \quad \tau' = u' + 2v, \quad \tau'' = u' + 2w, \quad u'' = u' + 2v + 2w$$

diejenigen, welche in § 22 ihre geometrische Bedeutung gefunden haben. Als Anwendungen der dortigen Resultate gehen folgende Bemerkungen hervor:

Ist in den gefundenen Lösungen λ, Λ und μ, M des Umkehrproblems (89) Λ *positiv, so schneidet die Transversale τ' den Strahl u' auf seiner positiven Hälfte, und der Strahl u'' die Transversale τ'' auf ihrer positiven Hälfte.*

Ist M *positiv, so schneidet die Transversale τ'' den Strahl u' auf seinem positiven Abschnitt, und der Strahl u'' die Transversale τ' auf ihrem positiven Abschnitt.*

Beide Sätze gelten unabhängig von einander auch nach durchgängiger Ersetzung des Wortes „positiv“ durch das Wort „negativ“.

Man ersieht die Vorzeichenregel leicht aus folgender Tabelle, welche, für die verschiedenen Vorzeichen von Λ und M, in der 1. und 4. Colonne die Benennungen derjenigen Hälften der Strahlen u' und τ'' giebt, auf welchen bezüglich die Schnittpunkte $(u'\tau')$ und $(\tau''u'')$ derselben mit den Strahlen τ' und u'' liegen, und in der 2. und 3. Colonne die Benennungen derjenigen Abschnitte der Strahlen τ' und u' giebt, auf welchen bezüglich die Schnittpunkte $(\tau'u'')$ und $(u'\tau'')$ derselben mit den Strahlen u'' und τ'' liegen:

u' in $(u'\tau')$	τ' in $(\tau'u'')$	u' in $(u'\tau'')$	τ'' in $(\tau''u'')$	Λ	M
+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	−
−	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	−

In dieser Tabelle ist alles nöthige enthalten; denn da der Schnittpunkt zweier Strahlen, die sich auf einem Ellipsoid (einschaligen Hyperboloid) conjugirt schneiden, immer auf der positiven Hälfte (dem positiven Abschnitt) des einen und der negativen Hälfte (dem negativen Abschnitt) des anderen liegt, so reicht es aus, die Benennung des *einen* der beiden Strahlen im Schnittpunkt anzugeben.

Wenn die beiden gegebenen Strahlen u' und u'' sich im Besonderen auf einem Ellipsoid λ conjugirt schneiden, also die Bedingung $\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u''-u'}{2}\right)=0$ erfüllen, so giebt der Ansatz (89) für μ, M den Werth μ_0, sodass $w=0$ wird, und die beiden Transversalen nach (90) die Parameter $\tau'=u'+2v=u''$ und $\tau''=u'=u''-2v$ bekommen. Analoges gilt für $\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u''-u'}{2}\right)=0$; also: *Zwei sich auf einem Ellipsoid oder auf einem einschaligen Hyperboloid conjugirt schneidende Strahlen haben sich selbst als gemeinsame Transversalen* 1. *Art.*

Dies gilt auch dann, wenn die beiden Strahlen u' und u'' zusammenfallen; sie schneiden sich dann gleichzeitig auf dem Ellipsoid $\lambda=\lambda_0$ und dem einschaligen Hyperboloid $\mu=\mu_0$ conjugirt.

§ 25.

Geradlinige Polygone, welche den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und einer Reihe confocaler Flächen gleichzeitig einbeschrieben sind.

Neben den ausgezeichneten Flächen λ_0 und μ_0 des confocalen Systems werden l Ellipsoide $\lambda^{(i)}$ $(\lambda^{(i)}<\lambda_0,\ i=1,2,\ldots l)$ und m einschalige Hyperboloide $\mu^{(k)}$ $(\gamma<\mu^{(k)}<\mu_0,\ k=1,2,\ldots,m)$ in die

Betrachtung gezogen. Es handelt sich um geradlinige, im Allgemeinen ungeschlossene Polygone von $l+m+1$ Seiten, welche den Flächen λ_0 und μ_0 umbeschrieben und den Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$ in der Weise einbeschrieben sind, dass auf jede der letzteren eine der $l+m$ Ecken des Polygons zu liegen kommt. Die Seiten der Polygone sollen dabei als unbegrenzte Gerade gedacht werden. Jenachdem ferner eine Ecke des Polygons auf einem Ellipsoid $\lambda^{(i)}$ oder einem einschaligen Hyperboloid $\mu^{(k)}$ liegt, soll der Winkel der beiden daselbst zusammenstossenden Seiten von der Normale des Ellipsoides oder bezüglich des Hyperboloides halbirt werden.

Wenn die beiden Flächen λ_0 und μ_0, sowie die $l+m$ Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$ gegeben sind, so hat man eine Reihe *willkürlicher Elemente* bei der Construction der bezeichneten Polygone zu unterscheiden:

1. Als *Anfangsstrahl* $u^{(1)}$ des Polygons kann ein beliebiger reeller Strahl der Congruenz (46) gewählt werden.

2. Als Anfangsecke $P^{(1)}$ bleibt sodann einer der beiden Schnittpunkte des Strahles $u^{(1)}$ mit einer der Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$ nach Belieben verfügbar. Ist die Wahl getroffen, so ist zwar der folgende Strahl $u^{(2)}$ als derjenige Strahl bestimmt, der in dem gewählten Punkte $P^{(1)}$ den Strahl $u^{(1)}$ auf der betreffenden Fläche conjugirt schneidet, aber es bietet sich wieder jeder der beiden Schnittpunkte des Strahles $u^{(2)}$ mit einer der $l+m-1$ noch nicht benutzten Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$ als folgende Ecke $P^{(2)}$ dar. Die analoge *Zweideutigkeit* wiederholt sich, selbst bei gegebener Reihenfolge der Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$, von Seite zu Seite.

3. Dabei bleibt schliesslich die *Reihenfolge*, in der die $l+m$ Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$ bei der Construction benutzt werden, völlig disponibel.

Um vor Allem für die zweite der hervorgehobenen Willkürlichkeiten einen analytischen Ausdruck zu gewinnen, mögen die beiden anderen Willkürlichkeiten vorerst durch eine entsprechende Festsetzung beseitigt werden. Es seien also die $l+m$ Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$ in eine bestimmte Reihenfolge geordnet, in der sie mit $\varrho^{(1)}, \varrho^{(2)}, \ldots, \varrho^{(l+m)}$ bezeichnet, und in der sie als Träger der successiven Eckpunkte $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(l+m)}$ des Polygons verwendet werden sollen. Es sei ferner ein beliebiger reeller Strahl $u^{(1)}$ der Congruenz (46) als Anfangsseite gewählt. Es wird dann im Laufe der Construction immer der Schnittpunkt des $h$ten Strahles $u^{(h)}$ $(h=1, 2, \ldots, l+m)$ mit dem $(h+1)$-ten Strahle $u^{(h+1)}$ als der $h$te Eckpunkt $P^{(h)}$ des Polygons betrachtet.

Die Construction sei bereits bis zum Eckpunkt $P^{(h-1)}$ auf der Fläche $\varrho^{(h-1)}$ und dem hierauf folgenden Strahl $u^{(h)}$ fortgesetzt. Dieser Strahl $u^{(h)}$ schneidet die folgende Fläche $\varrho^{(h)}$ in 2 Punkten, die, wenn $\varrho^{(h)}$ ein Ellipsoid $\lambda^{(i)}$ ist, bezüglich auf der positiven und auf der negativen Hälfte, und wenn $\varrho^{(h)}$ ein einschaliges Hyperboloid $\mu^{(k)}$ ist,

bezüglich auf dem positiven und auf dem negativen Abschnitt des Strahles liegen. Jenachdem im Falle $\varrho^{(h)} = \lambda^{(i)}$ der auf der positiven oder negativen Hälfte des Strahles $u^{(h)}$ liegende Schnittpunkt als $h$ter Eckpunkt gewählt wird, sind die Parameter des folgenden Strahles:

$$u^{(h+1)} = u^{(h)} + 2v^{(i)} \quad \text{oder} \quad u^{(h+1)} = u^{(h)} - 2v^{(i)},$$

wofern unter $v^{(i)}$ allgemein das Integralpaar:

$$v^{(i)} = v_1^{(i)} \mid v_2^{(i)} = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}} d\omega_1 \mid \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}} d\omega_2$$

mit positivem Vorzeichen der Quadratwurzel $\Lambda^{(i)}$ verstanden wird.

Jenachdem im Falle $\varrho^{(h)} = \mu^{(k)}$ der auf dem positiven oder negativen Abschnitt des Strahles $u^{(h)}$ liegende Schnittpunkt als $h$ter Eckpunkt gewählt wird, sind die Parameter des folgenden Strahles:

$$u^{(h+1)} = u^{(h)} + 2w^{(k)} \quad \text{oder} \quad u^{(h+2)} = u^{(h)} - 2w^{(k)},$$

wofern unter $w^{(k)}$ allgemein das Integralpaar:

$$w^{(k)} = w_1^{(k)} \mid w_2^{(k)} = -\int\limits_{\mu_0}^{\mu^{(k)}, M^{(k)}} d\omega_1 \mid -\int\limits_{\mu_0}^{\mu^{(k)}, M^{(k)}} d\omega_2$$

mit positivem Vorzeichen der Quadratwurzel $M^{(k)}$ verstanden wird.

Dieselben Verhältnisse wiederholen sich bei der Construction von Seite zu Seite, und man gelangt zu dem Schlusse:

I. *Die Abhängigkeit der Parameter des* $(l+m+1)$*ten Strahles am Polygon von denen des ersten Strahles ist durch die Formel gegeben:*

$$u^{(l+m+1)} = u^{(1)} + 2\sum_1^l \varepsilon_i v^{(i)} + 2\sum_1^m \eta_k w^{(k)}, \tag{91}$$

wo das einzelne ε_i *den Werth* $+1$ *oder* -1 *hat, jenachdem der Eckpunkt* $P^{(h)}$ *auf dem Ellipsoid* $\lambda^{(i)}$ *der positiven oder negativen Hälfte des Strahles* $u^{(h)}$ *angehört, und wo das einzelne* η_k *den Werth* $+1$ *oder* -1 *hat, jenachdem der Eckpunkt* $P^{(h)}$ *auf dem Hyperboloid* $\mu^{(k)}$ *dem positiven oder negativen Abschnitt des Strahles* $u^{(h)}$ *angehört.*

Dieser Satz giebt über die oben aufgezählten Willkürlichkeiten der Polygonconstruction folgende Aufschlüsse:

1. Die Differenz der Parameter des letzten und ersten Strahles ist von der Wahl des ersten Strahles unabhängig.

2. Die Differenz ist abhängig von der jeweiligen Entscheidung über die bei der Construction von Strahl zu Strahl hervortretende Zweideutigkeit.

3. Die Differenz ist wiederum unabhängig von der angenommenen Reihenfolge der Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$, sobald man den Werth des Symbols

ε_i, η_k als ein bezüglich der Fläche $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$ anhaftendes Merkmal betrachtet, welches bei der Vertauschung der Flächen untereinander je mit seiner Fläche in fester Verbindung bleibt.

Neben die bisherige Auffassung der Configuration der $l + m + 1$ Strahlen $u^{(h)}$, von denen jeder vom folgenden in einem Punkte $P^{(h)}$ auf einer Fläche $\varrho^{(h)}$ conjugirt geschnitten wird, soll eine zweite Auffassung gestellt werden, nach welcher nicht die unbegrenzten Strahlen $u^{(h)}$, sondern die zwischen 2 aufeinanderfolgenden Eckpunkten $P^{(h-1)}$ und $P^{(h)}$ gelegenen Strecken derselben als Seiten $S^{(h)}$ eines *„Polygons mit begrenzten Seiten"* (vgl. § 20, 1. Anmerkung) angesprochen werden.

Zur Bestimmung derjenigen Strecke einer jeden Seite des früheren allgemeineren Polygons, welche als entsprechende Seite des specielleren gelten soll, dient die folgende Festsetzung: Dasjenige Stück des Strahles $u^{(h)}$ $(h = 2, 3, \ldots, l + m)$, welches *mit Benutzung der positiven Richtung des Strahles* vom Eckpunkt $P^{(h-1)}$ nach dem Eckpunkt $P^{(h)}$ hinführt, gilt als $h$te Seite $S^{(h)}$ des neuen Polygons. Die Strahlen $u^{(1)}$ und $u^{(l+m+1)}$ bleiben, da sie nur einen Eckpunkt, $P^{(1)}$ und bezüglich $P^{(l+m)}$, tragen, als unbegrenzte Seiten bestehen.

Nach diesen Festsetzungen erscheint das Polygon mit begrenzten Seiten allenthalben nach dem Gesetz der Reflexion construirt; es werden nämlich die in einem Eckpunkt $P^{(h)}$ zusammenstossenden Seiten $S^{(h)}$ und $S^{(h+1)}$, wie einfallender und reflectirter Lichtstrahl, stets beide auf der nämlichen Seite der Fläche $\varrho^{(h)}$ verlaufen, stets mit der Normale der Fläche in einer Ebene liegen und mit der Normale gleiche Winkel bilden. Dieser Auffassung entsprechend, sollen, wie in § 20 und § 21 *innere und äussere Ecken* des Polygons unterschieden werden, auf welche unmittelbar die Sätze V und V′ des § 23 in Anwendung kommen. Mit Bezug auf die Vorstellung des Polygons mit begrenzten Seiten kann daher der obige Satz so ausgesprochen werden:

II. *Der Zusammenhang der Parameter $u^{(l+m+1)}$ und $u^{(1)}$ der letzten und ersten Seite $S^{(l+m+1)}$ und $S^{(1)}$ des Polygons mit begrenzten Seiten ist durch die Formel bestimmt:*

$$u^{(l+m+1)} = u^{(1)} + 2\sum_1^l \varepsilon_i v^{(i)} + 2\sum_1^m \eta_k w^{(k)}, \tag{91}$$

wo das einzelne ε_i oder η_k den Werth $+1$ oder -1 hat, jenachdem die auf das betreffende Ellipsoid $\lambda^{(i)}$ oder Hyperboloid $\mu^{(k)}$ fallende Ecke eine innere oder äussere ist.

§ 27.

Bedeutung der Abel'schen Additionstheoreme für die Integrale der 3 Gattungen.

Aus der Darstellung (91) der Parameterdifferenz der Endstrahlen $u^{(l+m+1)}$ und $u^{(1)}$ ergeben sich unmittelbar die Bedingungen der Coincidenz des $(l+m+1)$ten und ersten Strahles der in § 26 betrachteten Configuration; sie lauten:

$$(92)\qquad 2\sum_1^l{}^i \varepsilon_i v_1^{(i)} + 2\sum_1^m{}^k \eta_k w_1^{(k)} \Big| 2\sum_1^l{}^i \varepsilon_i v_2^{(i)} + 2\sum_1^m{}^k \eta_k w_2^{(k)} \equiv 0 \,|\, 0$$

$$(\text{mod. } 2\pi i \mid 0,\ 0 \mid 2\pi i).$$

Aus der Form dieser Bedingungen geht der folgende Schliessungssatz hervor, welcher sich auf die Vorstellung der Polygone mit begrenzten Seiten bezieht:

Wenn ein Polygon, welches dem Ellipsoid λ_0 und dem einschaligen Hyperboloid umbeschrieben und gleichzeitig den l Ellipsoiden $\lambda^{(i)}$ und den m einschaligen Hyperboloiden $\mu^{(k)}$ nach dem Gesetz der Reflexion einbeschrieben ist, sich einmal schliesst: so schliesst es sich immer, unabhängig von der Wahl des ersten Eckpunktes auf irgend einer der $l+m$ Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$ und unabhängig von der Reihenfolge, in der die successiven Eckpunkte auf diese Flächen vertheilt sind; nur muss für jede einzelne dieser $l+m$ Flächen die Benennung der zugehörigen Ecke (ob innere oder äussere) erhalten bleiben.

Nur ein gleichzeitiger Wechsel der Benennung sämmtlicher Ecken würde den Eintritt der Schliessung des Polygons nicht aufheben.

Nach dem Abel'schen Theorem sind durch die Bedingungen des Schliessungsproblems, nämlich durch die Congruenzen:

$$(93)\qquad \sum_1^l{}^i \int_{\lambda_0}^{\lambda^{(k)},\,\Lambda^{(k)}} d\omega_1 - \sum_1^m{}^k \int_{\mu_0}^{\mu^{(k)},\,M^{(k)}} d\omega_1 \Bigg| \sum_1^l{}^i \int_{\lambda_0}^{\lambda^{(k)},\,\Lambda^{(k)}} d\omega_2 - \sum_1^m{}^k \int_{\mu_0}^{\mu^{(k)},\,M^{(k)}} d\omega_2 \equiv 0 \,|\, 0$$

$$(\text{mod. } \pi i \,|\, 0,\ 0 \,|\, \pi i),$$

wenn $l+m-2$ von den Flächen $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(k)}$ mit den zugehörigen Zahlen ε_i und η_k gegeben sind, nicht nur die beiden übrigen Flächen, sondern auch die charakteristischen Zahlen ε_i und η_k derselben eindeutig mit bestimmt. Man kann daher, in Analogie mit dem entsprechenden, von Poncelet*) und Jacobi**) bewiesenen Satze für ebene Polygone,

*) Vgl. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures (Paris 1822), S. 328.

**) Vgl. Jacobi, Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf

den Schliessungssatz auch in folgender Form aussprechen, in welcher er zugleich als eine *geometrische Deutung des Abel'schen Theorems* anzusehen ist:

Wenn von den $l+m$ Ecken eines geschlossenen Polygons der betrachteten Art, welches einem Ellipsoid λ_0 und einem einschaligen Hyperboloide μ_0 beständig umbeschrieben bleibt, $l+m-2$ Ecken sich auf ebensovielen gegebenen confocalen Flächen continuirlich bewegen, so bewegen sich auch die beiden übrigen Ecken mit Beibehaltung ihrer Benennung je auf einer confocalen Fläche.

Bei einer continuirlichen Bewegung des Polygons wird sich nämlich die in den Zahlen ε_i, η_k ausgesprochene Benennung der auf den gegebenen Flächen laufenden Ecken nicht ändern.

Das Bestehen der Relationen (93) zwischen zweimal $l+m$ Integralen 1. Gattung bedingt nach dem Abel'schen Theorem gewisse Relationen zwischen $l+m$ Integralen 2., beziehentlich 3. Gattung, deren Grenzen der Reihe nach mit den Grenzen der Integrale in (93) übereinstimmen. Auf die Bedeutung dieser Relationen soll hier nicht näher eingegangen werden; dieselbe gründet sich auf die Messung des Umfanges der betrachteten Polygone in gewöhnlicher und allgemeiner projectivischer Maassbestimmung, ähnlich wie die Bedeutung der einfachen Additionstheorme der Integrale 2. und 3. Gattung aus den in § 17 angeführten Längenmessungen hervorging.

§ 28.

Constructive Lösung des zusammengesetzten Additionsproblems.

Die geometrische Bedeutung der Congruenzen (93) liefert die constructive Lösung des folgenden allgemeinen Additionstheorems der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung:

Es ist z, $Z=\sqrt{(\alpha-z)(\beta-z)(\mu_0-z)(\gamma-z)(\lambda_0-z)}$ ein gegebenes hyperelliptisches Gebilde mit den 6 reellen singulären Stellen $\alpha, \beta, \mu_0, \gamma, \lambda_0$ und $-\infty$ ($\alpha>\beta>\mu_0>\gamma>\lambda_0>-\infty$); es bezeichnen ferner λ, μ, ν solche reelle Werthe der Variablen z, welche beziehungsweise in den Intervallen $(-\infty\,\lambda_0)$, $(\gamma\mu_0)$, $(\beta\alpha)$ gelegen sind; es bedeuten endlich Λ, M, N die reellen Werthe, welche die Quadratwurzel Z resp. für $z=\lambda, \mu, \nu$ annimmt.

Es sind alsdann $l-1$ Stellen $\lambda^{(i)}$, $\Lambda^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,l-1)$ und $m-1$ Stellen $\mu^{(k)}$, $\mathsf{M}^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,m-1)$ des hyperelliptischen Gebildes als obere Grenzen in den beiden Integralsummen:

---

ein bekanntes Problem der Elementargeometrie, Ges. Werke, Bd. I (hrsg. von Borchardt), S. 290.

$$(94)\quad \begin{cases} S_1 = \sum\limits_1^{l-1}{}_i \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda^{(i)}, A^{(i)}} \frac{dz}{Z} - \sum\limits_1^{m-1}{}_k \int\limits_{\mu_0}^{\mu^{(k)}, M^{(k)}} \frac{dz}{Z}, \\ S_2 = \sum\limits_1^{l-1}{}_i \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda^{(i)}, A^{(i)}} \frac{z\,dz}{Z} - \sum\limits_1^{m-1}{}_k \int\limits_{\mu_0}^{\mu^{(k)}, M^{(k)}} \frac{z\,dz}{Z}, \end{cases}$$

gegeben. Es sollen diejenigen beiden Stellen z', Z' und z'', Z'' des Gebildes ermittelt werden, für welche mit Bezug auf die einfachen Periodenpaare als Moduln die Congruenzen bestehen:

$$(95)\quad \begin{cases} S_1 \equiv -\int\limits_{\lambda_0}^{z', Z'} \frac{dz}{Z} + \int\limits_{\mu_0}^{z'', Z''} \frac{dz}{Z}, \\ S_2 \equiv -\int\limits_{\lambda_0}^{z', Z'} \frac{z\,dz}{Z} + \int\limits_{\mu_0}^{z'', Z''} \frac{z\,dz}{Z}. \end{cases}$$

Eine wesentliche und beabsichtigte *Beschränkung* dieser Problemstellung ist die, dass die einzelnen Integrale der Summen S_1 und S_2 in (94) sämmtlich *„reelle Integrale"* sind. Mit diesem Namen sollen für den Augenblick solche Integrale belegt werden, welche auf einem durchaus reellen Integrationsweg mit gegebenem Vorzeichen der Quadratwurzel Z genommen, und selbst von reellem Werthe sind.

Dass aber die Integrale der Summen S_1 und S_2 alle von einer der beiden Formen

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} d\Omega, \quad \int\limits_{\mu_0}^{\mu, M} d\Omega$$

sind, wo $d\Omega$ collectiv für $\frac{dz}{Z}$ und $\frac{z\,dz}{Z}$ gebraucht wird, ist unwesentlich. In der That kann ein beliebiges reelles Integral $\int d\Omega$ immer auf jene beiden Formen zurückgeführt werden. Es giebt nämlich überhaupt folgende 6 Formen reeller Integrale von dem Differential $d\Omega$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\lambda, A} d\Omega, \quad \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} d\Omega; \quad \int\limits_{\gamma}^{\mu, M} d\Omega, \quad \int\limits_{\mu_0}^{\mu, M} d\Omega; \quad \int\limits_{\beta}^{\nu, N} d\Omega, \quad \int\limits_{\alpha}^{\nu, N} d\Omega,$$

wo λ, μ, ν bezüglich in die oben angegebenen Grenzen eingeschlossen sind. Die 1., 3. und 5. dieser 6 Formen ist aber unmittelbar auf die 2., 4. und 6. zurückführbar; so wird z. B. durch die Trennung:

$$\int\limits_{-\infty}^{\lambda, A} d\Omega = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} d\Omega - \int\limits_{\lambda_0}^{-\infty} d\Omega$$

ein Integral der 1. Form als Differenz zweier Integrale der 2. Form dargestellt. Aber auch von den drei übrig bleibenden Formen:

$$(96)\qquad \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} d\Omega,\quad \int\limits_{\mu_0}^{\mu, M} d\Omega,\quad \int\limits_{\alpha}^{\nu, N} d\Omega,$$

kann vermöge des einfachen Additionstheorems jede auf die beiden anderen zurückgeführt werden. Ein Beispiel dieser, bereits von Jacobi*) ausgeführten Reduction wurde oben in Kapitel III behandelt, wo bei gegebenen Stellen λ, $\mathsf{\Lambda}$; μ, M; ν, N des hyperelliptischen Gebildes die den Gleichungen (55) des § 15 entsprechenden Stellen μ', M'; ν' N' constructiv bestimmt wurden. Man hat in den Gleichungen (55) nur $\mu = \mu_0$ und $\nu = \alpha$ zu setzen, um die Relationen:

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} \frac{dz}{Z} = \int\limits_{\alpha}^{\nu', N'} \frac{dz}{Z} - \int\limits_{\mu_0}^{\mu', M'} \frac{dz}{Z},$$

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} \frac{z\,dz}{Z} = \int\limits_{\alpha}^{\nu', N'} \frac{z\,dz}{Z} - \int\limits_{\mu_0}^{\mu', M'} \frac{z\,dz}{Z}$$

herzustellen, welche die Integrale der 1. Form (96) auf die der 2. und 3. reduciren. In diesem Sinne kann man daher jedes reelle Integral auf 2 von den 3 Formen (96) zurückführen. Es ist deshalb auch immer möglich zwei zusammengehörige Summen beliebiger reeller Integrale auf die Form (94) der Summen S_1 und S_2 zu bringen.

Um nach diesen beiläufigen Bemerkungen auf die Relationen (95) die Sätze der vorhergegangenen Paragraphen anwenden zu können, wird man diese Relationen durch eine entsprechende lineare Combination (vgl. § 6) in die Form versetzen:

$$(97)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{1}^{l-1}{}^{i} \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda^{(i)}, A^{(i)}} d\omega_1 - \sum\limits_{1}^{m-1}{}^{k} \int\limits_{\mu_0}^{\mu^{(k)}, M^{(k)}} d\omega_1 \equiv -\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} d\omega_1 + \int\limits_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_1, \\ \sum\limits_{1}^{l-1}{}^{i} \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda^{(i)}, A^{(i)}} d\omega_2 - \sum\limits_{1}^{m-1}{}^{k} \int\limits_{\mu_0}^{\mu^{(k)}, M^{(k)}} d\omega_2 \equiv -\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, A} d\omega_2 + \int\limits_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_2; \end{cases}$$

dabei sind für z' und z'' (vgl. Formel 95) zugleich die specielleren Bezeichnungen λ und μ eingeführt worden. Da nämlich die linken Seiten der Congruenzen (97) jetzt rein imaginär sind (vgl. § 8, 28), so folgt, wie zu § 22, 78, dass die Lösungen $z' = \lambda$ und $z'' = \mu$ des in den

*) Vgl. Jacobi, De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, etc. Art. 9 (Ges. Werke, hsg. v. Weierstrass, Bd. II, S. 46).

Congruenzen (97) liegenden Umkehrproblems reell sind und in die Intervalle $(-\infty\, \lambda_0)$ und $(\gamma\, \mu_0)$ fallen, womit sich die neue Bezeichnung rechtfertigt. Man erkennt nun mit Rücksicht auf die bisherigen Entwicklungen des Kapitels V, dass die constructive Lösung des Additionsproblems (97) auf eine Polygonconstruction nach § 26 und eine Construction der gemeinsamen Transversalen 1. Art zu zwei reellen Congruenzstrahlen nach § 25 hinauskommt.

Die Construction setzt sich nämlich, wie man unmittelbar erkennt, aus folgenden Momenten zusammen:

1. *Construction der gegebenen Elemente:* Man deutet die gegebenen Grössen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(l-1)}$ als Parameter von $l-1$ Ellipsoiden und die gegebenen Grössen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(m-1)}$ als Parameter von $m-1$ einschaligen Hyperboloiden des confocalen Systems und beschreibt diesen $l+m-2$ Flächen, mit beliebiger Wahl eines Anfangsstrahles, ein ungeschlossenes Polygon aus $l+m-1$ Strahlen der Congruenz (46) ein; dabei hat man die durch die gegebenen Vorzeichen der Quadratwurzeln $\mathsf{\Lambda}^{(1)}, \mathsf{\Lambda}^{(2)}, \ldots, \mathsf{\Lambda}^{(l-1)}, \mathsf{M}^{(1)}, \mathsf{M}^{(2)}, \ldots, \mathsf{M}^{(m-1)}$ bestimmte Lage der Polygoneckpunkte auf den positiven oder negativen Hälften oder Abschnitten der benutzten Strahlen zu beachten. Die $l+m-2$ gegebenen Flächen $\lambda^{(i)}, \mu^{(k)}$ können bei der Construction in einer beliebig gewählten Reihenfolge benutzt werden, in der sie mit $\varrho^{(1)}, \varrho^{(2)}, \ldots, \varrho^{(l+m-2)}$ bezeichnet sein mögen. Um auch die Benennung der Ecken und Seiten des Polygons völlig sicher zu stellen, erhält die auf der gegebenen Fläche $\varrho^{(k)}$ gelegene Ecke jeweils die Benennung $P^{(k)}$, und gilt im Allgemeinen der durch die Ecken $P^{(k-1)}$ und $P^{(k)}$ laufende Strahl als Seite $u^{(k)}$ $(k=2, 3, \ldots, l+m-2)$; der Anfangs- resp. Endstrahl der Construction, welcher durch die Ecke $P^{(1)}$, resp. $P^{(l+m-2)}$ läuft, wird mit $u^{(1)}$, resp. $u^{(l+m-1)}$ bezeichnet.

2. *Construction der gesuchten Elemente:* Um das erhaltene Polygon zu einem geschlossenen Polygon von $l+m$ Seiten zu machen, fehlt noch eine Seite $u^{(l+m)}$ und zwei Ecken $P^{(l+m-1)}$ und $P^{(l+m)}$. Beides, die fehlende Seite und das fehlende Eckenpaar, wird gewonnen, indem man eine der beiden Transversalen 1. Art der Seiten $u^{(l+m-1)}$ und $u^{(1)}$ construirt. Von diesen beiden Transversalen schneidet die eine (T') den Strahl $u^{(l+m-1)}$ auf einem Ellipsoid λ und den Strahl $u^{(1)}$ auf einem einschaligen Hyperboloid μ conjugirt, die andre (T'') den Strahl $u^{(l+m-1)}$ auf demselben Hyperboloid μ und den Strahl $u^{(1)}$ auf demselben Ellipsoid λ conjugirt. Man wähle etwa die Transversale T' als Schlussseite $u^{(l+m)}$ des Polygons, sodass, mit Fortsetzung der einmal begonnenen Nummerirung der Eckpunkte, der Eckpunkt $P^{(l+m-1)}$ auf das Ellipsoid λ, und der Eckpunkt $P^{(l+m)}$ auf das Hyperboloid μ zu liegen kommt. Nachdem man so das Polygon geschlossen hat, gestaltet sich

3. *die Ablesung des Resultates* folgendermaassen:

a) *Die gesuchten oberen Grenzen λ und μ sind beziehungsweise die Parameter des Ellipsoides und des einschaligen Hyperboloides, auf welchen die beiden Seiten $u^{(l+m-1)}$ und $u^{(l)}$ des Polygons von der Seite $u^{(l+m)}$ conjugirt geschnitten werden.*

b) *Das gesuchte Vorzeichen von $\mathsf{\Lambda}$ ist das positive oder negative, jenachdem der auf das Ellipsoid fallende Eckpunkt $P^{(l+m-1)}$ auf der positiven oder negativen Hälfte der Seite $u^{(l+m-1)}$ liegt; das gesuchte Vorzeichen von M ist das positive oder negative, jenachdem der auf das Hyperboloid μ fallende Eckpunkt $P^{(l+m)}$ auf dem positiven oder negativen Abschnitt von $u^{(l+m)}$ liegt.*

Dass das Resultat von der Wahl zwischen den beiden zur Verfügung gestellten Transversalen nur scheinbar abhängt, ergiebt sich aus § 25 ohne Schwierigkeit; man hat nur die Resultate dieses Paragraphen mit Aenderung der Bezeichnungen u' in $u^{(l+m-1)}$, u'' in $u^{(l)}$, τ' in T' und τ'' in T'' in Anwendung zu bringen.

Anschaulicher tritt das Resultat hervor, wenn man das construirte Polygon nachträglich in ein Polygon mit *begrenzten* Seiten verwandelt, indem man von jedem der unbegrenzten Strahlen $u^{(k)}$ nach der Vorschrift des § 26 nur ein begrenztes Stück $S^{(k)}$ beibehält. Man hat alsdann folgende *zweite Form der Ablesung des Endresultates:*

a) *Die gesuchten oberen Grenzen λ und μ sind die Parameter derjenigen beiden Flächen, an denen der Polygonumfang in den beiden zuletzt hinzugetretenen Ecken reflectirt erscheint.*

b) *Das gesuchte Vorzeichen von $\mathsf{\Lambda}$, resp. M ist das positive oder negative, jenachdem die auf die Fläche λ, resp. μ fallende Ecke des Polygons eine innere oder äussere ist.*

Die vorstehenden Ausführungen bezogen sich auf die Construction des in den Formeln (97) oder (95) enthaltenen Additionsproblems und zeigten, wie durch die Construction der Transversalen 1. Art zu zwei reellen Congruenzstrahlen nicht bloss die Unbekannten λ und μ des Problems, sondern auch die Vorzeichen der zugehörigen Quadratwurzeln $\mathsf{\Lambda}$ und M eindeutig bestimmt werden. Dabei zeigte sich von Anfang an, dass die der Forderung (95) entsprechenden Grössen $z' = \lambda$ und $z'' = \mu$ reell und in zwei verschiedenen der 3 Intervalle $(-\infty\, \lambda_0)$, $(\gamma \mu_0)$, $(\beta \alpha)$ gelegen waren, in denen auch die Quadratwurzel Z reell ist. Wenn es sich aber allgemein darum handelt, die reellen Integralsummen S_1 und S_2 auf Summen von je zwei reellen Integralen zu reduciren, so braucht man diese Forderung nicht gerade in die Form (95) zu setzen. Man darf nämlich, wenn man aus den bezeichneten 3 Intervallen der reellen Axe auf irgend eine der 3 möglichen Weisen 2 Intervalle auswählt, immer von vornherein verlangen, dass die bei dem Additionsproblem der Integralsummen S_1 und S_2 gesuchten oberen

Grenzen in dem ausgewählten Intervalle liegen sollen. Man hat dazu die 3 Umkehrprobleme anzusetzen:

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda, \varDelta}\frac{dz}{Z}-\int_{\mu_0}^{\mu, M}\frac{dz}{Z}\ \Big|\ \int_{\lambda_0}^{\lambda, \varDelta}\frac{z\,dz}{Z}-\int_{\mu_0}^{\mu, M}\frac{z\,dz}{Z}\equiv S_1 \mid S_2,$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda, \varDelta}\frac{dz}{Z}-\int_{\beta}^{\nu, N}\frac{dz}{Z}\ \Big|\ \int_{\lambda_0}^{\lambda, \varDelta}\frac{z\,dz}{Z}-\int_{\beta}^{\nu, N}\frac{z\,dz}{Z}\equiv S_1 \mid S_2,$$

$$\int_{\mu_0}^{\mu, M}\frac{dz}{Z}-\int_{\beta}^{\nu, N}\frac{dz}{Z}\ \Big|\ \int_{\mu_0}^{\mu, M}\frac{z\,dz}{Z}-\int_{\beta}^{\nu, N}\frac{z\,dz}{Z}\equiv S_1 \mid S_2,$$

deren Lösungen bei der jeweils getroffenen Wahl der unteren Grenzen reelle Werthe innerhalb der durch die Bezeichnungen λ, μ, ν, wie oben, angedeuteten Intervalle sind. An diese 3 Umkehrprobleme mit immer reellen Lösungen schliesst sich ein viertes:

$$\int_{\lambda_0}^{z', Z'}\frac{dz}{Z}-\int_{\lambda_0}^{z'', Z''}\frac{dz}{Z}\ \Big|\ \int_{\lambda_0}^{z', Z'}\frac{z\,dz}{Z}-\int_{\lambda_0}^{z'', Z''}\frac{z\,dz}{Z}\equiv S_1 \mid S_2,$$

von dessen Lösungen man nur sagen kann, dass, wenn die eine reell und in einem der 3 obigen Intervalle gelegen ist, dies auch von der anderen gilt; statt der unteren Grenzen λ_0 auf der linken Seite dieses 4. Ansatzes kann allenthalben auch μ_0 oder β eintreten, ohne dass die Congruenzen eine andere als formelle Aenderung erleiden.

Diese Sätze, welche hier ohne weitere Ausführung betont sein mögen, finden ihre einfache Begründung in den Untersuchungen des § 25, welche zugleich die Mittel zur *constructiven Lösung der 4 Umkehrprobleme* an die Hand geben.

Wie das 1. Umkehrproblem durch die Construction der gemeinsamen Transversalen 1. Art zu 2 reellen Congruenzstrahlen gelöst wurde, so finden die 3 anderen Umkehrprobleme in der Construction der Transversalen 2., 3. und 4. Art ihre constructive Lösung.

Breslau, im März 1883.

Ueber Congruenzgruppen von Primzahlstufe.

Von

Joseph Gierster in Bamberg.

Anschliessend an meine früheren Arbeiten über elliptische Modulfunctionen, wie dieselben in den Bänden 17, 18, 21 dieser Annalen veröffentlicht sind, werden in der vorliegenden kurzen Arbeit sämmtliche Congruenzgruppen von Primzahlstufe (§ 1, § 2) aufgestellt. Nachdem in § 3 eine allgemeine Methode zur Bestimmung des Geschlechtes dieser Gruppen nach der Klein'schen Definition erläutert ist, wird in § 4 eine Tabelle des Geschlechts für die genannten Gruppen hingeschrieben. Aus dieser Tabelle werden dann in § 5 leicht die sämmtlichen Hauptmoduln von Primzahlstufe d. h. diejenigen Moduln abgelesen, welche einer Congruenzgruppe vom Geschlechte Null entsprechen. Es ergeben sich ausser den Moduln der dritten und fünften Stufe nur noch Hauptmoduln der siebenten, elften und dreizehnten Stufe.

§ 1.

Allgemeines über Congruenzgruppen der q^{ten} Stufe.

Im 18^{ten} Bande dieser Annalen, pag. 319ff. habe ich alle Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades bestimmt. Ich werde nunmehr zeigen, dass hiermit eo ipso alle Congruenzgruppen von Primzahlstufe gefunden sind.

Eine *„Congruenzgruppe*) der q^{ten} Stufe“* ist dadurch definirt, dass sie aus *allen* ganzahligen Substitutionen

$$(1) \qquad \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ besteht, deren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestimmte

*) F. Klein, Sitzungsb. der Münchner Akademie, Sitz. v. 6. Dez. 1879 oder Math. Ann. Bd. XVII, pag. 63ff. Blosse Citate auf Seitenzahlen beziehen sich auf diese Arbeit. Hurwitz, Mathem. Ann. Bd. XVIII, pag. 540ff.

Bedingungen modulo q erfüllen und zwar muss q die kleinste ganze Zahl sein, für welche dies der Fall ist. Die genannten Bedingungen werden nur für eine endliche Anzahl r von Lösungen α_ν, β_ν, γ_ν, δ_ν modulo q erfüllt sein, da die Congruenz $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$ mod. q, welche immer stattfinden muss, selbst nur die endliche Zahl von $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Lösungen hat. Diese r Lösungen liefern (modulo q) r Substitutionen

$$(2) \qquad S_\nu \equiv \frac{\alpha_\nu \omega + \beta_\nu}{\gamma_\nu \omega + \delta_\nu} \text{ mod. } q.$$

Alle ganzzahligen linearen Substitutionen der Determinante 1, welche mod. q zu einer S_ν congruent sind, gehören nach Definition der Congruenzgruppe an.

Ich will die Substitutionen der letzteren mit σ_ν bezeichnen.

Aus dem Begriffe der Gruppe folgt sogleich, dass, wenn σ_1 und σ_2 zwei Substitutionen der Congruenzgruppe sind, auch $\sigma_1 . \sigma_2$ eine solche sein muss. Also müssen auch die r Substitutionen S_ν (2) eine Gruppe G_r bilden und diese Gruppe ist offenbar eine in der Galois'-Gruppe G der Modulargleichungen für q enthaltene Untergruppe.

Die Gruppe G besteht nämlich aus den $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Substitutionen S, zu welchen alle ganzzahligen linearen Substitutionen (1) der Determinante 1 modulo q congruent sind*).

Weiterhin folgt, dass unter den Substitutionen S_ν immer auch die Identität $\omega' \equiv \omega$ mod. q enthalten ist, und dass also jede Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe die ausgezeichnete, durch die Bedingungen $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$, $\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1$ mod. q definirte Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe als Untergruppe enthält.

Wir können jetzt folgenden Satz aussprechen:

Man erhält alle Congruenzgruppen der q^{ten} Stufe, wenn man der Reihe nach alle Untergruppen G_r der Galois'schen Gruppe G der Modulargleichungen für q (mit Ausschluss von G selbst) betrachtet und jedesmal alle jene Substitutionen (1) *nimmt, welche zu einer Substitution S_ν der betrachteten Untergruppe modulo q congruent sind.*

Jedenfalls bilden nämlich diese Substitutionen eine Gruppe g, für welche die α, β, γ, δ gegebenen Bedingungen modulo q (nämlich einer der r Bedingungen $\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv \alpha_\nu : \beta_\nu : \gamma_\nu : \delta_\nu$ mod. q) genügen. Dass aber q die *Stufe* der Congruenzgruppe ist, dass also die Zahl q bei Definition der betreffenden Substitutionen durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann, ist sehr einfach zu zeigen. Wäre nämlich die Stufe $q' < q$, so enthielte die Gruppe die ausgezeichnete Congruenzgruppe der q'-Stufe, also jedenfalls auch die beiden Substitutionen

*) Vergl. meinen schon citirten Aufsatz im 18^{ten} Bande der Mathem. Annalen.

$$\omega' = \omega + rq', \quad \omega' = \frac{(mq'+1)\omega + nq'}{sq'\omega + (tq'+1)},$$

wobei $(mq'+1)(tq'+1) - snq'^2 = 1$ ist. Da aber q' zu q relativ prim wäre, so könnte man die Grössen r, m, n, s, t so bestimmen, dass die letztgenannten Substitutionen modulo q zu

$$\omega' \equiv \omega + 1 \quad \text{und} \quad \omega' \equiv -\frac{1}{\omega}$$

congruent wären. Dann würde aber bekanntlich die Gruppe G_r mit G selbst zusammenfallen, ein Fall der ausgeschlossen ist.

Man kann die Beziehung, welche hiernach zwischen den Untergruppen von G und den Congruenzgruppen besteht, als einen *Isomorphismus* bezeichnen, nur dass die Stufe dieses Isomorphismus eine unendlich hohe ist, indem jeder Substitution von G jedesmal unendlich viele Substitutionen der Congruenzgruppe entsprechen.

§ 2.

Aufzählung aller Congruenzgruppen der q^{ten} Stufe.

Nach § 1 ist klar, dass jeder Untergruppe G_r der Galois'schen Gruppe G der Modulargleichungen für q eine Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe entspricht und umgekehrt. Man erkennt ferner sogleich, dass gleichberechtigten Untergruppen G_r auch gleichberechtigte Congruenzgruppen entsprechen und umgekehrt.

Bezeichnet ferner r die Ordnung der Untergruppe G_r, so hat die zugehörige Congruenzgruppe g_n den Index*)

$$n = \frac{q(q^2-1)}{2r},$$

d. h. ihre Substitutionen bilden den n^{ten} Theil aller ganzzahligen Substitutionen (1) der Determinante 1.

Dieses vorausgesetzt, erhält man unter Bezugnahme auf meine Arbeit in Band XVIII folgende

Tabelle der Congruenzgruppen der q^{ten} Stufe.

Congruenzgruppen.	Entsprechende Untergruppen von G.
I. *Es giebt:*	
Eine $g_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ (die ausgezeichnete Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe)	*Eine* $G_{(1)}$ (die Identität).

*) pag. 63.

Congruenzgruppen.	Entsprechende Untergruppen von G.	
II. *Es giebt:*		
a) $(q+1)$ $\mathfrak{g}_{\frac{q^2-1}{2}}$	$(q+1)$ G_q	(Cyklen).
b) $\frac{q(q+1)}{2}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{2\sigma}}$	$\frac{q(q+1)}{2}$ G_σ	
c) $\frac{q(q-1)}{2}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{2\tau}}$	$\frac{q(q-1)}{2}$ G_τ	
III. *Es giebt:*		
$(q+1)$ $\mathfrak{g}_{\frac{q^2-1}{2\sigma}}$	$(q+1)$ $G'_{q.\sigma}$ (Die halbmetacyklischen Gruppen und ihre Untergruppen).	
IV. *Es giebt:*		
a) $\frac{q(q^2-1)}{4\sigma'}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{4\sigma'}}$ oder	$\frac{q(q^2-1)}{4\sigma'}$ $G'_{2\sigma'}$ oder	(Doppelpyramidengruppen)
2 A. v. je $\frac{q(q^2-1)}{8\sigma'}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{4\sigma'}}$,	2 A. v. je $\frac{q(q^2-1)}{8\sigma'}$ $G'_{2\sigma'}$,	
je nachdem $\frac{q-1}{2\sigma'}$ ungerade oder gerade ist;		
b) $\frac{q(q^2-1)}{4\tau'}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{4\tau'}}$ oder	$\frac{q(q^2-1)}{4\tau'}$ $G'_{2\tau'}$ oder	
2 A. v. je $\frac{q(q^2-1)}{8\tau'}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{4\tau'}}$,	2 A. v. je $\frac{q(q^2-1)}{8\tau'}$ $G'_{2\tau'}$,	
je nachdem $\frac{q+1}{2\tau'}$ ungerade oder gerade ist;		
c) $\frac{q(q^2-1)}{24}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{8}}$ oder	$\frac{q(q^2-1)}{24}$ G'_4 oder	
2 A. v. je $\frac{q(q^2-1)}{48}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{8}}$,	2 A. v. je $\frac{q(q^2-1)}{48}$ G'_4,	
je nachdem $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$ oder $= +1$ ist.		
V. *Es giebt:*		
$\frac{q(q^2-1)}{24}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{24}}$ oder	$\frac{q(q^2-1)}{24}$ G''_{12} oder	(Tetraedergruppen)
2 A. v. je $\frac{q(q^2-1)}{48}$ $\mathfrak{g}_{\frac{q(q^2-1)}{24}}$,	2 A. v. je $\frac{q(q^2-1)}{48}$ G''_{12},	
je nachdem $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$ oder $= +1$ ist.		

(Die in I, II, III, IV, V aufgezählten Gruppen existiren für jede Primzahl $q > 3$).

VI. *Es giebt:*

$$2\text{ A. v. je } \frac{q(q^2-1)}{48} \quad g_{\frac{q(q^2-1)}{48}}, \;\Big|\; 2\text{ A. v. je } \frac{q(q^2-1)}{48} \quad G''_{24}, \quad \text{(Oktaedergruppen),}$$

nur wenn $\left(\frac{2}{q}\right) = +1$ ist.

VII. *Es giebt:*

$$2\text{ A. v. je } \frac{q(q^2-1)}{120} \quad g_{\frac{q(q^2-1)}{120}}, \;\Big|\; 2\text{ A. v. je } \frac{q(q^2-1)}{120} \quad G''_{60} \quad \text{(Ikosaedergruppen),}$$

nur wenn $q = \pm 1$ mod. 5 ist.

In dieser Tabelle bedeutet σ einen von 1 verschiedenen Theiler von $\frac{q-1}{2}$ $\left(\text{incl. } \frac{q-1}{2}\right)$, τ einen von 1 verschiedenen Theiler von $\frac{q+1}{2}$ $\left(\text{incl. } \frac{q+1}{2}\right)$; σ' und τ' bedeuten dieselben Zahlen wie σ und τ mit Ausschluss des Theilers 2. Ferner ist z. B. Nr. V in folgender Weise zu lesen: Es giebt entweder $\frac{q(q^2-1)}{24}$ gleichberechtigte Congruenzgruppen g vom Index $\frac{q(q^2-1)}{24}$, deren entsprechende Untergruppen G''_{12} Tetraedergruppen sind, oder 2 Arten von je $\frac{q(q^2-1)}{48}$ gleichberechtigten solchen Gruppen, je nachdem 2 quadratischer Nichtrest oder Rest mod. q ist.

Den aufgestellten Congruenzgruppen der q^{ten} Stufe entsprechen ebensoviele *volle Congruenzmodulsysteme der q^{ten} Stufe**). Es sollen volle Modulsysteme, welche gleichberechtigten Congruenzgruppen g entsprechen, ebenfalls gleichberechtigt genannt werden. Ich stelle hier einige Sätze über die Modulsysteme zusammen, welche später verwendet werden, übrigens aber aus der allgemeinen Theorie hervorgehen**).

1) Ist die Untergruppe G_r, welche zur Congruenzgruppe g_n gehört, eine Untergruppe der Gruppe G'_r, welche zur Congruenzgruppe g'_n gehört, so lassen sich die Moduln, welche zur letzteren Gruppe gehören, rational durch die Moduln des zur ersteren Gruppe gehörigen vollen Modulsystems darstellen. Insbesondere lassen sich alle Moduln als rationale Functionen der *ausgezeichneten* Moduln derselben Stufe darstellen und die rationale absolute Invariante J ist eine rationale Function der Moduln jedes vollen Modulsystems***).

---

*) pag. 64.

**) pag. 66 ff.

***) Wegen der Bezeichnungen vergleiche durchweg die bereits citirten Arbeiten.

2) Denkt man sich die Moduln eines Modulsystems der q^{ten} Stufe als rationale Functionen der ausgezeichneten Moduln der q^{ten} Stufe dargestellt, so erhält man *alle* zu dem einen System gleichberechtigten Modulsysteme, wenn man in den genannten rationalen Functionen die ausgezeichneten Moduln den Substitutionen der Gruppe Γ*) unterwirft. Daraus folgt dann leicht, dass alle zu einem Modul gleichberechtigten Moduln die Wurzeln einer *irreductiblen* algebraischen Gleichung sind, deren Coefficienten rationale Functionen von J sind.

§ 3.

Berechnung des Geschlechtes der Congruenzgruppen der q^{ten} Stufe.

Zu jeder Congruenzgruppe vom Index n gehört ein Fundamentalpolygon**), welches aus $2n$ Elementardreiecken besteht und dessen Randpunkte und Kanten paarweise als relativ äquivalent zusammengehören. Schneidet man dieses Polygon aus der Ebene heraus und heftet die Paare zusammengehöriger Kanten zusammen, so erhält man eine geschlossene Fläche, deren Geschlecht (im Sinne der geometria situs aufgefasst) nach F. Klein *das Geschlecht p der Congruenzgruppe g* heisst.

Diese Zahl p lässt sich durch die Bemerkung finden, dass sich auf der erwähnten geschlossenen Fläche ein vollständiges Netz von $2n$ Elementardreiecken construiren lässt***). Bezeichnet man bez. mit E, F, K die Zahlen der Ecken, Flächen und Kanten dieses Netzes, so ergiebt der erweiterte Euler'sche Polyedersatz das Geschlecht p durch die Gleichung:

$$(1) \qquad 2(p-1) = K - F - E.$$

Leicht lässt sich diese Gleichung in eine andere Gestalt bringen. Man bemerke zu diesem Zwecke, dass $F = 2n$ und $K = 3n$ ist, dass sich ferner $E = 3n - \sum_{\nu=1}^{\nu=E} (e_\nu - 1)$ ergiebt, wenn man mit $2e_1, 2e_2, \ldots, 2e_\nu, \ldots$ die Zahlen der Elementardreiecke bezeichnet, welche bez. in der 1^{ten}, 2^{ten}, ..., ν^{ten} etc. Ecke zusammenstossen. Es ergiebt sich so die Gleichung:

$$(2) \qquad 2(p-1) = -2n + \sum_{\nu=1}^{\nu=E} (e_\nu - 1).$$

---

*) Vergl. pag. 69; sowie insbesondere Mathem. Annalen Bd. XXI, pag. 8.

**) pag. 64.

***) Die im Texte gegebene Ableitung von p stimmt materiell mit der in der Functionentheorie zumeist gebrauchten, aber minder übersichtlichen Methode überein, besagtes Fundamentalpolygon, oder die aus ihm abgeleitete geschlossene Fläche durch eine über der J Ebene n-blättrig ausgebreitete Fläche zu ersetzen, welche bei $J = 0, 1, \infty$ gewisse Verzweigungen besitzt.

Hiernach ist das Geschlecht der ausgezeichneten Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe

$$p = \frac{(q+2)(q-3)(q-5)}{24}.$$

Bekanntlich besteht nämlich das Fundamentalpolygon in dem letzteren Falle aus $q(q^2-1)$ Elementardreiecken, welche in $\frac{q^2-1}{2}$ Ecken a ($J=\infty$ entsprechend) zu je $2q$, in $\frac{q(q^2-1)}{6}$ Punkten b ($J=0$ entsprechend) zu je 6, und in $\frac{q(q^2-1)}{4}$ Ecken c zu je 4 zusammenstossen.

Dieses vorausgesetzt ist es nun ein Leichtes, zu irgend einer zugehörigen Congruenzgruppe g_n der q^{ten} Stufe das Geschlecht p aus Eigenschaften der zugehörigen Untergruppe G_r zu finden.

Wir gehen vom Fundamentalpolygon F der ausgezeichneten Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe aus und lassen aus ihr das Fundamentalpolygon f der betrachteten Congruenzgruppe g_n (deren entsprechende Untergruppe in G G_r sein mag) entstehen. Man bemerke, dass hierbei die $q(q^2-1)$ Elementardreiecke von F zu je r zusammengehören, da sie in Folge der Substitutionen der g_n zu einander relativ äquivalent sind. Auch die Ecken a, b, c werden in gewissen Gruppen zusammenfallen. Wenn nun die Gruppe G_r z. B. einen Cyclus G_q enthält, so ist klar, dass die $2q$ Elementardreiecke, welche in jedem der bei dem Cyclus G_q festbleibenden Punkte a zusammentreffen, zu je q als relativ äquivalent zusammenfallen. Also entstehen aus diesen besonderen Ecken a von F *keine* Punkte von f, in denen mehrere Paare von Elementardreiecken zusammenstiessen*).

Um also alle Ecken a' des Polygons f zu finden, in denen je $2q$ Elementardreiecke zusammenstossen, hat man von der Zahl der Ecken a von F alle jene Ecken a wegzunehmen, welche bei einem in der Gruppe G_r enthaltenen Cyclus G_q ungeändert bleiben, und den Rest durch r zu dividiren.

Ganz ähnlich verhält sich die Sache auch bei den Ecken b und c von F (die $J=0$ und $J=1$ resp. entsprechen). Wir erhalten so den folgenden Satz**): *Enthält die Gruppe G_r ν_q Cyclen der Periode q, ν_3 Cyclen der Periode 3, ν_2 Cyclen der Periode 2, so enthält das Polygon f genau*

$\frac{1}{r}\left(\frac{q^2-1}{2} - \nu_q \cdot \frac{q-1}{2}\right)$ *Ecken a', in denen je $2q$ Elementardreiecke,*

---

*) Anders ausgedrückt: An diesen Stellen, die, wie alle Punkte a, dem Werthe $J=\infty$ angehören, ist f in Bezug auf J nicht verzweigt.

**) Vergl. Math. Ann. Bd. XXI, pag. 8.

$\frac{1}{r}\left(\frac{q(q^2-1)}{6}-\nu_3\cdot\frac{q-\left(\frac{q}{3}\right)}{3}\right)$ *Ecken b′, in denen je* 6 *Elementardreiecke,*

$\frac{1}{r}\left(\frac{q(q^2-1)}{4}-\nu_2\cdot\frac{q-\left(\frac{q}{4}\right)}{2}\right)$ *Ecken c′, in denen je* 4 *Elementardreiecke zusammenstossen.*

Damit ist das Geschlecht des Polygons f und der Congruenzgruppe mit Hülfe der Gleichung (2) bestimmt.

Als Beispiel bestimme ich das Geschlecht einer G_{11} bei $q=11$, welche einer Ikosaedergruppe G''_{60} entspricht. Bei $q=11$ giebt es 60 Punkte a, 220 Punkte b, 330 Punkte c des Polygons F. Bei jedem Cyclus der Periode 11 bleiben 5 Punkte a, bei jedem Cyclus der Periode 3, 4 Punkte b, bei jeder Substitution der Periode 2 aber 6 Punkte c fest. Die Ikosaedergruppe G''_{60} enthält ferner bekanntlich 0 Cyclen der Periode 11, 10 Cyclen der Periode 3, 15 Cyclen der Periode 2; also ist $\nu_q=0$, $\nu_3=10$, $\nu_2=15$ zu setzen. Das Fundamentalpolygon f enthält also 1 Ecke a', in der 11 Invariantendreiecke, 3 Ecken b', in denen je 3, 4 Ecken c', in denen je 2 solcher Dreiecke zusammenstossen. Hieraus aber folgt das bekannte Resultat*): $p=0$.

§ 4.

Tabelle für das Geschlecht p der Congruenzgruppen q^{ter} Stufe.

Ich füge der Tabelle des § 2 jetzt noch 2 andere Tabellen hinzu. Die erste Tabelle enthält die Werthe von ν_q, ν_3 und ν_2 für die VII in § 2 aufgezählten Gruppenarten, wie sich dieselben aus den Untersuchungen über die Gruppe G ergeben, die zweite das berechnete Geschlecht für die umfassendsten dieser Gruppen.

Tabelle A.

	ν_q	ν_3	ν_2
I.	0	0	0
II. a)	1	0	0
II. b) *und* c) 4 *Fälle:*			
1) σ (oder τ) $\equiv 0$ mod. 6,	0	1	1
2) σ (oder τ) $\equiv 3$ mod. 6,	0	1	0
3) σ (oder τ) $\equiv \pm 2$ mod. 6,	0	0	1
4) σ (oder τ) $\equiv \pm 1$ mod. 6.	0	0	0

*) F. Klein, Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen, Math. Annalen, Bd. XIV, pag. 423.

	ν_q	ν_3	ν_2
III. 4 *Fälle:*			
1) $\sigma \equiv 0$ mod. 6,	1	q	q
2) $\sigma \equiv 3$ mod. 6,	1	q	0
3) $\sigma \equiv \pm 2$ mod. 6,	1	0	q
4) $\sigma \equiv \pm 1$ mod. 6.	1	0	0
IV. a) *und* b) 4 *Fälle:*			
σ' (oder τ') $\equiv 0$ mod. 6,	0	1	$\sigma' + 1$
σ' (oder τ') $\equiv 3$ mod. 6,	0	1	σ'
σ' (oder τ') $\equiv \pm 2$ mod. 6,	0	0	$\sigma' + 1$
σ' (oder τ') $\equiv \pm 1$ mod. 6.	0	0	σ'
IV. c)	0	0	3
V.	0	4	3
VI.	0	4	9
VII.	0	10	15

Tabelle (B) für das Geschlecht der umfassendsten der in § 2 aufgezählten Congruenzgruppengattungen.

I.

$$p = \frac{(q+2)(q-3)(q-5)}{24}.$$

II.

a) $$p = \frac{(q-5)(q-7)}{24}.$$

Bei b) und c) sind 4 Fälle zu unterscheiden. Es ist dabei $\sigma = \frac{q-1}{2}$ und $\tau = \frac{q+1}{2}$ gesetzt:

		(b)	(c)
1)	$q \equiv 1$ mod. 12,	$p = \frac{q^2 - 5q - 8}{12}$,	$p = \frac{q^2 - 7q + 18}{12}$,
2)	$q \equiv 5$ mod. 12,	$p = \frac{q(q-5)}{12}$,	$p = \frac{(q-2)(q-5)}{12}$,
3)	$q \equiv 7$ mod. 12,	$p = \frac{q^2 - 5q - 2}{12}$,	$p = \frac{(q-3)(q-4)}{12}$,
4)	$q \equiv 11$ mod. 12,	$p = \frac{(q-2)(q-3)}{12}$,	$p = \frac{q^2 - 7q + 4}{12}$.

III.

$$i = \frac{q-1}{2}; \quad 4 \text{ Fälle:}$$

$$\begin{array}{lll} 1) & q \equiv 1 \text{ mod. } 12, & p = \frac{q-13}{12}, \\ 2) & q \equiv 5 \text{ mod. } 12, & p = \frac{q-5}{12}, \\ 3) & q \equiv 7 \text{ mod. } 12, & p = \frac{q-7}{12}, \\ 4) & q \equiv 11 \text{ mod. } 12, & p = \frac{q+1}{12}. \end{array}$$

IV.

Dieselben 4 Fälle, wie in II b) und c) und III; es ist $\sigma' = \frac{q-1}{2}$, $\tau' = \frac{q+1}{2}$ gesetzt:

$$\begin{array}{llll} & \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \\ 1) & p = \frac{(q-1)(q-7)}{24}, & p = \frac{q^2-10q+33}{24}, & p = \frac{(q-5)(q^2-q-24)}{96}, \\ 2) & p = \frac{(q-3)(q-5)}{24}, & p = \frac{(q-5)^2}{24}, & \text{''} \quad , \\ 3) & p = \frac{(q-1)(q-7)}{24}, & p = \frac{(q-3)(q-7)}{24}, & p = \frac{(q-7)(q+4)(q-3)}{96}, \\ 4) & p = \frac{(q-3)(q-5)}{24}, & p = \frac{q^2-10q+13}{24}, & \text{''} \quad . \end{array}$$

V.

$$p = \frac{q^3 - 6q^2 - 51q + 294 + 32\binom{q}{3} + 18\binom{q}{4}}{288}.$$

Unterscheidet man wieder die 4 Fälle von Nr. III, so kommt:

$$\begin{array}{ll} 1) & p - 3 = \frac{(q-13)(q^2+7q+40)}{288}, \\ 2) & p = \frac{(q-5)(q+7)(q-8)}{288}, \\ 3) & p = \frac{(q-7)(q^2+q-44)}{288}, \\ 4) & p - 1 = \frac{(q-11)(q+1)(q+4)}{288}. \end{array}$$

VI.

$$p = \frac{q^3 - 6q^2 - 87q + 582 + 32\binom{q}{3} + 54\binom{q}{4}}{576},$$

Bei Unterscheidung der bekannten 4 Fälle:

$$1)\quad p - 610 = \frac{(q-73)(q^2+67q+4804)}{576},$$

$$2)\quad p - 4 = \frac{(q-17)(q^2+11q+100)}{576},$$

$$3)\quad p = \frac{(q-7)(q^2+q-80)}{576},$$

$$4)\quad p - 13 = \frac{(q-23)(q^2+17q+304)}{576}.$$

VII.

$$p = \frac{q^3 - 6q^2 - 171q + 1446 + 80\binom{q}{3} + 90\binom{q}{4}}{1440}.$$

Bei Unterscheidung der 4 Fälle:

$$1)\quad p - 136 = \frac{(q-61)(q^2+55q+3184)}{1440},$$

$$2)\quad p - 11 = \frac{(q-29)(q^2+23q+496)}{1440},$$

$$3)\quad p - 2 = \frac{(q-19)(q^2+13q+76)}{1440},$$

$$4)\quad p = \frac{(q-11)(q^2+5q-116)}{1440}.$$

§ 5.

Die Hauptmoduln von Primzahlstufe.

Aus den Tabellen des § 4 ist nun unmittelbar ersichtlich, *dass für $q > 2$ ausser den Hauptmoduln der 3. und 5. Stufe nur noch Hauptmoduln der siebenten, elften und dreizehnten Stufe existiren.*

Für die siebente Stufe insbesondere hat man die folgenden Resultate):*

1) *Es giebt* 8 *gleichberechtigte Hauptmoduln* m_7, welche den 8 Congruenzgruppen g_{24} (II, a in § 2) und den 8 cyklischen Untergruppen G_7 entsprechen.

2) *Es giebt acht gleichberechtigte Hauptmoduln* m_{21}, welche den 8 Congruenzgruppen g_8 (III in § 2) und den 8 halbmetacyklischen Untergruppen G'_{21} entsprechen.

3) *Es giebt* 28 *gleichberechtigte Hauptmoduln* m_6, welche den 28 Congruenzgruppen g_{28} (IV, a) und den 28 Doppelpyramidengruppen G'_6 entsprechen.

---

*) Ich habe dieselben der Hauptsache nach bereits in meiner Mittheilung an die Münchener Akademie vom Februar 1880 angegeben, cf. Math. Annalen Bd. XVII, pag. 81.

4) *Es giebt* 21 *gleichberechtigte Hauptmoduln* m_8, welche den 21 Congruenzgruppen g_{21} (IV, b) und den 21 Doppelpyramidengruppen G_8' entsprechen.

5) *Es giebt* 2 *Arten von je* 7 *gleichberechtigten Hauptmoduln* m_4, welche den 2.7 Congruenzgruppen g_{42} (IV, c) und den 2.7 Untergruppen G_4' entsprechen.

6) *Es giebt* 2 *Arten von je* 7 *gleichberechtigten Hauptmoduln* m_{12}, welche den 2.7 Congruenzgruppen g_{14} (V) und den 2.7 Tetraedergruppen G_{24}'' entsprechen.

7) *Es giebt* 2 *Arten von je* 7 *gleichberechtigten Hauptmoduln* m_{24}, welche den 2.7 Congruenzgruppen g_7 (VI) und den 2.7 Oktaedergruppen G_{24}'' entsprechen.

Jeder Modul m_{24} ist (vgl. § 2) eine rationale Function 2. Grades eines der Moduln m_{12}, jeder Modul m_{12} wieder eine rationale Function 3. Grades eines Moduls m_4. Es enthält nämlich jede Gruppe G_{24}'' eine G_{12}'', jede G_{12}'' eine G_4' als Untergruppe.

Jeder Modul m_8 ist aus demselben Grunde eine rationale Function 2. Grades eines jeden von 2 Moduln m_4, und es lassen sich immer gleichzeitig 3 Moduln m_8 durch denselben Modul m_4 rational darstellen. Denn es enthält jede G_8' 2 Gruppen G_4', jede G_4' aber gehört zu 3 Gruppen G_8'.

Analog folgt:

Jeder Modul m_{24} lässt sich durch jeden von 4 bez. 3 Moduln m_6 bez. m_8 darstellen, und immer je 2 Moduln m_{24} sind rationale Functionen desselben Moduls m_6 oder m_8.

Jeder Modul m_{21} lässt sich als rationale Function 3. Grades eines Moduls m_7 darstellen. —

Insbesondere mögen wir unter den jedesmaligen gleichberechtigten Moduln je einen in der Art aussuchen, dass unter den zugehörigen Untergruppen G_7 in G_{21}', G_6' in G_{24}'', G_4' in G_8' und G_{12}'', G_{12}'' und G_8' in G_{24}'' enthalten sind. Dann drücken sich die betreffenden Hauptmoduln, deren Anzahl 10 ist (m_7, m_6, m_4', m_4'', m_8, m_{21}, m_{12}', m_{12}'', m_{24}', m_{24}''), durch je einen der 4 Hauptmoduln m_7, m_6, m_4', m_4'' rational aus. Für letztere 4 Moduln habe ich l. c. (Math. Annalen XVII, pag. 81) explicite analytische Formeln angegeben. —

Was die *elfte* Stufe betrifft, *so erhält man nur* 2 *Arten von je* 11 *gleichberechtigten Hauptmoduln* m_{60}, welche zu den 2.11 Congruenzgruppen g_{11} und den 2.11 Ikosaedergruppen G_{60}'' (VII) gehören. Es giebt also nur zwei wesentlich verschiedene Hauptmoduln der 11. Stufe. Es sind dies dieselben Grössen, welche F. Klein bei seiner Untersuchung der Transformation 11. Ordnung (Math. Annalen XV, pag. 533ff.) mit z bezeichnet hat.

Für die dreizehnte Stufe erhält man:

1) 14 *gleichberechtigte Hauptmoduln* m_{78}, welche den 14 g_{14} (III) und den 14 G'_{78} entsprechen;

2) 14 *gleichberechtigte Hauptmoduln* m_{39}, welche den 14 g_{28} (III) und den 14 G'_{39} entsprechen;

3) 14 *gleichberechtigte Hauptmoduln* m_{26}, welche den 14 g_{42} (III) und den 14 G'_{26} entsprechen.

Unter ihnen können wir dann wieder drei wesentlich verschiedene Hauptmoduln m_{26}, m_{39}, m_{78} in der Art aussuchen, dass sich m_{78} als rationale Function dritten Grades von m_{26} und als Function zweiten Grades von m_{39} darstellt. Der Modul m_{78} ist dieselbe Grösse, welche im 14ten Bande dieser Annalen, pag. 143, Formel (21) daselbst, von F. Klein als τ bezeichnet ist. —

Mit diesen Angaben haben wir den Zielpunkt erreicht, den wir uns in gegenwärtiger Arbeit gesteckt hatten.

Bamberg, den 1. Februar 1883.

Ueber Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.

(Zweite Abhandlung).

Von

JOSEPH GIERSTER in Bamberg.

Einleitung.

Meine erste Abhandlung*) über den in der Ueberschrift bezeichneten Gegenstand hat sich mit den Klassenzahlrelationen beschäftigt, welche aus den *ausgezeichneten* Congruenzmoduln von Primzahlstufe q gewonnen werden können. Es wurden die linken Seiten aller derjenigen Relationen, welche für eine durch q nicht theilbare ganze Zahl n existiren, allgemein aufgestellt. Für die dritte und fünfte Stufe gelang es auch, die rechten Seiten derselben hinzuschreiben und damit alle fertigen Formeln der genannten Art für diese 2 Stufen aufzustellen. Dies letztere war dem Umstande zu danken, dass die ausgezeichneten Congruenzmoduln der 3. und 5. Stufe *Hauptmoduln* sind und dass also diese Moduln wirkliche Modulargleichungen liefern, ein Umstand, der für eine höhere Stufe als die fünfte nicht mehr eintritt.

Die vorliegende Abhandlung soll in gleicher Weise die Klassenzahlrelationen in Betracht ziehen, welche den *nicht ausgezeichneten* Congruenzmoduln von Primzahlstufe entsprechen. Es zeigt sich, dass dieselben nur einfache lineare Combinationen der aus den ausgezeichneten Congruenzmoduln abgeleiteten Klassenzahlrelationen sind (§ 2). Allgemein werden für diese Relationen auch nur die linken Seiten aufgestellt und zwar — um die Darstellung nicht zu sehr zu compliciren — wieder nur für ein durch q nicht theilbares n. Was die rechten Seiten angeht, so können dieselben auf dem bekannten Kronecker'schen Wege auch hier natürlich nur gebildet werden, sofern es sich um *Hauptmoduln* handelt. Nun wurden aber alle nicht ausgezeichneten Moduln von Primzahlstufe, welche Hauptmoduln sind, in

*) Mathematische Annalen Bd. XXI, pag. 1.

der hier vorangehenden Arbeit bestimmt. Für sie gebe ich im Folgenden die rechten Seiten, d. h. also die vollen Klassenzahlrelationen, in expliciter Form. Zugleich theile ich einige weitergehende Resultate mit, welche ich bisher allerdings nur auf inductivem Wege gefunden habe.

§ 1.

Ueber das Verhalten nicht ausgezeichneter Moduln von Primzahlstufe bei Transformation n^{ter} Ordnung.

Auch bei den nicht ausgezeichneten Modulsystemen der q^{ten} Stufe ist die Transformation*) n^{ter} Ordnung dadurch definirt, dass an Stelle der Grösse ω die neue Grösse

$$\omega' = U(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \tag{1}$$

eingesetzt wird, wo a, b, c, d 4 ganze Zahlen der Determinante $ad - bc = n$ sind. Hiebei soll wieder der Einfachheit halber n zu q relativ prim angenommen werden.

Es seien nunmehr

$$m_1(\omega),\ m_2(\omega),\ \ldots,\ m_\nu(\omega)$$

die Moduln eines vollen Modulsystems, welches zur Congruenzgruppe g_n gehört. Es seien ferner

$$m_1'(\omega) = m_1(\omega'),\ \ldots,\ m_\nu'(\omega) = m_\nu(\omega')$$

die Moduln des transformirten Systems. Dann finden zwischen diesen beiden Systemen von Moduln wieder Modulargleichungen bez. Modularcorrespondenzen statt.

Das volle System der Moduln m erreicht nach Definiton gerade jedes zulässige Werthsystem einmal, wenn die Variable ω in das zur Gruppe g_n gehörige Fundamentalpolygon f eingeschlossen wird. Jedem Punkte ω dieses Polygons entsprechen dann unendlich viele transformirte Werthe

$$\omega' = U\,s(\omega), \tag{2}$$

wo s alle zur Gruppe g_n gehörigen Substitutionen beschreibt. Alle diese Werthe sind nun wieder zu einer endlichen Anzahl von Repräsentanten N' in Bezug auf die Gruppe g_n relativ äquivalent und daher entsprechen jedem Werthsysteme der m auch nur N' Werthsysteme der m'.

Um die Zahl N' zu finden, bemerke man, dass jede Grösse $\omega' = Us(\omega)$ durch eine lineare Substitution S^{-1} der Invariantengruppe**) sich in einen Ausdruck

*) Cf. pag. 66. (Blosse Angaben von Seitenzahlen beziehen sich wieder auf die Note von F. Klein im 17^{ten} Bande dieser Annalen).

**) Math. Ann. Bd. XXI, pag. 4.

$$S^{-1}(\omega') = \Omega_{A,B} = \frac{A\omega + Bq}{D}$$

überführen lässt, wo A ein bestimmter Theiler von n, $A \,.\, D = n$ ist und B einen zum grössten Theiler T von A und D relativ primen Rest mod. D bedeutet. Hieraus folgt aber, dass immer $\omega' = S\Omega_{A,B}$ gemacht werden kann. Die Zahl der Werthe Ω wurde früher durch $N = n \,.\, \Pi\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ dargestellt, wo p alle verschiedenen in n enthaltenen Primzahlen beschreibt.

Nun sind alle Substitutionen s gerade zu den r Substitutionen S_ϱ der Untergruppe G_r modulo q congruent. Man kann sie daher in r Reihen so eintheilen, dass die Substitutionen jeder Reihe modulo q zu einander congruent sind und mithin durch die Substitutionen der ausgezeichneten Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe auseinander hervorgehen. Eine Substitution der ersten, zweiten, . . . Reihe soll bez. durch $s_1, s_2, \ldots$ bezeichnet werden und es sei die Festsetzung getroffen, dass $s_\varrho \equiv S_\varrho$ mod. q sei.

Dem entsprechend theilen sich auch die unendlich vielen Zahlen (2) in die r Reihen

$$\omega' = U(\omega), \ \omega' = U s_2(\omega), \ldots, \ \omega' = U s_r(\omega),$$

und es ist klar, dass die Zahlen einer jeden dieser r Reihen gerade zu allen N Repräsentanten relativ äquivalent sind. Für jede Reihe treten dieselben Werthe $\Omega_{A,B}$ auf, nur werden die Substitutionen S, welche zu $\Omega_{A,B}$ für jede Reihe noch hinzutreten, verschiedene sein. Tritt bei der ersten Reihe noch die Substitution S zu $\Omega_{A,B}$ hinzu, so dass der entsprechende ω-Repräsentant durch $S\Omega_{A,B}$ dargestellt ist, so lassen sich die analogen Repräsentanten der 2., 3., . . . Reihe durch $s_2' S\Omega_{A,B}$, $s_3' S\Omega_{A,B}$, . . . darstellen, wo s_2', s_3', . . . ganzzahlige Substitutionen der Determinante 1 sind, welche eine zur Gruppe g_n der s ähnliche Gruppe g_n' constituiren. In der That folgt aus den Identitäten

$$U s_\varrho(\omega) = s_\varrho' S\Omega_{A,B},$$

$$U(\omega) = S\Omega_{A,B}$$

die Relation

$$U s_\varrho = s_\varrho' U$$

oder

$$s_\varrho' = U s_\varrho U^{-1} = V s_\varrho V^{-1},$$

wobei V die reelle oder imaginäre Substitution

$$V = \frac{\frac{a}{\sqrt{n}}\,\omega + \frac{b}{\sqrt{n}}}{\frac{c}{\sqrt{n}}\,\omega + \frac{d}{\sqrt{n}}}$$

der Determinante 1 ist.

Ich bezeichne jetzt die Substitutionen, welche den beiden Gruppen g_n und g_n' gemeinsam sind und die natürlich wieder eine Gruppe g_m'' bilden, durch s''. Dieselben mögen modulo q zu τ Substitutionen S congruent sein, dann ist die Zahl N' aller Repräsentanten durch

$$N' = \frac{r}{\tau} N$$

gegeben.

In der That werden unter der gemachten Festsetzung die einem gegebenen $\Omega_{A,B}$ entsprechenden Werthe

$$S\Omega_{A,B};\quad s_2' S\Omega_{A,B};\quad \ldots;\quad s_r' S\Omega_{A,B}$$

zu je τ in Bezug auf die Gruppe g_n relativ äquivalent und liefern daher dasselbe Werthsystem der m. Die Zahl der verschiedenen demselben $\Omega_{A,B}$ entsprechenden Repräsentanten ist also $\frac{r}{\tau}$ und $N' = \frac{r}{\tau} N$.

Jedem Werthsysteme der m entsprechen also N' Werthsysteme der m' und umgekehrt *und es ist also der Grad der zwischen den m, m' bestehenden Modularcorrespondenz in jeder der beiden zu Vergleich stehenden Reihen von Variabelen gleich N'.*

Die so gefundenen Modularcorrespondenzen sind bekanntlich *irreductibel.* Aber es ist, wie früher*), nützlich, immer mehrere derselben zusammenzufassen, und also die irreductibele Correspondenz durch eine reductibele zu ersetzen. Man betrachte nämlich zu gleicher Zeit alle irreductiblen Correspondenzen der Transformationsgrade $\frac{n}{\varrho^2}$, wo ϱ^2 alle quadratischen Factoren von n beschreibt. Ausdrücklich sei bemerkt, dass man auch $\varrho^2 = n$ zu nehmen hat, wenn n ein reines Quadrat ist, und dass dann die zum Transformationsgrade $\frac{m}{\varrho^2} = 1$ gehörige Correspondenz $\frac{r}{\tau} - \frac{r}{\tau}$-deutig ist. *Die so entstehenden reductiblen Modularcorrespondenzen sind dann*

$$\frac{r}{\tau}\Phi(n) - \frac{r}{\tau}\Phi(n)\text{-}deutig,$$

*wo $\Phi(n)$ wieder die bekannte zahlentheoretische Function ist**).*

§ 2.

Die Klassenzahlrelationen, welche den Modularcorrespondenzen des § 1 entsprechen.

Bei den Modularcorrespondenzen der ausgezeichneten Modulsysteme der q^{ten} Stufe liessen sich die Anzahlen der Coincidenzen durch gewisse Klassenzahlsummen σ darstellen. Ganz ebenso treten bei den Modular-

*) Math. Ann. Bd. XXI, pag. 25 und pag. 43.

**) Math. Ann. Bd. XXI, pag. 25.

correspondenzen des § 1 als Anzahlen der Coincidenzen Klassenzahlsummen K auf. Es gilt nun folgender einfacher Satz:

Die Klassenzahlsummen K sind lineare Combinationen der σ. Demnach sind also auch die auf dem ofterwähnten Wege aus den sämmtlichen Modularcorrespondenzen der q^{ten} Stufe zu erlangenden Klassenzahlrelationen nur einfache lineare Combinationen derjenigen, welche aus den Modularcorrespondenzen der ausgezeichneten Modulsysteme der q^{ten} Stufe abgeleitet werden können.

Natürlich muss man dabei beachten, dass die rechten Seiten jener Klassenzahlrelationen, welche den ausgezeichneten Moduln entsprechen, möglicherweise höhere, uns unbekannte, zahlentheoretische Functionen enthalten können, welche sich wechselseitig gerade fortheben, wenn man geeignete lineare Combinationen der betreffenden Klassenzahlrelationen einführt. Eben auf diesem Umstande ruht es, wenn uns im Folgenden die Betrachtung *nicht* ausgezeichneter Moduln für die siebente, elfte und dreizehnte Stufe explicite Formeln ergiebt, die wir einstweilen noch nicht durch die Betrachtung der *ausgezeichneten* Moduln finden können.

Um den soeben ausgesprochenen Satz von der linearen Combination einzusehen, bemerke man zunächst, dass für einen gegebenen ω-Werth eine Coincidenz der m und m' nach der Definition dieser Functionen dann und nur dann vorhanden ist, wenn ω und

$$\omega' = U s_\nu(\omega), \tag{I}$$

in Bezug auf die Gruppe g_n relativ äquivalent sind, d. h. wenn eine Gleichung

$$\omega = s_\mu U s_\nu(\omega) \tag{Ia}$$

besteht. Schliesst man die Variable ω in das zur Gruppe g_n gehörige Fundamentalpolygon f ein, so beschreibt das System der m gerade einmal alle zulässigen Werthsysteme und die Anzahl aller Coincidenzen ist wieder der Anzahl der Repräsentanten R gleich, welche für solche ω-Werthe einer Gleichung (I) genügen.

Wir führen jetzt an Stelle der Variablen ω eine neue Variable ω_ν ein, welche gerade das Fundamentalpolygon F beschreibt, das zur ausgezeichneten Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe gehört. Wir betrachten ferner statt der Gleichung (I) die r Gleichungen

$$\omega_\nu' = U s_1(\omega_\nu);\ \omega_\nu' = s_2\, U s_1(\omega_\nu);\ \ldots;\ \omega_\nu' = s_r\, U s_1(\omega_\nu). \tag{II}$$

Jede dieser Gleichungen stellt eine Correspondenz des ausgezeichneten Modulsystems der q^{ten} Stufe*) dar und zwischen den Coincidenzen von (I) und (II) bestehen sehr einfache Beziehungen. Zunächst ist klar,

*) Math. Ann. Bd. XXI, pag. 9. s_1 ist eine beliebige Substitution der ausgezeichneten Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe (vergl. § 1).

dass jeder Coincidenz einer Correspondenz (II) eine Coincidenz (I) entspricht. In der That giebt es nur einen Punkt ω des Polygons f welcher zum Punkte ω_ν von F in Bezug auf die Gruppe g_n relativ äquivalent ist, so dass $s_1(\omega_\nu) = s_\nu(\omega)$ wird; also entspricht einer jeden Gleichung $\omega_\nu = s_\mu U s_1(\omega_\nu)$ nur eine Gleichung $\omega = s_\nu^{-1} s_\mu U s_\nu(\omega)$. Umgekehrt entsprechen jeder Gleichung $\omega = s_\mu U s_\nu(\omega)$ gerade τ Coincidenzen (II). Setzt man nämlich $s_\nu(\omega) = s_1(\omega_\nu)$, wobei ω_ν im Polygon F liegen soll, so giebt es ausser ω_ν noch $\tau - 1$ Punkte von F, welche eine Coincidenz (II) liefern, nämlich die Punkte $s''_\mu(\omega_\nu) = \omega_\nu^{(\mu)}$. Hiebei haben die Substitutionen s'' die Bedeutung des § 1 und genügen also einer Relation $U s''_\mu = s''_{\mu'} U$. Die τ verschiedenen der gegebenen Coincidenz (I) entsprechenden Coincidenzen (II) sind daher durch die Gleichungen:

$$\text{(III)} \qquad \omega_\nu^{(\mu)} = s''_\mu s^{-1} s_\mu s_{\mu'}^{-1\,''} U s_1(\omega_\nu^{(\mu)})$$

dargestellt.

Bemerkt man hiezu noch, dass zu jeder der r Correspondenzen (II) genau dieselben Repräsentanten*) gehören, welche bez. den in § 1 angeführten modulo q verschiedenen Reihen $U s_\nu(\omega)$ entsprechen, so folgt, dass für einen gegebenen ω-Werth einer Gleichung (I) mit gegebenen s_ν genau dieselbe Anzahl von Repräsentanten Genüge leistet, wie einer jeden der τ zugehörigen Gleichungen (II). Also entspricht jeder Coincidenz (II) genau 1 Coincidenz (I), jeder Coincidenz (I) dagegen entsprechen gerade τ Coincidenzen (II).

Dieses Verhalten gilt auch für die Ecken a, b, c. Sind zum Beispiel die Drehungen der Periode 3 um einen Punkt b nicht in der Gruppe g''_m enthalten, so entsprechen auch hier jedem Punkte ω von f gerade τ verschiedene $\omega_\nu^{(\mu)}$ von F und jeder dieser Grössen eine Coincidenz (II). Sind aber jene Drehungen unter den Substitutionen s enthalten, so erhält man aus einem ω-Werthe nur $\frac{\tau}{3}$ verschiedene $\omega_\nu^{(\mu)}$; allein für jeden dieser Werthe haben jetzt 3 der Correspondenzen (II) je eine Coincidenz aufzuweisen, da jetzt in Gleichung (III) die Substitution $s''_{\mu'}$ drei Werthe hat, so dass die $1 - \tau$-deutige Beziehung unter allen Umständen aufrecht erhalten ist. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die singulären Coincidenzen, welche in den Punkten a statthaben.

Hieraus folgt das Resultat:

$$\text{(III)} \qquad K = \frac{1}{\tau} \cdot \left\{ \sigma_{i_1} + \sigma_{i_2} + \cdots + \sigma_{i_r} \right\},$$

wo die Grössen σ_i *die den Correspondenzen* (II) *entsprechenden Coinci-*

---

*) Math. Ann. Bd. XXI, pag. 10.

*denzzahlen angeben**), *und es ist hiermit in der That die Summe K als lineare Combination geeigneter Summen σ dargestellt, wie dies in Aussicht genommen wurde.* —

Was nun den Werth von K, d. h. die rechte Seite der Klassenzahlrelationen angeht, so kann derselbe in allen Fällen ohne Weiteres hingeschrieben werden, *wenn das Chasles'sche Correspondenzprincip ohne Zusatzglied gilt. Da unsere reductibelen Correspondenzen*

$$\frac{r}{\tau}\,\Phi(n) - \frac{r}{\tau}\,\Phi(n)\text{-deutig}$$

sind, so kommt dann unmittelbar die Klassenzahlrelation:

$$\text{(IV)} \qquad 2\,\Phi(n) = \frac{1}{r}\left(\sigma_{i_1} + \sigma_{i_2} + \cdots + \sigma_{i_r}\right).$$

Insbesondere ist dies, wie wir wissen, richtig, wenn wir es mit *Hauptmoduln* zu thun haben, und nur für sie werden wir im Folgenden vorstehende Formel in Anwendung bringen.

Ich füge hier noch einen Satz hinzu, welcher eine unmittelbare Consequenz der Gleichung (III) ist: *Enthält die Congruenzgruppe g_n die Congruenzgruppe g_m als Untergruppe in sich, so sind die Klassenzahlrelationen, welche die erstere Gruppe liefert, lineare Combinationen der der letzteren Gruppe entsprechenden Relationen.* Von zwei Hauptmoduln also, deren einer sich rational durch den zweiten ausdrückt, werden wir nur den letzteren in Betracht zu ziehen haben. Insbesondere aber ist allemal die Invariantenrelation eine lineare Combination der Klassenzahlrelationen der q^{ten} Stufe.

§ 3.

Ueber die Gesammtheit der Klassenzahlsummen, welche einem bestimmten Congruenzmodulsystem entsprechen.

Bekanntlich giebt es $\frac{q(q^2-1)}{2}$ modulo q verschiedene ganzzahlige Transformationen der n^{ten} Ordnung

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} = U(\omega), \quad (ad - bc = n),$$

welche alle aus einer hervorgehen, wenn man auf diese $\frac{q(q^2-1)}{2}$ mod. q verschiedene Substitutionen der Invariantengruppe anwendet. Nicht alle diese Transformationen U liefern natürlich für eine bestimmte Congruenzgruppe g_n verschiedene Klassenzahlsummen (III) (§ 2). Es scheint schwierig, allgemein anzugeben, wie viele dieser Klassenzahl-

*) Math. Ann. Bd. XXI, pag. 48.

summen verschieden ausfallen. Ich beschränke mich hier darauf, gewisse Regeln anzugeben, die im Folgenden genügen werden, und vermöge deren man eine Reihe von Klassenzahlsummen von Vorneherein als identisch erkennt.

1) *Offenbar erhält man genau dieselbe Summe, wenn man statt $U(\omega)$ etwa $s_\nu U(\omega)$ setzt, wo s_ν eine Substitution der Gruppe g_n ist.* Denn hierdurch werden die Correspondenzen (II) des § 2 und also auch die Grössen σ nur unter einander vertauscht. Man erhält also jedenfalls alle Klassenzahlsummen, welche einem gegebenen Modulsysteme entsprechen, wenn man $n = \frac{q(q^2-1)}{2r}$ Transformationen U_μ so aufstellt, dass keine Relationen $U_\mu U_{\mu'}^{-1} \equiv s_\nu$ zwischen irgend zweien von ihnen existirt.

2) Ferner bemerke man, dass die Klassenzahlsumme σ_i, welche der durch $\omega' = U(\omega)$ dargestellten Correspondenz entspricht (von σ_∞, σ_∞^{-1}, σ_∞^{+1} abgesehen), lediglich von der Grösse $i \equiv \pm(a+d) \bmod. q$ abhängig ist; und dass also alle Substitutionen $U' = tUt^{-1}$, welche aus U durch Transformation in Bezug auf eine Substitution t der Invariantengruppe hervorgehen, mit U dasselbe i und damit auch dieselbe Klassenzahlsumme σ_i liefern.

Es sei nunmehr t irgend eine zur Gruppe g_n vertauschbare Substitution, welche also für jede der Gruppe g_n angehörige Substitution s_ν einer Bedingung $ts_\nu t^{-1} = s_\mu$ genügt, so giebt die Transformation

$$U' = s_\varrho t s_\nu U t^{-1} \tag{2}$$

dieselbe Klassenzahlsumme (III) (§ 2) *wie U.* Denn die Correspondenzen (II) (§ 2) sind ja dann allgemein durch

$$\omega' = s_\mu U'(\omega) = s_\mu s_\varrho t s_\nu U t^{-1}(\omega) = t s_\tau U t^{-1}(\omega)$$

dargestellt, wobei $t^{-1} s_\mu s_\varrho t = s_\tau s_\nu^{-1}$ gesetzt wurde, und liefern also der Reihe nach dieselben Summen σ_i wie die durch $s_\tau U$ dargestellten. Man kann also wieder unter den oben ausgewählten Transformationen U solche aussuchen, welche in keiner Beziehung (2) stehen.

Speciell stehen in einer Beziehung (2) zu U alle Transformationen $s_\mu U s_\nu$, da ja $s_\mu U s_\nu = s_\nu^{-1}(s_\nu s_\mu U) s_\nu$ ist.

3) Ferner erkennt man, *dass eine zur Congruenzgruppe g_n gleichberechtigte Gruppe g_n' keine neue Relation liefert.* Denn ist g_n' zu g_n gleichberechtigt, so besteht für irgend eine Substitution s_ν' von g_n' eine Beziehung $s_\nu' = ts_\nu t^{-1}$, wo s_ν eine Substitution der Gruppe g_n und t eine gewisse Substitution der Invariantengruppe ist. Also ergiebt für sie die Transformation U die r Correspondenzen $\omega' = t s_\nu t^{-1} U(\omega)$, welche sich, wenn man $t^{-1} U t = U'$ setzt, in der Form

$$\omega' = t s_\nu U' t^{-1}(\omega)$$

schreiben lassen. Diese liefern aber der Reihe nach dieselben Summen

σ_i wie die r Correspondenzen $\omega' = s_\nu U'(\omega)$, welche bereits bei der Congruenzgruppe g_n erledigt worden sind.

Das gleiche gilt auch für eine Congruenzgruppe g_n', welche aus g_n durch eine imaginäre*) Transformation abgeleitet werden kann und also von einer anderen Art ist als g_n; nur dass in den entsprechenden Relationen die Summen σ_∞^{+1}, σ_∞^{-1} mit einander vertauscht sind.

§ 4.

Die Klassenzahlrelationen der 7. Stufe**).

Die Ableitung derjenigen Klassenzahlrelationen, welche aus den wirklichen Modulargleichungen der Hauptmoduln von Primzahlstufe gewonnen werden können, ist nunmehr äusserst einfach. Für die siebente Stufe reicht es nach § 2 und auf Grund der Resultate der hier vorangehenden Arbeit hin, die 4 Hauptmoduln m_7, m_6, m_4', m_4'' zu studiren, welche der Reihe nach etwa folgenden Untergruppen entsprechen:

1) $\quad G_7 \left\{ \omega' \equiv \omega + \nu \quad \text{mod. } 7, \atop \nu = 0, 1, 2, \ldots, 6 \right.$

2) $\quad G_6' \left\{ \begin{array}{llll} \omega' \equiv & \omega, & \dfrac{2\omega}{4}, & \dfrac{4\omega}{2} \\ \omega' \equiv & -\dfrac{1}{\omega}, & \dfrac{-2}{4\omega}, & \dfrac{-4}{2\omega} \end{array} \right. \text{mod. } 7,$

3) $\quad G_4'(m_4') \left\{ \omega' \equiv \omega, \quad -\dfrac{1}{\omega}, \quad \dfrac{2\omega+3}{3\omega-2}, \quad \dfrac{3\omega-2}{-2\omega-3} \text{ mod. } 7, \right.$

4) $\quad G_4'(m_4'') \left\{ \omega' \equiv \omega, \quad -\dfrac{1}{\omega}, \quad \dfrac{2\omega-3}{-3\omega-2}, \quad \dfrac{3\omega+2}{2\omega-3} \text{ mod. } 7. \right.$

Von ihnen erweist sich übrigens m_6 bei näherer Untersuchung noch als überflüssig, da er keine neuen Relationen liefert; ich werde ihn also im Folgenden bei Seite lassen. Ebenso ist es überflüssig, neben m_4' noch besonders das m_4'' zu betrachten.

Der Uebersicht halber stelle ich hier vorab die Klassenzahlsummen σ der 7. Stufe ausführlich zusammen***), wobei ich zwei Fälle unterscheide:

---

*) Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 355; Bd. XXI, pag. 48.

**) Wegen der Resultate vergl. meine wiederhölt citirte Note aus den Berichten der Münchener Akademie vom Febr. 1880 oder auch den Abdruck derselben im 17ten Bande dieser Annalen.

***) Math. Ann. Bd. XXI, pag. 43 und pag. 48.

I) n quadratischer Rest modulo 7.

1) $\sigma_\infty = 7 \cdot 48 \cdot \sum \mathsf{H}\left(\frac{4n - k_{2\sqrt{n}}^2}{49}\right) + 48\, U_{\sqrt{n}},$

2) $\sigma'_\infty = 7 \cdot \sum \left[\mathsf{H}(4n - k_{2\sqrt{n}}^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n - k_{2\sqrt{n}}^2}{49}\right)\right] + 6\, U_{\sqrt{n}},$

3) $\sigma_0 = 8 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - k_0^2),$

4) $\sigma_{\sqrt{n}} = 6 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - k_{\sqrt{n}}^2) + 6\, U_{2\sqrt{n}} + 6\, U_{4\sqrt{n}},$

5) $\sigma_{4\sqrt{n}} = 8 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - k_{4\sqrt{n}}^2);$

II) n quadratischer Nichtrest modulo 7.

1) $\sigma_0 = 6 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - k_0^2) + 12\, U_{\sqrt{-n}},$

2) $\sigma_{\sqrt{-n}} = 8 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - k^2_{\sqrt{-n}}),$

3) $\sigma_{2\sqrt{-n}} = 6 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - k_{2\sqrt{-n}}^2) + 6\, U_{2\sqrt{-n}} + 6\, U_{4\sqrt{-n}},$

4) $\sigma_{4\sqrt{-n}} = 8 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - k_{4\sqrt{-n}}^2).$

Hierbei bedeutet σ_i, wenn i endlich ist, die Zahl der Coincidenzen der durch die Congruenz $\omega' \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$, mod. 7 dargestellten Modularcorrespondenz des ausgezeichneten Modulsystems der 7. Stufe, wofern $\pm(a + d) \equiv i$ mod. 7 ist. In gleicher Weise entspricht σ_∞ der Congruenz $\omega' \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}}$, σ'_∞ einer Congruenz $\omega' = \frac{\sqrt{n}\,\omega + b}{\sqrt{n}}$ oder $\omega' \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega}{c\omega + \sqrt{n}}$, wenn b bez. c von 0 mod. 7 verschieden ist.

Die Summen $\sum \mathsf{H}(4n - k_i^2)$ auf der rechten Seite erstrecken sich, falls i von 0 verschieden ist, auf alle positiven ganzen Zahlen k_i, welche $\equiv + i$ oder $- i$ mod. 7 und nicht grösser als $2\sqrt{n}$ sind. Hingegen beschreibt in der Summe $\sum \mathsf{H}(4n - k_0^2)$ die Grösse k_0 die Null und alle positiven und negativen ganzen Zahlen, welche $\equiv 0$ mod. 7 und ihrem absoluten Betrage nach nicht grösser als $2\sqrt{n}$ sind.

Endlich bedeutet U_i die Summe aller ganzzahliger Theiler von n, die kleiner als $\sqrt{n}$ und $\equiv i$ oder $-i$ mod. 7 sind, mit dem Bemerken, dass, wenn n ein reines Quadrat ist und $\sqrt{n}$ ebenfalls die Bedingung $\sqrt{n} \equiv \pm i$ mod. 7 erfüllt, zu jener Summe noch $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ hinzuaddirt werden muss.

Ich erledige zuerst den

II. Fall. (n quadratischer Nichtrest mod. 7).

A) *Gruppe* G_7 ($\omega' \equiv \underset{\nu=0,1,\ldots,6}{\omega + \nu}$ mod. 7).

a) Die Transformation $U \equiv \frac{a\omega}{d}$, $ad = n$ liefert die 7 Congruenzen (§ 2, II)

$$s_\nu U \equiv \frac{a\omega + d\nu}{d} \text{ mod. } 7.$$

Die Relation III, § 2 wird daher, da $i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_7 = a + d$ ist, einfach

$$\sigma_{a+d} = 2\Phi(n).$$

Speciell kommen die 2 Formeln:

(1) $$\sigma_0 = 2\Phi(n) \quad (a \equiv -d \equiv \sqrt{-n}),$$

(2) $$\sigma_{2\sqrt{-n}} = 2\Phi(n) \quad (a \equiv 2\sqrt{-n},\ d \equiv 3\sqrt{-n}).$$

Jede Transformation $U = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$, $ad - bc = n$, für welche $c \equiv 0$ mod. 7 ist, liefert eine dieser 2 Formeln (nach § 3, 1). Ist aber $c \gtrless 0$ mod. 7, so wird

$$s_\nu U \equiv \frac{(a + c\nu)\omega + (b + d\nu)}{c\omega + d},$$

$\underset{\nu=0,1,\ldots,6}{i_{\nu+1} = a + d + c\nu}$, d. h. $i_{\nu+1}$ beschreibt alle Reste mod. 7, und die entsprechende Relation lautet demnach:

$$\frac{1}{7}(\sigma_0 + 2\sigma_{\sqrt{n}} + 2\sigma_{2\sqrt{n}} + 2\sigma_{4\sqrt{n}}) = 2\Phi(n).$$

Diese drei Formeln sind also die einzigen, welche der Hauptmodul m_7 hier liefert.

B) *Gruppe* G_4' (zu m_4' gehörig) $\left\{s_1 \equiv \omega,\ s_2 \equiv -\frac{1}{\omega} \text{ etc.} \ldots\right\}$.

a) $$U \equiv \frac{\sqrt{-n}\,\omega}{-\sqrt{-n}},\quad s_2 U \equiv \frac{\sqrt{-n}}{\sqrt{-n}\,\omega},\quad s_3 U \equiv \frac{2\sqrt{-n}\,\omega - 3\sqrt{-n}}{3\sqrt{-n}\,\omega + 2\sqrt{-n}},$$

$$s_4 U \equiv \frac{3\sqrt{-n}\,\omega + 2\sqrt{-n}}{-2\sqrt{-n}\,\omega + 3\sqrt{-n}} \text{ mod. } 7;$$

$$i_1 = 0,\quad i_2 = 0,\quad i_3 = 4\sqrt{-n},\quad i_4 = \sqrt{-n},$$

(3) $$\frac{1}{4}(2\sigma_0 + \sigma_{4\sqrt{-n}} + \sigma_{\sqrt{-n}}) = 2\Phi(n).$$

b) $$U \equiv \frac{2\sqrt{-n}\,\omega}{3\sqrt{-n}},\quad s_2 U \equiv \frac{-3\sqrt{-n}}{2\sqrt{-n}\,\omega},\quad s_3 U \equiv \frac{4\sqrt{-n}\,\omega + 2\sqrt{-n}}{-\sqrt{-n}\,\omega + \sqrt{-n}},$$

$$s_4 U \equiv \frac{-\sqrt{-n}\,\omega + \sqrt{-n}}{3\sqrt{-n}\,\omega - 2\sqrt{-n}} \text{ mod. } 7;$$

$$i_1 = 2\sqrt{-n}, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 2\sqrt{-n}, \quad i_4 = 4\sqrt{-n},$$

$$(4) \qquad \tfrac{1}{4}(\sigma_0 + 2\sigma_{2\sqrt{-n}} + \sigma_{4\sqrt{-n}}) = 2\Phi(n).$$

Die Formeln (1), (2), (3), (4) geben combinirt das elegante Resultat:

Ist n quadratischer Nichtrest modulo 7, so ist

$$\sigma_0 = \sigma_{\sqrt{-n}} = \sigma_{2\sqrt{-n}} = \sigma_{4\sqrt{-n}} = 2\Phi(n)$$

oder:

$$\mathrm{V} \quad \begin{cases} 1) \;\; 3\cdot\sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_0^2) = \Phi(n) - 6\,U_{\sqrt{-n}}, \\ 2) \;\; 3\cdot\sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{2\sqrt{-n}}) = \Phi(n) - 3\,U_{2\sqrt{-n}} - 3\,U_{4\sqrt{-n}} \\ \qquad\qquad = \frac{3}{2}\Psi(n) - \frac{1}{2}\Phi(n) + 3\,U_{\sqrt{-n}}, \\ 3) \;\; 4\cdot\sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{\sqrt{-n}}) = \Phi(n), \\ 4) \;\; 4\cdot\sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{4\sqrt{-n}}) = \Phi(n). \end{cases}$$

Ebenso einfach gestaltet sich die Aufstellung der Klassenzahlformeln für den I. Fall (n quadratischer Rest mod. 7).

A) Die Gruppe G_7.

a) $$U \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}} \quad \text{giebt} \quad \underset{\nu=0,1,2\ldots 6}{s_\nu U} \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega + \sqrt{n}\cdot\nu}{\sqrt{n}},$$

also:

$$(1) \qquad \tfrac{1}{7}(\sigma_\infty + 6\sigma'_\infty) = 2\Phi(n);$$

b) $$U = \frac{4\sqrt{n}\,\omega}{2\sqrt{n}} \quad \text{giebt} \quad \underset{\nu=0,1,2\ldots 6}{s_\nu U} = \frac{4\sqrt{n}\,\omega + 2\sqrt{n}\,\nu}{2\sqrt{n}},$$

also:

$$(2) \qquad \sigma_{\sqrt{n}} = 2\Phi(n).$$

B) Die Gruppe G_4' (zu m_4' gehörig).

a) $$U \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}}, \quad s_2 U \equiv \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\omega}, \quad s_3 U \equiv \frac{2\sqrt{n}\,\omega + 3\sqrt{n}}{3\sqrt{n}\,\omega - 2\sqrt{n}},$$

$$s_4 U \equiv \frac{3\sqrt{n}\,\omega - 2\sqrt{n}}{-2\sqrt{n}\,\omega - 3\sqrt{n}} \text{ mod. } 7;$$

$$i_1 = \infty, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 0, \quad i_4 = 0,$$

$$(3) \qquad \tfrac{1}{4}(\sigma_\infty + 3\sigma_0) = 2\Phi(n).$$

b) $$U \equiv \frac{2\sqrt{n}\,\omega}{4\sqrt{n}}, \quad s_2 U \equiv \frac{-4\sqrt{n}}{2\sqrt{n}\,\omega}, \quad s_3 U \equiv \frac{4\sqrt{n}\,\omega - 2\sqrt{n}}{-\sqrt{n}\,\omega - \sqrt{n}},$$

$$s_4 U \equiv \frac{-\sqrt{n}\,\omega - \sqrt{n}}{3\sqrt{n}\,\omega + 2\sqrt{n}} \text{ mod. } 7;$$

$$i_1 = \sqrt{n}, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 4\sqrt{n}, \quad i_4 = \sqrt{n},$$

$$\frac{1}{4}(2\sigma_{\sqrt{n}} + \sigma_0 + \sigma_{4\sqrt{n}}) = 2\Phi(n). \tag{4}$$

Durch die Formeln (1), (2), (3), (4) lassen sich σ'_∞, σ_0, $\sigma_{\sqrt{n}}$, $\sigma_{4\sqrt{n}}$ durch den einzigen Parameter σ_∞ darstellen. Aber σ_∞ selbst lässt sich auf dem eingeschlagenen Wege nicht bestimmen. Dies folgt schon einfach daraus, dass sonst $\mu\sigma_\infty = \nu\Phi(n)$ sein müsste, wo μ, ν 2 feste ganze Zahlen sind; allein eine einfache Controle (an einigen Zahlenbeispielen) zeigt, dass eine solche Gleichung nicht bestehen kann.

Ich habe in den früheren Formeln*) statt σ_∞ den Parameter $\xi(n) = 3 \cdot \sum \mathsf{H}\,\dfrac{4n - \varkappa^2_{2\sqrt{n}}}{49}$ eingeführt. Dann ergeben die 4 Formeln des ersten Falles das Resultat: *Ist n quadratischer Rest modulo 7, so gelten die Formeln:*

$$\text{VIa}\left\{\begin{array}{lll}
1) & 3 \cdot \sum \mathsf{H}\left(\dfrac{4n - \varkappa^2_{2\sqrt{n}}}{49}\right) & = \xi(n), \\
2) & 3 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_0^2) & = \Phi(n) - 14\xi(n) - 6U_{\sqrt{n}}, \\
3) & 3 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{\sqrt{n}}) & = \Phi(n) - 3U_{2\sqrt{n}} - 3U_{4\sqrt{n}} \\
 & & = \dfrac{3}{2}\Psi(n) - \dfrac{1}{2}\Phi(n) + 3U_{\sqrt{n}}, \\
4) & 3 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{2\sqrt{n}}) & = \Phi(n) - 6U_{\sqrt{n}} - 7\xi(n), \\
5) & 6 \cdot \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{4\sqrt{n}}) & = \Phi(n) + 12U_{\sqrt{n}} + 28\xi(n).
\end{array}\right.$$

Es ist jedoch zweckmässiger, statt $\xi(n)$ einen anderen Parameter $\eta(n)$ durch die Gleichung

$$\sigma_\infty = 2\Phi(n) + 3\eta(n)$$

einzuführen, der also zu $\xi(n)$ in der Beziehung steht:

$$112\xi(n) = 2\Phi(n) - 48U_{\sqrt{n}} + 3\eta(n).$$

Dann nehmen die Formeln des ersten Falles die elegante Gestalt an:

$$\text{VIb} \quad \sigma_\infty - 3\eta(n) = \sigma'_\infty + \frac{1}{2}\eta(n) = \sigma_0 + \eta(n) = \sigma_{\sqrt{n}} = \sigma_{4\sqrt{n}} - \eta(n) = 2\Phi(n).$$

Ich habe auf dem Wege der Induction gefunden, dass der Parameter $\eta(n)$ höchst wahrscheinlich die folgende Bedeutung hat**):

*) Münchener Akademie.

**) Vergl. eine Bemerkung von Kronecker, Berliner Monatsberichte 1875, pag. 225 ff., die insofern analog ist, als es sich auch bei ihr um die Summe gewisser complexer Theiler der Zahl n handelt.

Es ist

$$\eta(n) = \sum x_r$$

wo x_r alle quadratischen Nichtreste modulo 7 beschreibt, welche in der Gleichungsform $4n = x_r^2 + 7y_r^2$ auftreten können, wobei die positiven, negativen und Nullwerthe von x_r und y_r mit zu berücksichtigen sind.

Eine grosse Zahl von Controlen hat diese Vermuthung bestätigt. Auch habe ich für specielle Werthsysteme von n die genannte Darstellung nach dem Brill-Cayley'schen Correspondenzprincipe beweisen können. Es ist mir jedoch bislang nicht gelungen, einen allgemeinen Beweis hiefür aufzufinden.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass von den aufgestellten Formeln *nur je* 3 *etwas wesentlich Neues* liefern, da ja die 4 Formeln sich zur Invariantenrelation zusammensetzen.

§ 5.

Klassenzahlrelationen der 11. Stufe.

Die Summen σ schreiben sich hier in folgender Gestalt:

I. n quadratischer Rest mod. 11.

1) $\sigma_\infty = 10.\,11.\,12. \sum \mathsf{H}\left(\frac{4n - \varkappa_{2\sqrt{n}}^2}{121}\right) + 120\, U_{\sqrt{n}}$,

2) $\sigma'_\infty = 11. \sum \left[\mathsf{H}(4n - \varkappa_{2\sqrt{n}}^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n - \varkappa_{2\sqrt{n}}^2}{121}\right)\right] + 10\, U_{\sqrt{n}}$,

3), 4), 5) $\sigma_\alpha = 12. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_\alpha^2)$ für $\alpha = 0, \sqrt{n}, 5\sqrt{n}$,

6) $\sigma_{3\sqrt{n}} = 10. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_{3\sqrt{n}}^2) + 10\, U_{2\sqrt{n}} + 10\, U_{5\sqrt{n}}$,

7) $\sigma_{4\sqrt{n}} = 10. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_{4\sqrt{n}}^2) + 10\, U_{3\sqrt{n}} + 10\, U_{4\sqrt{n}}$,

II. n quadratischer Nichtrest mod. 11.

1) $\sigma_0 = 10. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_0^2) + 20\, U_{\sqrt{-n}}$,

2) $\sigma_{\sqrt{-n}} = 10. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_{\sqrt{-n}}^2) + 10\, U_{3\sqrt{-n}} + 10\, U_{4\sqrt{-n}}$,

3) $\sigma_{4\sqrt{-n}} = 10. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_{4\sqrt{-n}}^2) + 10\, U_{2\sqrt{-n}} + 10\, U_{5\sqrt{-n}}$,

4), 5), 6) $\sigma_\alpha = 12. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_\alpha^2)$ für $\alpha = 2\sqrt{-n}, 3\sqrt{-n}, 5\sqrt{-n}$.

Die auftretenden Zeichen haben dieselbe Bedeutung wie in § 9, nur dass an Stelle der Stufe 7 überall 11 gesetzt werden muss.

Es reicht nach § 3, 3 hier hin, nur eine Gruppe G''_{60} zu studiren. Ich wähle die folgende:

$$\omega' \equiv \frac{\varrho^\nu \omega}{\varrho^{-\nu}}, \quad \frac{-\varrho^\nu}{\varrho^{-\nu}\omega}, \quad \frac{3\varrho^\mu\omega+\varrho^\nu}{\varrho^{-\nu}\omega-3\varrho^{-\mu}}, \quad \frac{-\varrho^\mu\omega+3\varrho^\nu}{3\varrho^{-\nu}\omega+\varrho^{-\mu}} \text{ mod. } 11,$$
$$(\mu=0,1,2,3,4;\ \nu=0,1,2,3,4)$$

wobei $\varrho = -2$ zu setzen ist, so dass $\varrho^5 \equiv 1$ mod. 11 wird.

Nach § 3, 1 braucht man, um alle durch den hierhergehörigen Hauptmodul zu erlangenden Resultate aufzufinden, nur 11 Transformationen U so aufzustellen, dass nicht zwei von ihnen einer Relation $U_\varrho U_\mu^{-1} = s_\nu$ genügen, wo s_ν der betrachteten G''_{60} angehört. Solche Substitutionen sind

1) $U_\nu \equiv \dfrac{\sqrt{n}(\omega+\nu)}{\sqrt{n}}$, wenn n quadratischer Rest von 11,

2) $U_\nu = \dfrac{\sqrt{-n}(\omega+\nu)}{-\sqrt{-n}}$, wenn n quadr. Nichtrest von 11 ist.
$(\nu=0,1,2,\ldots,10)$

Diese Transformationen kann man indess nach § 3, 2 noch weiter einschränken. Es wird nämlich U_ν durch die Substitution $t \equiv \dfrac{\varrho\omega}{\varrho^{-1}}$ der Gruppe G''_{60} in $tU_\nu t^{-1} = U_{\nu\varrho^2}$ transformirt, also geben alle Transformationen U_ν, in denen ν denselben quadratischen Charakter mod. 11 hat, dieselbe Relation und es ist mithin nur nöthig, je 3 Fälle zu studiren:

1) $U_0 = \dfrac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}}, \quad U_1 = \dfrac{\sqrt{n}(\omega+1)}{\sqrt{n}}, \quad U_{-1} = \dfrac{\sqrt{n}(\omega-1)}{\sqrt{n}},$
für n Rest, und

2) $U_0 = \dfrac{\sqrt{-n}\,\omega}{-\sqrt{-n}}, \quad U_1 = \dfrac{\sqrt{-n}(\omega+1)}{-\sqrt{-n}}, \quad U_{-1} = \dfrac{\sqrt{-n}(\omega-1)}{-\sqrt{-n}},$
für n Nichtrest.

I. Fall; n quadratischer Rest mod. 11.

Hier ist besonders die Transformation U_0 einfach zu erledigen. Ist nämlich $s_\nu \equiv \dfrac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ eine Substitution der G''_{60}, so wird

$$s_\nu U_0 \equiv \frac{\alpha\sqrt{n}\,\omega+\beta\sqrt{n}}{\gamma\sqrt{n}\,\omega+\delta\sqrt{n}},$$

also

$$i \equiv \pm(a+d) \equiv \pm(\alpha+\delta)\sqrt{n}.$$

Nun soll s_ν der Gruppe G''_{60} angehören und diese enthält bekanntlich:

Eine Identität, welcher σ_∞ entspricht, 2 Arten von je 12 gleichberechtigten Substitutionen der Periode 5:
$(\alpha+\delta\equiv\varrho+\varrho^{-1}\equiv 3$ bez. $\alpha+\delta\equiv-(\varrho^2+\varrho^{-2})\equiv 4 \bmod. 11)$, 20 gleichberechtigte Substitutionen der Periode 3 $(\alpha+\delta=1)$, 15 gleichberechtigte Substitutionen der Periode 2 $(\alpha+\delta=0)$. Also heisst die entsprechende Relation:

$$\text{(a)}\qquad \frac{1}{60}\left(\sigma_\infty+12\sigma_{3\sqrt{n}}+12\sigma_{4\sqrt{n}}+20\sigma_{\sqrt{n}}+15\sigma_0\right)=2\Phi(n).$$

Sie setzt sich, wenn man die Werthe der σ einsetzt und bemerkt, dass

$$2U_{\sqrt{n}}+2U_{2\sqrt{n}}+2U_{3\sqrt{n}}+2U_{4\sqrt{n}}+2U_{5\sqrt{n}}=\Phi(n)-\Psi(n)$$

ist, in folgende Gestalt:

$$22\sum \mathsf{H}\left(\frac{4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}^2}{121}\right)+3\sum \mathsf{H}(4n-\varkappa_0^2)+4\sum \mathsf{H}(4n-\varkappa_{\sqrt{n}}^2)$$
$$+2\sum \mathsf{H}(4n-\varkappa_{3\sqrt{n}}^2)+2\sum \mathsf{H}(4n-\varkappa_{4\sqrt{n}}^2)=\Phi(n)+\Psi(n)^{*)}.$$

Was die beiden Fälle U_1 und U_{-1} anbelangt, so unterdrücke ich die sehr einfachen Ausführungen und bemerke, dass sie resp. dasselbe Resultat ergeben, nämlich:

$$\text{(b)}\qquad \frac{1}{60}\left(4\sigma_0+9\sigma_{\sqrt{n}}+12\sigma'_\infty+12\sigma_{3\sqrt{n}}+12\sigma_{4\sqrt{n}}+11\sigma_{5\sqrt{n}}\right)=2\Phi(n).$$

Uebrigens sind die beiden Formeln (a) und (b) nicht unabhängig von einander, setzen sich vielmehr linear zur Invariantenrelation $(a)+10\cdot(b)$ zusammen.

Man erhält also hier mit Hilfe der Hauptmoduln nur eine einzige neue Klassenzahlformel. Als solche schreibe ich die Relation $(a)-(b)$ *hin:*

$$11\sigma_0+11\sigma_{\sqrt{n}}+\sigma_\infty-12\sigma'_\infty-11\sigma_{5\sqrt{n}}=0$$

oder:

$$\text{(VII)}\qquad \sum \mathsf{H}(4n-\varkappa_0^2)+\sum \mathsf{H}(4n-\varkappa_{\sqrt{n}}^2)-\sum \mathsf{H}(4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}^2)$$
$$-\sum \mathsf{H}(4n-\varkappa_{5\sqrt{n}}^2)+11\sum \mathsf{H}\,\frac{4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}^2}{121}=0.$$

II. Fall; n quadratischer Nichtrest mod. 11.

Hier liefern U_0 und U_{+1} dieselbe Relation (a), U_{-1} ergiebt die Relation (b):

$$\text{(a)}\ \frac{1}{60}\left(6\sigma_0+12\sigma_{\sqrt{-n}}+15\sigma_{2\sqrt{-n}}+10\sigma_{3\sqrt{-n}}+12\sigma_{4\sqrt{-n}}+5\sigma_{5\sqrt{-n}}\right)$$
$$=2\Phi(n),$$

$$\text{(b)}\ \frac{1}{60}\left(6\sigma_0+12\sigma_{\sqrt{-n}}+4\sigma_{2\sqrt{-n}}+10\sigma_{3\sqrt{-n}}+12\sigma_{4\sqrt{-n}}+16\sigma_{5\sqrt{-n}}\right)$$
$$=2\Phi(n).$$

---

*) Die so geschriebene Relation findet sich für den Fall $n\equiv 1$ mod. 11 bereits in meiner Münchener Note.

Da hier die Combination $6(a) + 5(b)$ die Invariantenrelation ergiebt, *so liefern die Hauptmoduln hier auch wieder nur eine neue Klassenzahlrelation* $(a) - (b)$:

$$\sigma_{2\sqrt{-n}} = \sigma_{5\sqrt{-n}},$$

oder

$$\text{(VIII)} \qquad \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{2\sqrt{-n}}) = \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{5\sqrt{-n}}).$$

Ich bin auch für diese Stufe auf dem Wege der Induction weiter gegangen und habe nachstehende Formeln als wahrscheinlich bestehend gefunden:

I. n quadratischer Rest mod. 11.

$$\text{(IX)} \qquad \begin{cases} 1) \quad \sigma_{3\sqrt{n}} - \sigma_{4\sqrt{n}} = 0, \\ 2) \quad 11\sigma_{3\sqrt{n}} - \sigma_\infty - 10\sigma'_\infty = 0, \\ 2) \quad 11\sigma_0 - 12\sigma'_\infty + \sigma_\infty = 22\varrho(n), \\ 4) \quad \sigma_{5\sqrt{n}} - \sigma_{\sqrt{n}} = 2\varrho(n). \end{cases}$$

Hier bedeutet $\varrho(n)$ die Summe $\sum x_r$, welche über alle positiven und negativen ganzen Zahlen x_r hinzuerstrecken ist, welche quadr. Reste mod. 11 sind und für welche

$$4n = x_r^2 + 11y_r^2 \qquad (x_r, y_r \text{ ganze Zahlen})$$

ist, wobei die positiven, negativen, sowie die Nullwerthe von y_r zu berücksichtigen sind. —

II. n quadratischer Nichtrest mod. 11.

$$\text{(X)} \qquad \sigma_0 = \sigma_{\sqrt{-n}} = \sigma_{4\sqrt{-n}}; \qquad \sigma_{2\sqrt{-n}} = \sigma_{5\sqrt{-n}}.$$

§ 6.

Klassenzahlrelationen der 13. Stufe.

Die Klassenzahlsummen für diese Stufe sind explicite hingeschrieben die nachstehenden:

I. n quadratischer Rest mod. 13.

1) $\sigma_\infty = 12.13.14\cdot \sum \mathsf{H}\,\dfrac{4n - \varkappa^2_{2\sqrt{n}}}{169} + 12 \cdot 14\, U_{\sqrt{n}}$,

2) $\sigma_\infty^{+1} = 26. \sum \mathsf{H}_{+1}(4n - \varkappa^2_{2\sqrt{n}}) + 12\, U_{\sqrt{n}}$,

3) $\sigma_\infty^{-1} = 26. \sum \mathsf{H}_{-1}(4n - \varkappa^2_{2\sqrt{n}}) + 12\, U_{\sqrt{n}}$,

4) $\sigma_0 = 12. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_0^2) + 24\, U_{5\sqrt{n}}$,

5) $\sigma_{\sqrt{n}} = 12. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{\sqrt{n}}) + 12\, U_{3\sqrt{n}} + 12\, U_{4\sqrt{n}}$,

6) $\sigma_{4\sqrt{n}} = 12. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{4\sqrt{n}}) + 12\, U_{6\sqrt{n}} + 12\, U_{2\sqrt{n}}$,

7), 8), 9) $\sigma_\alpha = 14. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_\alpha)$ für $\alpha = 3\sqrt{n},\ 5\sqrt{n},\ 6\sqrt{n}$.

II. n quadratischer Nichtrest mod. 13.

1), 2), 3), 4) $\sigma_\alpha = 14. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_\alpha)$ für $\alpha = 0,\ 2\sqrt{2n},\ 3\sqrt{2n},\ 6\sqrt{2n}$,

5) $\sigma_{\sqrt{2n}} = 12. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{\sqrt{2n}}) + 12\, U_{2\sqrt{2n}} + 12\, U_{3\sqrt{2n}}$,

6) $\sigma_{4\sqrt{2n}} = 12. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{4\sqrt{2n}}) + 12\, U_{5\sqrt{2n}} + 12\, U_{4\sqrt{2n}}$,

7) $\sigma_{5\sqrt{2n}} = 12. \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{5\sqrt{2n}}) + 12\, U_{\sqrt{2n}} + 12\, U_{6\sqrt{2n}}$.

Was die Bedeutung der vorkommenden Grössen anbelangt, so verweise ich im allgemeinen wieder auf § 4 und § 5, und füge hinzu, dass die Summe σ_∞^{+1} bez. σ_∞^{-1} den Congruenzen

$$\omega' \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega + b}{\sqrt{n}}$$

oder

$$\omega' \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega}{c\omega + \sqrt{n}}$$

entspricht, je nachdem b (oder c) quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest mod. 13 ist.

I. Fall; n quadratischer Rest mod. 13.

A) Ich verwende zunächst den Modul m_{26}, als dessen zugehörige Gruppe G'_{26} ich folgende wähle:

$$G'_{26}\Big(\underset{\nu=0,1,2,\ldots,12}{s_\nu \equiv \omega + \nu}, \quad ts_\nu \equiv \frac{5\omega + 5\nu}{-5} \text{ mod. } 13\Big).$$

Die Transformation $U \equiv \dfrac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}}$ liefert:

(a) $$\frac{1}{26}\,(13\sigma_0 + \sigma_\infty + 6\sigma_\infty^{+1} + 6\sigma_\infty^{-1}) = 2\Phi(n).$$

$U \equiv \dfrac{2\sqrt{n}\,\omega}{7\sqrt{n}}$ ergiebt die Formel:

(b) $$\frac{1}{2}\,(\sigma_{\sqrt{n}} + \sigma_{4\sqrt{n}}) = 2\Phi(n).$$

Eine dieser 2 Relationen liefert nach § 3, 1 jede Transformation $U \equiv \dfrac{a\omega + b}{c\omega + d}$, für welche $c \equiv 0$ mod. 13 ist. Ist aber $c \gtrless 0$ mod. 13 so kommt die Relation:

(c) $$\frac{1}{13}(\sigma_0+\sigma_\infty^{+1}+\sigma_\infty^{-1}+2\sigma_{\sqrt{n}}+2\sigma_{3\sqrt{n}}+2\sigma_{4\sqrt{n}}+2\sigma_{5\sqrt{n}}+2\sigma_{6\sqrt{n}}) = 2\Phi(n).$$

B) Der Hauptmodul m_{39} liefert hier ebenfalls neue Relationen. Als zugehörige Gruppe G'_{39} wähle ich die folgende:

$$G'_{39}\left\{ s_\nu \equiv \omega + \nu,\ t s_\nu \equiv \frac{3\omega+3\nu}{-4},\ t^2 s_\nu \equiv \frac{4\omega+4\nu}{-3} \bmod. 13 \right\}.\quad {\scriptstyle \nu=0,1,2,\ldots,12}$$

Zunächst resultirt aus der Transformation $U \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}}$ die Relation:

(d) $$\frac{1}{39}(26\,\sigma_{\sqrt{n}} + \sigma_\infty + 6\sigma_\infty^{+1} + 6\sigma_\infty^{-1}) = 2\Phi(n).$$

Ferner ergiebt $U \equiv \frac{5\sqrt{n}\,\omega}{-5\sqrt{n}}$ das Resultat:

(e) $$\frac{1}{3}(2\sigma_{4\sqrt{n}} + \sigma_0) = 2\Phi(n).$$

Wird weiterhin eine Transformation $U \equiv \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$ angewendet, für welche die Grösse c quadratischer Rest mod. 13 ist, so kommt die Gleichung:

(f) $$\frac{1}{13}(\sigma_0 + 2\sigma_\infty^{+1} + 2\sigma_{\sqrt{n}} + 2\sigma_{3\sqrt{n}} + 2\sigma_{4\sqrt{n}} + 2\sigma_{5\sqrt{n}} + 2\sigma_{6\sqrt{n}}) = 2\Phi(n).$$

Ist aber in U die Grösse c quadratischer Nichtrest mod. 13, so kommt die Relation:

(g) $$\frac{1}{13}(\sigma_0 + 2\sigma_\infty^{-1} + 2\sigma_{\sqrt{n}} + 2\sigma_{3\sqrt{n}} + 2\sigma_{4\sqrt{n}} + 2\sigma_{5\sqrt{n}} + 2\sigma_{6\sqrt{n}}) = 2\Phi(n).$$

Diese Formeln sind natürlich nicht von einander unabhängig. Zunächst folgt aus (f) und (g) *die Klassenzahlrelation*

$$\sigma_\infty^{+1} = \sigma_\infty^{-1},$$

und hieraus auch für die 13. *Stufe wieder die Fundamentalrelation*

$$\mathsf{H}_{+1}(m) = \mathsf{H}_{-1}(m).$$

Dadurch werden die Formeln (f), (g), (c) identisch.

Ferner erkennt man, dass die Formel (d) eine lineare Combination der Relationen (a), (b), (e) nämlich

$$(d) = \frac{2}{3}(a) + \frac{4}{3}(b) - (e)$$

ist, und dass die Combination

$$\frac{13}{14}(c) + \frac{1}{42}(a) + \frac{1}{21}(b)$$

die Invariantenrelation ergiebt. *Man erhält also ausser der Funda-*

mentalrelation noch 3 wesentlich neue Resultate für den Fall, dass n quadratischer Rest von 13 ist, nämlich:

$$\text{(XI a)}\quad\begin{cases}(1) & \frac{1}{2}(\sigma_{\sqrt{n}}+\sigma_{4\sqrt{n}})=2\Phi(n),\\ (2) & \frac{1}{3}(\sigma_0+2\sigma_{4\sqrt{n}})=2\Phi(n),\\ (3) & \frac{1}{26}(13\sigma_0+12\sigma_\infty^{+1}+\sigma_\infty)=2\Phi(n),\end{cases}$$

oder, wenn man bemerkt, dass:

$$\mathsf{H}(m)=\mathsf{H}_{+1}(m)+\mathsf{H}_{-1}(m)+\mathsf{H}\left(\frac{m}{169}\right)$$

ist (wobei $m\equiv 0$ mod. 13 *angenommen ist*):

$$\text{(XI b)}\quad\begin{cases}(1) & 3\sum\mathsf{H}(4n-\varkappa^2_{\sqrt{n}})+3\sum\mathsf{H}(4n-\varkappa^2_{4\sqrt{n}})\\ & \quad=\Phi(n)-3\,U_{2\sqrt{n}}-3\,U_{3\sqrt{n}}-3\,U_{4\sqrt{n}}-3\,U_{6\sqrt{n}}\\ & \quad=\frac{3}{2}\Psi(n)-\frac{1}{2}\Phi(n)+3\,U_{\sqrt{n}}+3\,U_{5\sqrt{n}},\\ (2) & 2\sum\mathsf{H}(4n-\varkappa_0^2)+4\sum\mathsf{H}(4n-\varkappa^2_{4\sqrt{n}})\\ & \quad=\Phi(n)-4\,U_{2\sqrt{n}}-4\,U_{5\sqrt{n}}-4\,U_{6\sqrt{n}},\\ (3) & 3\sum\mathsf{H}(4n-\varkappa_0^2)+3\sum\mathsf{H}(4n-\varkappa^2_{2\sqrt{n}})\\ & \quad+39\sum\mathsf{H}\,\frac{4n-\varkappa^2_{2\sqrt{n}}}{169}=\Phi(n)-6\,U_{\sqrt{n}}-6\,U_{5\sqrt{n}}.\end{cases}$$

II. Fall; n quadratischer Nichtrest mod. 13.

Wir verwenden zunächst wieder die Gruppe G'_{26}, welche zum Modul m_{26} gehört.

Die Transformation $U\equiv\frac{\sqrt{2n}\,\omega}{7\sqrt{2n}}$ giebt die Formel:

$$\text{(a)}\qquad \frac{1}{2}(\sigma_{4\sqrt{2n}}+\sigma_{5\sqrt{2n}})=2\Phi(n).$$

Ferner liefert $U\equiv\frac{2\sqrt{2n}\,\omega}{-3\sqrt{2n}}$ das elegante Resultat:

$$\text{(b)}\qquad \sigma_{\sqrt{2n}}=2\Phi(n).$$

Jede Transformation U, für welche $c\equiv 0$ mod. 13 ist, liefert eine der beiden Formeln (a), (b). Hingegen liefert ein durch 13 nicht theilbares c die Relation:

$$\text{(c)}\quad \frac{1}{13}(\sigma_0+2\sigma_{\sqrt{2n}}+2\sigma_{2\sqrt{2n}}+2\sigma_{3\sqrt{2n}}+2\sigma_{4\sqrt{2n}}+2\sigma_{5\sqrt{2n}}+2\sigma_{6\sqrt{2n}})=2\Phi(n).$$

Leicht überzeugt man sich, dass die Gruppe G'_{39} nur die Formeln $\frac{}{3}(a) + \frac{1}{3}(b)$ und (c), also nichts neues liefert.

Da die Combination

$$\frac{13}{14}(c) + \frac{1}{21}(a) + \frac{1}{42}(b)$$

die Invariantenrelation ergiebt, *so hat man für den Fall, dass n quadratischer Nichtrest mod.* 13 *ist, zwei neue unabhängige Formeln:*

$$(\text{XII a}) \quad \begin{cases} (1) \quad \sigma_{\sqrt{2n}} = 2\Phi(n), \\ (2) \quad \frac{1}{2}(\sigma_{4\sqrt{2n}} + \sigma_{5\sqrt{2n}}) = 2\Phi(n), \end{cases}$$

oder:

$$(\text{XII b}) \begin{cases} (1) \quad 6\sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{\sqrt{2n}}) = \Phi(n) - 6\,U_{2\sqrt{2n}} - 6\,U_{3\sqrt{2n}}, \\ (2) \quad 3\sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{4\sqrt{2n}}) + 3\sum \mathsf{H}(4n - \varkappa^2_{5\sqrt{2n}}) \\ \qquad = \Phi(n) - 3\,U_{\sqrt{2n}} - 3\,U_{4\sqrt{2n}} - 3\,U_{5\sqrt{2n}} - 3\,U_{6\sqrt{2n}} \\ \qquad = \frac{3}{2}\Psi(n) - \frac{1}{2}\Phi(n) + 3\,U_{2\sqrt{2n}} + 3\,U_{3\sqrt{2n}}. \end{cases}$$

Setzt man speciell in Formel (1) $n \equiv 5$ mod. 13 voraus, so geht dieselbe in die von mir in meiner Münchener Note angegebene Formel der dreizehnten Stufe über. —

Zum Schlusse will ich noch die vorstehende Formel (1) an einem Beispiele erproben. Sei $n = 249 \equiv 2$ mod. 13, dann wird die Formel (1): $6\sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_2^2) = \Phi(n) - 6\,U_4 - 6\,U_6$. Hier sind dem $\varkappa_2$ die Werthe: 2, 11, 15, 24, 28 beizulegen. Dann kommt linker Hand die Summe $6 \cdot [\mathsf{H}(992) + \mathsf{H}(875) + \mathsf{H}(771) + \mathsf{H}(420) + \mathsf{H}(212)] = 6 \cdot [24 + 12 + 6 + 8 + 6] = 336$. Nun hat n die Theiler 1, 3, 83, 249.

Also ist $\Phi(n) = 1 + 3 + 83 + 249 = 336$ und $U_4 = U_6 = 0$, was richtig ist.

Bamberg, den 1. Februar 1883.

Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser transcendenter Functionen.

Von

Adolf Hurwitz in Göttingen.

Die Exponentialfunction, welche sich durch die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dz} = y$$

definiren lässt, besitzt merkwürdige arithmetische Eigenschaften, deren Untersuchung in den bekannten Arbeiten von Hermite*) begonnen und neuerdings von Herrn Lindemann**) mit grossem Erfolge weitergeführt worden ist.

Es existiren nun, wie ich gefunden habe, unter den homogenen linearen Differentialgleichungen aller Ordnungen solche, deren Integrale ähnliche arithmetische Eigenschaften zeigen, wie die Exponentialfunction. In dieser vorläufigen Mittheilung will ich mich auf Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung beschränken. Hier sind es die Gleichungen von der Form

$$azy'' = by' + y,$$

deren Integrale (als Functionen der unabhängigen Variabeln z) in dem angegebenen Sinne der Exponentialfunction an die Seite zu stellen sind. Die Constanten a und b bezeichnen dabei irgend welche ganze Zahlen; nur der Werth $a = 0$ sei ausgeschlossen.

Den nachfolgenden Untersuchungen würde man auch die etwas allgemeinere Gleichung

$$(az + c)\,y'' = by' + y$$

zu Grunde legen können. Jedoch geht dieselbe durch die Substitution

$$az + c = z_1$$

in eine Gleichung der ersten Form über, so dass die Verallgemeinerung nur eine scheinbare ist.

---

*) Siehe namentlich: „Sur la fonction exponentielle". Par M. Ch. Hermite, Paris 1874.

**) Mathem. Annalen Bd. XX pag. 213: „Ueber die Zahl π".

I.

Hülfssätze.

Der Gang meiner Untersuchung ist demjenigen ganz analog, welchen Herr Weierstrass zu einem neuen und überaus einfachen Beweise für die Transcendenz von e und π eingeschlagen hat*).

Versteht man unter y irgend ein Integral der Gleichung

$$azy'' = by' + y, \tag{1}$$

unter $g(z)$ und $h(z)$ irgend zwei ganze rationale Functionen von z, so lassen sich immer zwei andere ganze rationale Functionen von z: $g_1(z)$ und $h_1(z)$ bestimmen, der Art, dass identisch

$$g(z)\,y + h(z)y' = \frac{d}{dz}\left\{g_1(z)\,y + h_1(z)\,y'\right\} \tag{2}$$

ist. Man findet nämlich für das Bestehen dieser Identität die Bedingungsgleichungen:

$$g_1'(z) + \frac{h_1(z)}{az} = g(z),$$

$$g_1(z) + h_1'(z) + b\,\frac{h_1(z)}{az} = h(z),$$

und diese Gleichungen können ersetzt werden durch die folgenden:

$$\left\{\begin{aligned} g_1(z)-(a+b)g_1'(z)-azg_1''(z) &= h(z)-(a+b)g(z)-azg'(z),\\ h_1(z) &= az(g(z)-g_1'(z)). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Man erkennt nun sofort, dass sich die Coefficienten der Functionen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ ganz und ganzzahlig aus denen von $g(z)$ und $h(z)$ zusammensetzen. In Bezug auf die Grade der betrachteten Functionen ist Folgendes zu bemerken. Man verstehe unter dem Zeichen

$$[g|h]$$

den Grad s der Function $g(z)$ oder den Grad s' der Function $h(z)$, jenachdem $s \geqq s'$ oder $s < s'$ ist. Die analoge Bezeichnung werde für irgend zwei ganze Functionen von z angewandt. Genügt nun die Zahl r der Bedingung

$$r \geqq [g|h],$$

so ist

$$r + 1 \geqq [g_1|h_1],$$

wie aus den für die Functionen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ geltenden Bestimmungsgleichungen (3) hervorgeht.

---

*) Herr Weierstrass hat seinen Beweis (Winter 1882/83) im mathematischen Seminar zu Berlin vorgetragen und wird denselben demnächst im Druck erscheinen lassen.

Die Identität (2) benutze man jetzt zur Reduction des Integrales

$$\int \frac{[f(z)]^m}{m!}\{g(z)\,y+h(z)\,y'\}\,dz,$$

wo $f(z)$ eine ganze Function von z vom Grade $n+1$ bedeutet. Es ergiebt sich successive:

$$\int \frac{[f(z)]^m}{m!}\{g(z)y+h(z)y'\}\,dz$$
$$=\{g_1(z)\,y+h_1(z)\,y'\}\frac{[f(z)]^m}{m!}+\int \frac{[f(z)]^{m-1}}{(m-1)!}\{-f'(z)g_1(z)y-f'(z)h_1(z)y'\}\,dz,$$

$$\int \frac{[f(z)]^{m-1}}{(m-1)!}\{-f'(z)g_1(z)y-f'(z)h_1(z)\,dz\,y'\}$$
$$=\{g_2(z)y+h_2(z)y'\}\frac{[f(z)]^{m-1}}{(m-1)!}+\int \frac{[f(z)]^{m-2}}{(m-2)!}\{-f'(z)g_2(z)y-f'(z)h_2(z)y'\}\,dz,$$

. . . .

. . . .

$$\int f(z)\{-f'(z)g_{m-1}(z)y-f'(z)h_{m-1}(z)y'\}\,dz$$
$$=\{g_m(z)\,y+h_m(z)y'\}\,f(z)+g_{m+1}(z)\,y+h_{m+1}(z)\,y'.$$

Hierbei hängen die Functionen

$$g_{k+1}(z) \quad \text{und} \quad h_{k+1}(z) \qquad (k=1,2,\cdots,m)$$

ebenso von den Functionen

$$-f'(z)\,g_k(z) \quad \text{und} \quad -f'(z)\,h_k(z)$$

ab, wie $g_1(z)$ und $h_1(z)$ von $g(z)$ und $h(z)$.

Fasst man die obigen Reductionsformeln zusammen, so erhält man:

$$(4)\qquad \int \frac{[f(z)]^m}{m!}\{g(z)y+h(z)y'\}\,dz=f(z)\{\overline{G}_m(z)\,y+\overline{H}_m(z)\,y'\}$$
$$+\,g_{m+1}(z)\,y+h_{m+1}(z)\,y'.$$

Die Coefficienten der ganzen Functionen $g_{m+1}(z)$ und $h_{m+1}(z)$ setzen sich ganz und ganzzahlig aus den Coefficienten von $g(z)$, $h(z)$ und $f(z)$ zusammen. $\overline{G}_m(z)$ und $\overline{H}_m(z)$ sind ganze Functionen von z, auf deren nähere Beschaffenheit wir nicht einzugehen brauchen.

Es werde nun die Voraussetzung eingeführt, dass keine der beiden Functionen $g(z)$ und $h(z)$ von höherem als dem n^{ten} Grade ist, dass also

$$n \geqq [g\,|\,h].$$

Dann folgt successive:

$$n+1 \geqq [g_1 | h_1],$$

$$2n+1 \geqq [-g_1 f' \mid -h_1 f'], \qquad 2n+2 \geqq [g_2 | h_2],$$

$$3n+2 \geqq [-g_2 f' \mid -h_2 f'], \qquad 3n+3 \geqq [g_3 | h_3],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots, \qquad (m+1)(n+1) \geqq [g_{m+1} | h_{m+1}].$$

Da hiernach die Grade der Functionen $g_{m+1}(z)$ und $h_{m+1}(z)$ die Zahl

$$(m+1)(n+1)$$

und, a fortiori, die Zahl

$$m(n+2)+n$$

nicht übersteigen, so kann man zwei andere ganze Functionen

$$g(z, m) \quad \text{und} \quad h(z, m)$$

finden, deren Coefficienten sich ganz und ganzzahlig aus den Coefficienten von $g(z)$, $h(z)$ und $f(z)$ zusammensetzen, deren Grad nicht grösser als n ist und welche der Bedingung genügen, dass

$$A^{m(n+2)} g_{m+1}(z) - g(z, m) \quad \text{und} \quad A^{m(n+2)} h_{m+1}(z) - h(z, m)$$

durch $f(z)$ theilbare Functionen sind. Unter A ist dabei der Coefficient der höchsten Potenz in $f(z)$ verstanden. Führt man an Stelle von $g_{m+1}(z)$ und $h_{m+1}(z)$ die Functionen $g(z, m)$ und $h(z, m)$ in die Gleichung (4) ein, so ergiebt sich:

$$\int \frac{[A^{n+2} f(z)]^m}{m!} \left\{ g(z) y + h(z) y' \right\} dz = f(z) \left\{ G(z,m) y + H(z,m) y' \right\} + g(z,m) y + h(z,m) y',$$

wobei $G(z, m)$ und $H(z, m)$ ganze Functionen von z sind. Der vollständige Inhalt der vorstehenden Formel lässt sich folgendermassen aussprechen.

Satz 1: *„Man verstehe unter y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung*

$$azy'' = by' + y;$$

ferner sei $f(z)$ eine ganze Function von z vom Grade $n+1$ und A der Coefficient von z^{n+1} in $f(z)$.

Dann bestehen, für $\lambda = 0, 1, 2, \cdots, n$, die folgenden identischen Relationen:

$$(5) \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{[A^{n+2} f(z)]^m}{m!} z^\lambda y \, dz = f(z) \left\{ G_\lambda(z,m) \cdot y + H_\lambda(z,m) y' \right\} \\ \qquad\qquad + g_\lambda(z,m) y + h_\lambda(z,m) y', \\ \displaystyle\int \frac{[A^{n+2} f(z)]^m}{m!} z^\lambda y' \, dz = f(z) \left\{ G_{n+1+\lambda}(z,m) y + H_{n+1+\lambda}(z,m) y' \right\} \\ \qquad\qquad + g_{n+1+\lambda}(z,m) y + h_{n+1+\lambda}(z,m) y'. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten, für $k = 0, 1, 2, \cdots, 2n+1$,

$$G_k(z, m) \quad \text{und} \quad H_k(z, m)$$

ganze rationale Functionen von z; *ferner*

$$g_k(z, m) \quad \text{und} \quad h_k(z, m)$$

ganze Functionen von z *von nicht höherem als dem* n^{ten} *Grade, deren Coefficienten sich ganz und ganzzahlig aus den Coefficienten von* $f(z)$ *zusammensetzen.*"

Für die beabsichtigten Anwendungen des vorstehenden Satzes ist es erforderlich die Frage zu erledigen, ob die beiden in Beziehung auf z identischen Gleichungen

$$c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \cdots + c_{2n+1} g_{2n+1}(z, m) = 0,$$
$$c_0 h_0(z, m) + c_1 h_1(z, m) + \cdots + c_{2n+1} h_{2n+1}(z, m) = 0$$

bestehen können, ohne dass die Coefficienten c sämmtlich verschwinden. Diese Untersuchung soll jedoch nur unter der Voraussetzung angestellt werden, dass $f(z)$ und $f'(z)$ keinen gemeinsamen Theiler haben.

Aus der Annahme, dass die angegebenen Gleichungen stattfinden, ergiebt sich:

$$\int \frac{[A^{n+2} f(z)]^m}{m!} \left\{ y \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda z^\lambda + y' \sum_{\lambda=0}^{n} c_{n+1+\lambda} z^\lambda \right\} dz$$
$$= f(z) \left\{ \overline{G}(z)\, y + \overline{H}(z)\, y' \right\},$$

oder

$$(6) \quad f(z)^m \varphi(z)\, y + f(z)^m \psi(z)\, y' = \frac{d}{dz} \left\{ f(z)^\mu G(z)\, y + f(z)^\nu H(z)\, y' \right\},$$

wobei

$$\frac{A^{m(n+2)}}{m!} \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda z^\lambda \qquad = \varphi(z),$$

$$\frac{A^{m(n+2)}}{m!} \sum_{\lambda=0}^{n} c_{n+1+\lambda} z^\lambda = \psi(z),$$

$$f(z)\, \overline{G}(z) = f(z)^\mu\, G(z),$$
$$f(z)\, \overline{H}(z) = f(z)^\nu\, H(z),$$

gesetzt ist.

Die ganzen Zahlen μ und ν sind ≥ 1 und die Functionen $G(z)$ und $H(z)$ dürfen, falls sie nicht identisch verschwinden, als durch $f(z)$ nicht theilbar vorausgesetzt werden.

Da, wie weiter unten gezeigt werden wird, $\frac{y'}{y}$ nicht einer rationalen Function von z gleich sein kann, so folgt aus (6):

$$f(z)^m\,\varphi(z) = \frac{d}{dz}\{f(z)^\mu\,G(z)\} + f(z)^\nu\,\frac{H(z)}{az},$$

$$f(z)^m\,\psi(z) = f(z)^\mu\,G(z) + \frac{d}{dz}\{f(z)^\nu\,H(z)\} + b\,f(z)^\nu\,\frac{H(z)}{az}.$$

Hier besitzen die Functionen linker Hand höchstens den Grad $m(n+1)+n$; bezeichnen wir daher mit α den Grad von $G(z)$, mit β den Grad von $H(z)$, so ist

$$(7)\qquad \begin{cases} (m+1)(n+1) \geqq \mu(n+1)+\alpha, \\ (m+1)(n+1) \geqq \nu(n+1)+\beta. \end{cases}$$

In der That ist die Gleichung (6) von derselben Form wie (2) und es lässt sich daher hier die über die Zahlen $[g|h]$ und $[g_1|h_1]$ auf pag. 212 gemachte Bemerkung anwenden.

Wir unterscheiden nun verschiedene Fälle:

1) $G(z)$ und $H(z)$ verschwinden identisch. Dann würden auch $\varphi(z)$ und $\psi(z)$, also sämmtliche Coefficienten c gleich Null sein.

2) $H(z)$ verschwinde identisch. Dann folgt:

$$f(z)^m\varphi(z) = f(z)^\mu G'(z) + \mu f(z)^{\mu-1} f'(z)\,G(z),$$
$$f(z)^m\psi(z) = f(z)^\mu G(z).$$

Daher müsste $\mu = m$ und folglich $f'(z)G(z)$, also auch $G(z)$ durch $f(z)$ theilbar sein, gegen die Voraussetzung.

3) $G(z)$ verschwinde identisch. So ergiebt sich:

$$f(z)^m\varphi(z) = f(z)^\nu\,\frac{H(z)}{az},$$
$$f(z)^m\psi(z) = f(z)^\nu H'(z) + \nu f(z)^{\nu-1} f'(z)\,H(z) + b f(z)^\nu\,\frac{H(z)}{az}.$$

Ist nun $f(z)$ nicht durch z theilbar, so muss $\frac{H(z)}{z}$ eine ganze Function, daher $\nu = m$ und folglich $f'(z)\,H(z)$, also auch $H(z)$ durch $f(z)$ theilbar sein, gegen die Annahme.

Ist aber $f(z)$ durch z theilbar, so folgt aus

$$f(z)^m(\psi(z) - b\varphi(z)) = f(z)^{\nu-1}(f(z)\,H'(z) + \nu f'(z)\,H(z)),$$

dass $\nu = m+1$ und $H(z) = a\cdot C$ sein muss, wo C eine Constante bedeutet. Weiter ergiebt sich dann:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}\,C,$$
$$\psi(z) = (m+1)\,f'(z)\,aC + b\,\frac{f(z)}{z}\,C.$$

Da die Grössen c, wenn überhaupt, nur bis auf einen Factor bestimmt werden können, so ist es gleichgültig, welchen Werth die Constante C erhält. Daher können wir sagen:

Unter der Voraussetzung, dass $f(z)$ durch z theilbar ist, existirt eine durch die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda z^\lambda = \frac{f(z)}{z},$$

$$\sum_{\lambda=0}^{n} c_{n+1+\lambda} z^\lambda = (m+1)\, a f'(z) + b\, \frac{f(z)}{z}$$

bestimmte Relation.

4) Es sei keine der beiden Functionen $G(z)$ und $H(z)$ identisch Null. Dann haben wir die Gleichungen:

$$f(z)^{m-\mu+1}\varphi(z) = f(z)G'(z) + \mu f'(z)G(z) + f(z)^{\nu-\mu+1}\frac{H(z)}{az},$$

$$f(z)^{m-\nu+1}\psi(z) = f(z)^{\mu-\nu+1}G(z) + f(z)H'(z) + \nu f'(z)H(z) + bf(z)\frac{H(z)}{az}.$$

Die Zahlen μ und ν können, wegen 7, nicht grösser als $m+1$ sein. Ist nun $\mu < \nu$, so ist $\mu < m+1$ und es folgt aus der ersten der vorstehenden Gleichungen, dass $G(z)$ durch $f(z)$ theilbar ist. Wenn zweitens $\nu < \mu$, so ergiebt sich aus der ersten Gleichung, dass $\frac{H(z)}{az}$ eine ganze Function und darauf aus der zweiten Gleichung, dass $H(z)$ durch $f(z)$ theilbar ist. Ist endlich $\mu = \nu$, so hat man:

$$f(z)^{m-\mu+1}\varphi(z) = f(z)\cdot G'(z) + \mu f'(z)G(z) + f(z)\,\frac{H(z)}{az},$$

$$f(z)^{m-\mu+1}\psi(z) = f(z)G(z) + f(z)H'(z) + \mu f'(z)H(z) + \frac{b}{a}f(z)\,\frac{H(z)}{z}.$$

Unter der Voraussetzung dass $f(z)$ nicht durch z theilbar ist, muss $H(z)$ durch z theilbar, daher der Grad β von $H(z) \geq 1$ und folglich, wegen (7), $\mu < m+1$ sein. Aus der ersten Gleichung würde dann folgen, dass $G(z)$ durch $f(z)$ theilbar ist.

Wenn $f(z)$ durch z theilbar ist, so kann μ nicht $= m+1$ sein, da sonst aus (7) $\alpha = \beta = 0$ und hierauf $G(z)$ identisch gleich Null folgen würde. Ist aber $\mu < m+1$, so kann $H(z)$ nicht durch z theilbar sein. Nun ist $\left\{\mu f'(z) + \frac{b}{a}\frac{f(z)}{z}\right\} H(z)$ durch $f(z)$, also $\mu f'(z) + \frac{b}{a}\frac{f(z)}{z}$ durch z theilbar. Bezeichnet daher a_n den Coefficienten von z in $f(z)$, so muss

$$\left(\mu + \frac{b}{a}\right)\cdot a_n = 0,$$

oder, da a_n von Null verschieden ist,

$$\frac{b}{a} = -\mu \text{ (einer negativen ganzen Zahl)}$$

sein. — Als Resultat dieser Untersuchung folgt:

Satz 2. *„Unter Beibehaltung der im Satze 1 verwendeten Bezeichnungen und unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln der Gleichung*

$$f(z) = 0$$

von einander und von Null verschieden sind, können die beiden Gleichungen

$$c_0 g_0(z,m) + c_1 g_1(z,m) + \cdots + c_{2n+1} g_{2n+1}(z,m) = 0,$$
$$c_0 h_0(z,m) + c_1 h_1(z,m) + \cdots + c_{2n+1} h_{2n+1}(z,m) = 0$$

nur dann für jeden Werth von z bestehen, wenn

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_{2n+1} = 0$$

ist. Oder auch:

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die aus den Coefficienten der Functionen

$$g_k(z, m), \quad h_k(z, m); \quad k = 0, 1, 2, \cdots, 2n+1,$$

gebildete Determinante von Null verschieden.“

Satz 2ª: *„Wenn zwar $z=0$ eine Wurzel von $f(z)=0$ ist, übrigens aber, wie vorhin, die Wurzeln dieser Gleichung von einander verschieden sind, so giebt es, falls $\frac{b}{a}$ keine ganze negative Zahl ist, ein und nur ein System der Verhältnisse $c_0 : c_1 : \cdots : c_{2n+1}$, für welches die fraglichen Gleichungen bestehen, ohne dass die Grössen c sämmtlich Null sind.“*

Im Folgenden wird nur der Satz 2. zur Anwendung gelangen; der Satz 2ª wurde der Vollständigkeit halber hinzugefügt.

II.

Anwendung der im Vorstehenden entwickelten Sätze.

Es bezeichne $F(z \mid a,b)$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$azy'' = by' + y,$$

so findet man leicht

$$F(rz \mid ra, rb) = F(z \mid a, b),$$

wenn r eine beliebige Constante bedeutet.

Wir können daher, unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass a positiv ist, sowie dass a und b theilerfremd sind. Ausserdem werde aber die Voraussetzung eingeführt, dass auch b eine *positive* ganze Zahl ist. Wir betrachten also von jetzt an die Gleichung:

$$(1) \qquad azy'' = by' + y,$$

wo *a und b positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten.*

Das allgemeine Integral dieser Gleichung setzt sich, für $a > 1$, aus den beiden particulären Integralen $\tau(z|a, b)$ und $t(z|a, b)$ zusammen:

$$\tau(z\,|\,a,b) = 1 - \frac{1}{b}z + \frac{1}{b(b-a)}\frac{z^2}{2!} - \frac{1}{b(b-a)(b-2a)}\frac{z^3}{3!} - + \cdots,$$

$$(2) \qquad t(z\,|\,a,b) = z^{1+\frac{b}{a}}\left\{1 + \frac{1}{b+2a}z + \frac{1}{(b+2a)(b+3a)}\frac{z^2}{2!} + \frac{1}{(b+2a)(b+3a)(b+4a)}\frac{z^3}{3!} + \cdots\right\}.$$

Für $a = 1$ wird die Reihe $\tau(z)$*) sinnlos und muss durch ein Integral der Gestalt $\tau_1(z) + t(z)\cdot\log(z)$ ersetzt werden.**) Wir brauchen hierauf nicht näher einzugehen, da die weitere Untersuchung nur an das in allen Fällen existirende Integral $t(z)$ anknüpft.

Die Function $t(z)$ ist bis auf den Factor $z^{1+\frac{b}{a}}$ eine transcendente ganze Function; sie ist daher durch die Gleichung (2) für jeden Werth von z definirt und besitzt a Zweige, welche an den Stellen $z = 0$ und $z = \infty$ zusammenhängen. Für die erstere Stelle verschwindet sowohl $t(z)$ wie ihre erste Ableitung

$$(3) \qquad t'(z\,|\,a,b) = \frac{a+b}{a}z^{\frac{b}{a}}\left\{1 + \frac{1}{b+a}z + \frac{1}{(b+a)(b+2a)}\frac{z^2}{2!} + \frac{1}{(b+a)(b+2a)(b+3a)}\frac{z^3}{3!} + \cdots\right\}.$$

Bezeichnet daher z_i irgend eine Wurzel der Gleichung

$$f(z) = 0,$$

so folgen aus dem Satze 1 in Nr. I die nachstehenden Formeln:

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} g_\lambda(z_i,m)\,t(z_i) + h_\lambda(z_i,m)\,t'(z_i) &= \int_0^{z_i}\frac{[A^{n+2}f(z)]^m}{m!}\,z^\lambda t(z)\,dz,\\ g_{n+1+\lambda}(z_i,m)\,t(z_i) + h_{n+1+\lambda}(z_i,m)\,t'(z_i) &= \int_0^{z_i}\frac{[A^{n+2}f(z)]^m}{m!}\,z^\lambda t'(z)\,dz,\\ \lambda &= 0, 1, 2, \cdots n. \end{aligned}\right.$$

Die hier vorkommenden Integrationen sind längs eines beliebigen die Grenzen 0 und z_i verbindenden Weges von endlicher Länge aus-

*) Die Argumente a und b sollen in der Bezeichnung der Functionen $\tau(z|a,b)$ und $t(z|a,b)$ fortgelassen werden, wenn dadurch kein Missverständniss entstehen kann.

**) Siehe die Abhandlung von Fuchs im 66. Bde. von Crelle-Borchardt's Journal: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten."

zuführen; ferner gehören die in der einzelnen Formel auftretenden Werthe von $t(z)$ (und $t'(z)$) sämmtlich ein und demselben Zweige dieser Function an.

Es sei nun zuerst:

$$f(z) = rz - s,$$

wo r und s von Null verschiedene reelle oder complexe ganze Zahlen bedeuten, so lauten für diesen Fall die Gleichungen (4):

$$(4a)\quad \begin{cases} g_0\left(\frac{s}{r}, m\right) t\left(\frac{s}{r}\right) + h_0\left(\frac{s}{r}, m\right) t'\left(\frac{s}{r}\right) = \int\limits_0^{\frac{s}{r}} \frac{[r^2(rz-s)]^m}{m!}\, t(z)\, dz, \\[2ex] g_1\left(\frac{s}{r}, m\right) t\left(\frac{s}{r}\right) + h_1\left(\frac{s}{r}, m\right) t'\left(\frac{s}{r}\right) = \int\limits_0^{\frac{s}{r}} \frac{[r^2(rz-s)]^m}{m!}\, t'(z)\, dz. \end{cases}$$

Hier sind die Grössen

$$g_0\left(\frac{s}{r}, m\right), h_0\left(\frac{s}{r}, m\right), g_1\left(\frac{s}{r}, m\right), h_1\left(\frac{s}{r}, m\right)$$

nach Satz 1. reelle oder complexe ganze Zahlen, welche nach Satz 2. die Eigenschaft haben, dass die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} g_0\left(\frac{s}{r}, m\right), h_0\left(\frac{s}{r}, m\right) \\ g_1\left(\frac{s}{r}, m\right), h_1\left(\frac{s}{r}, m\right) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Man bemerke ferner, dass die rechten und folglich auch die linken Seiten der Gleichungen (4a) Grössen vorstellen, welche dem absoluten Betrage nach unter alle Grenzen sinken, wenn die ganze Zahl m über alle Grenzen wächst.

Dieses vorausgeschickt, lässt sich zuvörderst zeigen, dass $t\left(\frac{s}{r}\right)$ nicht gleich Null sein kann. Da nämlich, wenn $t\left(\frac{s}{r}\right) = 0$ ist $t'\left(\frac{s}{r}\right)$ nothwendig von Null verschieden ist, so müssen die Grössen

$$h_0\left(\frac{s}{r}, m\right) \quad \text{und} \quad h_1\left(\frac{s}{r}, m\right),$$

da sie reelle oder complexe ganze Zahlen sind und mit $\frac{1}{m}$ unendlich klein werden, für hinreichend grosse Werthe von m verschwinden. Daher führt die Annahme $t\left(\frac{s}{r}\right) = 0$ auf die dem Obigen widersprechende Folgerung, dass für genügend grosse Werthe von m $D = 0$ ist.

Wenn nun $\dfrac{t'\left(\frac{s}{r}\right)}{t\left(\frac{s}{r}\right)}$ einer endlichen rationalen reellen oder com-

plexen Zahl $\frac{P}{Q}$ gleich wäre, so würde folgen, dass die ganzen Zahlen

$$g_0\left(\frac{s}{r}, m\right) \cdot Q + h_0\left(\frac{s}{r}, m\right) \cdot P,$$
$$g_1\left(\frac{s}{r}, m\right) \cdot Q + h_1\left(\frac{s}{r}, m\right) \cdot P$$

für grosse Werthe von m (da sie dem absoluten Betrage nach beliebig klein werden) verschwinden. Daher müsste für solche Werthe von m die Determinante D gleich Null sein, was dem oben Bewiesenen widerspricht.

Wir können aber diesem Resultate, dass $\dfrac{t'\left(\frac{s}{r}\right)}{t\left(\frac{s}{r}\right)}$ nicht rational sein kann, sofort eine grössere Ausdehnung geben.

Ist nämlich y ein beliebiges Integral der Gleichung (1), so hat man:

$$\frac{az}{\frac{y'}{y''}} = b + \frac{y}{y'},$$
$$\frac{az}{\frac{y''}{y'''}} = b - a + \frac{y'}{y''},$$
$$\frac{az}{\frac{y'''}{y^{IV}}} = b - 2a + \frac{y''}{y'''},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \text{*)}$$

Daher haben die Functionen $\frac{y}{y'}, \frac{y'}{y''}, \frac{y''}{y'''}, \cdots,$ für einen rationalen reellen oder complexen Werth des Argumentes z zugleich einen rationalen oder zugleich einen irrationalen Werth.

Wenn wir dieses auf das Integral $t(z\,|\,a, b)$ anwenden und die leicht zu beweisende Gleichung

$$t^{(n)}(z\,|\,a, b) = \frac{(a+b)\,b(b-a)\,(b-2a)\cdots(b-(n-2)a)}{a^n}\,t(z\,|\,a, b-na)$$

berücksichtigen, so folgt:

---

*) Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, beiläufig bemerkt, die Kettenbruch-Entwicklung:

$$\frac{y}{y'} = -b + \frac{az}{a-b+}\,\frac{az}{2a-b+}\cdots+\frac{az}{na-b}+\frac{1}{\left(\frac{y^{(n+1)}}{y^{(n+2)}}\right)}.$$

„Die Function

$$\frac{1+\frac{1}{b}z+\frac{1}{b(b+a)}\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{b(b+a)(b+2a)}\frac{z^3}{3!}+\cdots}{1+\frac{1}{b+a}z+\frac{1}{(b+a)(b+2a)}\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{(b+a)(b+2a)(b+3a)}\frac{z^3}{3!}+\cdots}$$

kann für keinen endlichen von Null verschiedenen rationalen (reellen oder complexen) Werth des Argumentes z, selbst einen rationalen (reellen oder complexen) Werth annehmen.

Hierbei bezeichnet a irgend eine positive, b irgend eine von Null verschiedene positive oder negative ganze Zahl, welche der einzigen Bedingung unterworfen ist, dass $\frac{b}{a}$ nicht einer negativen ganzen Zahl gleich sein darf.“

Insbesondere haben wir den Satz:

„Die transcendente Gleichung:

$$1+\frac{1}{b}z+\frac{1}{b(b+a)}\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{b(b+a)(b+2a)}\frac{z^3}{3!}+\cdots=0$$

kann durch keinen rationalen reellen oder complexen Werth von z befriedigt werden.“

Die Bedingung, dass a und b theilerfremd sein sollen, wurde bei dem Ausspruch der Sätze fallen gelassen, da ein gemeinsamer Theiler von a und b in z aufgenommen werden kann.

Ein allgemeinerer Satz ergiebt sich aus nachstehender Betrachtung.

In den Formeln (4) möge $f(z)$ ein reell oder complex ganzzahliges Polynom*) $(n+1)^{\text{sten}}$ Grades bedeuten, welches keine Factoren von derselben Beschaffenheit aber niederen Grades besitzt. Ferner werde angenommen, dass unter den Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$P(z)\,t(z)-Q(z)t'(z)=0$$

die $n+1$ Wurzeln der Gleichung

$$f(z)=0$$

enthalten seien. $P(z)$ und $Q(z)$ sollen ganze und reell oder complex ganzzahlige Functionen von z sein ohne gemeinsamen Theiler.

Wenn nun erstens $t(z)$ und folglich auch $Q(z)$ für keine der Wurzeln z_i von $f(z)$ verschwindet, so bilden wir die Gleichungen:

$$(5)\quad \left|\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n+1}\left\{g_k(z_i,m)+h_k(z_i,m)\frac{P(z_i)}{Q(z_i)}\right\}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\varepsilon_{k,i}}{t(z_i)}, \\ k=0,1,2,\cdots 2n+1, \end{array}\right.$$

wobei zur Abkürzung

---

*) D. h. „ein Polynom, dessen Coefficienten von der Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ sind, wo α und β reelle ganze Zahlen bezeichnen.“

$$\int_0^{z_i} \frac{[A^{n+2}f(z)]^m}{m!} z^\lambda t(z)\,dz = \varepsilon_{\lambda,i}$$

$$\int_0^{z_i} \frac{[A^{n+2}f(z)]^m}{m!} z^\lambda t'(z)\,dz = \varepsilon_{n+1+\lambda,i}$$

gesetzt ist.

Die Summen linker Hand in (5) sind rationale reelle oder complexe Zahlen mit einem von m unabhängigen Nenner. Da diese Zahlen, wie aus den Gleichungen (5) folgt, mit wachsendem m dem absoluten Betrage nach beliebig klein werden, so müssen sie für genügend grosse Werthe von m verschwinden. Hieraus würde folgen, dass die aus den Coefficienten der Functionen $g_k(z, m)$, $h_k(z, m)$ gebildete Determinante für hinreichend grosse Werthe von m gleich Null ist, was nach Satz 2 in Nr. I nicht angeht.

Wenn zweitens $t(z)$ für eine Wurzel von $f(z)$ verschwindet, so muss auch $Q(z)$ für diese und folglich für jede Wurzel von $f(z)$ gleich Null sein, daher denn auch $t(z)$ für jede und folglich, falls z_i von Null verschieden ist, $t'(z)$ für keine Wurzel z_i verschwindet. In diesem Falle führen die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left\{ g_k(z_i, m) \frac{Q(z_i)}{P(z_i)} + h_k(z_i, m) \right\} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varepsilon_{k,i}}{t'(z_i)},$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots 2n+1,$$

auf denselben Widerspruch.

Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

„*Bezeichnen a und b positive ganze Zahlen, ferner $P(z)$ und $Q(z)$ reell oder complex ganzzahlige Polynome von z ohne gemeinsamen Theiler, so können unter den Wurzeln der transcendenten Gleichung*

$$P(z) \cdot z \left\{ 1 + \frac{1}{b+2a} z + \frac{1}{(b+2a)(b+3a)} \frac{z^2}{2!} + \cdots \right\}$$
$$= Q(z) \left\{ 1 + \frac{1}{b+a} z + \frac{1}{(b+a)(b+2a)} \frac{z^2}{2!} + \cdots \right\}$$

nicht die sämmtlichen Wurzeln irgend einer reell oder complex ganzzahligen algebraischen Gleichung

$$f(z) = 0$$

enthalten sein, es sei denn die Wurzel der einen Gleichung ersten Grades

$$z = 0.\text{“}$$

Es ist leicht einzusehen, dass, wie in dem Ausspruch des Satzes geschehen, die Bedingung der Irreductibilität für die Gleichung $f(z) = 0$ fallen gelassen werden kann.

III.

Ueber die analytische Beschaffenheit der betrachteten Functionen.

Die im Vorstehenden entwickelten Sätze würden einfache Folgerungen aus dem allgemeinen Satze des Herrn Lindemann über die Exponentialfunction sein, wenn die Function $\frac{t'(z)}{t(z)}$ *in bestimmter Weise* durch algebraische und Exponentialfunctionen definirt werden könnte.

Dieser Umstand ist die Veranlassung zu der nachfolgenden Untersuchung.

Es werde $\frac{t(z)}{t'(z)} = v$ gesetzt, so ist v ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$az\left(1 - \frac{dv}{dz}\right) = v(v+b). \tag{1}$$

Wir stellen nun die Frage:

Kann ein particuläres Integral vorstehender Gleichung einer Relation der Form:

$$\varphi_0(v,z) + \varphi_1(v,z)e^{\psi_1(v,z)} + \varphi_2(v,z)e^{\psi_2(v,z)} + \cdots + \varphi_\nu(v,z)e^{\psi_\nu(v,z)} = 0 \tag{2}$$

Genüge leisten, wenn die Functionszeichen φ und ψ bestimmte algebraische Functionen ihrer beiden Argumente v, z bezeichnen?

Dabei sollen, wie in Nr. II, a und b theilerfremde positive ganze Zahlen sein, was die Allgemeinheit nicht wesentlich beeinträchtigt. Der Fall $a = 1$ nimmt eine Sonderstellung ein und soll von der Untersuchung ganz ausgeschlossen bleiben.

Zuerst werde die Voraussetzung gemacht, dass zwischen einem particulären Integrale von (1) und z eine algebraische Relation nicht stattfinden könne.

Dann ist $\nu \geqq 1$. Es darf angenommen werden, dass eine Relation (2) mit weniger als ν Gliedern nicht existire.

Nun ergiebt die Differentiation nach z:

$$\frac{d\varphi_0}{dz} + \left(\frac{d\varphi_1}{dz} + \varphi_1\frac{d\psi_1}{dz}\right)e^{\psi_1(v,z)} + \cdots + \left(\frac{d\varphi_\nu}{dz} + \varphi_\nu\frac{d\psi_\nu}{dz}\right)e^{\psi_\nu(v,z)} = 0.$$

Hier sind die einzelnen Glieder von derselben Form, wie in (2), und es müssen daher für alle Werthe von z die Gleichungen bestehen:

$$\varphi_\mu\left\{\frac{d\varphi_\nu}{dz} + \varphi_\nu\frac{d\psi_\nu}{dz}\right\} = \varphi_\nu\left\{\frac{d\varphi_\mu}{dz} + \varphi_\mu\frac{d\psi_\mu}{dz}\right\},$$

oder

$$\frac{1}{\varphi_\nu}\cdot\frac{d\varphi_\nu}{dz} + \frac{d\psi_\nu}{dz} = \frac{1}{\varphi_\mu}\cdot\frac{d\varphi_\mu}{dz} + \frac{d\psi_\mu}{dz},$$

welche durch Integration die Gleichungen

$$\varphi_\mu \cdot e^{\psi_\mu} = c_\mu \cdot \varphi_\nu \cdot e^{\psi_\nu}$$

ergeben. Wir können daher die Gleichung (2) von der Form

$$\varphi_0(v,z) + \varphi_1(v,z) e^{\psi_1(v,z)} = 0,$$

oder auch, da $\varphi_1(v,z)$ nicht Null sein kann, von der Form

$$\varphi(v,z) = e^{\psi(v,z)} \tag{3}$$

voraussetzen. Nun folgt aus (3):

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varphi \cdot \frac{d\psi}{dz},$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{az - vb - v^2}{az} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{az - vb - v^2}{az} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \tag{4}$$

Diese Gleichung muss in v und z identisch sein, da andernfalls zwischen v und z eine algebraische Beziehung stattfinden würde.

Daraus folgt, dass die Gleichung (4) für irgend einen Zweig der Function φ (oder ψ) und einen bestimmten Zweig der Function ψ (oder φ) besteht; dass ferner für zwei so zusammengehörige Zweige und ein *beliebiges* particuläres Integral v der Gleichung (1) die Relation

$$\varphi(v,z) = C \cdot e^{\psi(v,z)}$$

besteht.

Die Constanten C müssen sämmtlich von Null verschieden sein, da sonst zwischen v und z eine algebraische Beziehung resultiren würde.

Nun ist das allgemeine Integral der Gleichung (1):

$$v = \frac{c_1 \tau(z) + c_2 t(z)}{c_1 \tau'(z) + c_2 t'(z)},$$

und es können $\tau(z) t'(z)$ und $t(z) \tau'(z)$ für keinen endlichen von Null verschiedenen Werth von z gleichzeitig verschwinden. Daher existirt ein bestimmtes particuläres Integral v, welches für einen beliebigen Werth von z (mit Ausschluss von $z = 0$ und $z = \infty$) einen vorgeschriebenen endlichen oder unendlich grossen Werth annimmt. Hieraus folgt, dass für einen von Null und unendlich verschiedenen Werth von z und einen beliebigen Werth von v, weder ein Zweig der Function $\varphi(v,z)$ noch der Function $\psi(v,z)$ einen unendlich grossen Werth annehmen kann. Andernfalls würde nämlich aus der Gleichung

$$\varphi(v,z) = C \cdot e^{\psi(v,z)}$$

die widersinnige Folgerung

$$\lim_{t=0} \left(t^n e^{\frac{1}{t^m}} \right) = \text{einer endlichen Grösse}$$

gezogen werden können.

Die beiden Functionen $\varphi(v, z)$ und $\psi(v, z)$ müssen hiernach von v ganz unabhängig sein, was wiederum nicht angeht, da dann die Gleichungen

$$\varphi(v, z) = C \cdot e^{\psi(v, z)}$$

die Grösse v gar nicht enthalten.

Das Resultat dieser Untersuchung lässt sich dahin aussprechen: *Soll eine Gleichung von der Form* (2) *existiren, so muss auch nothwendig ein particuläres Integral der Gleichung* (1) *algebraisch mit z zusammenhängen.*

Kann nun eine algebraische Gleichung

$$F(v, z) = 0 \tag{5}$$

zwischen einem particulären Integrale v und z statthaben?

Diese Gleichung (5) kann offenbar als irreductibel vorausgesetzt werden, so dass alle Zweige der durch sie definirten algebraischen Function v von z der Differentialgleichung (1) Genüge leisten. Wir untersuchen nun, wie diese algebraische Function v in Bezug auf z verzweigt sein kann. Alle Functionenelemente, welche für einen endlichen Werth $z = z_0$ existiren und die Differentialgleichung (1) befriedigen, sind in der Entwicklung von

$$v = \frac{c_1\left(1 - \frac{1}{b} z + - \cdots\right) + c_2 z^{1 + \frac{b}{a}} \left\{1 + \frac{1}{b + 2a} z + \cdots\right\}}{c_1\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{b(b-a)} z - + \cdots\right) + c_2 z^{\frac{b}{a}} \left\{\frac{a+b}{a} + \frac{1}{a} z + \cdots\right\}}$$

nach Potenzen von $z - z_0$ enthalten.

Die Entwicklung hat nur für $z_0 = 0$ und $c_1 \cdot c_2$ von Null verschieden gebrochene Potenzen von z, und zwar sind hier unter Exponenten $\frac{k}{a}$ der einzelnen Potenzen von z solche, deren Zähler k relativ prim zu dem Nenner a ist. Es folgt somit:

Die durch (5) *definirte algebraische Function v von z ist für endliche Werthe von z unverzweigt, es sei denn an der Stelle $z = 0$, wo die Zweige in Cyclen von a zusammenhängen können.*

Es erübrigt zu untersuchen, wie die Function v an der Stelle $z = \infty$ verzweigt sein kann.

Man setze

$$z = \frac{1}{u^\sigma}$$

wo die ganze Zahl $\sigma \geq 2$ ist.

Dann geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$a\left\{1 + v' \cdot \frac{u^{\sigma+1}}{\sigma}\right\} = u^\sigma v\,(v + b).$$

Es sei

$$v = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda u^{\lambda+r},$$

wo r eine ganze Zahl bedeutet, A_0 von Null verschieden ist.

Dann muss sein:

$$a\left[1 + \frac{1}{\sigma} r A_0 u^{r+\sigma} + \frac{1}{\sigma}(r+1) A_1 u^{r+\sigma+1} + \cdots\right]$$
$$= u\,[A_0 u^r + A_1 u^{r+1} + \cdots]\,[A_0 u^r + A_1 u^{r+1} + \cdots + b].$$

Hieraus ist ersichtlich, dass r einen negativen Werth haben muss. Daher ist $2r + \sigma$ der niedrigste Exponent, welcher in den mit Potenzen von u multiplicirten Gliedern auftritt. Folglich muss

$$2r + \sigma = 0$$

sein, so dass

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= 2\varrho \\ r &= -\varrho \end{aligned}\right\}, \quad \varrho \geqq 1$$

zu setzen ist. Nun erhalten wir folgende Gleichung:

$$a\left[1 - \frac{\varrho}{\sigma} A_0 u^\varrho + \frac{1}{\sigma}(1-\varrho) A_1 u^{\varrho+1} + \cdots\right]$$
$$= [A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots + A_\varrho u^\varrho + \cdots]$$
$$[A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots + (A_\varrho + b) u^\varrho + \cdots].$$

Die Vergleichung der einzelnen Coefficienten gleich hoher Potenzen von u ergiebt, dass nur die Grössen $A_0, A_\varrho, A_{2\varrho}, A_{3\varrho}, \ldots$ von Null verschieden sein können, so dass man

$$v = u^{-\varrho} A_0 + A_\varrho + A_{2\varrho} u^\varrho + A_{3\varrho} u^{2\varrho} + \cdots$$
$$= A_0 z^{\frac{1}{2}} + A_\varrho + A_{2\varrho} z^{-\frac{1}{2}} + A_{3\varrho}\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + \cdots$$

erhält. Daher können die Zweige der Function v von z bei $z = \infty$, wenn überhaupt, nur zu zweien zusammenhängen.

Es werde nun angenommen, dass an der Stelle $z = 0$ r Mal je a Zweige, für $z = \infty$ s Mal je 2 Zweige der Function v zusammenhängen; ferner sei m der Grad von $F(v, z)$ in v.

Dann ist

(6) $$a \cdot r \leqq m, \qquad 2 \cdot s \leqq m.$$

Das Geschlecht p der Gleichung $F(v, z) = 0$ ist

$$p = -m + 1 + r \cdot \frac{a-1}{2} + s \cdot \frac{1}{2};$$

also, da die Gleichung $F(v, z) = 0$ irreductibel und folglich $p \geqq 0$ ist:

(7) $$r(a-1) + s \geqq 2m - 2.$$

Eine leichte Discussion der Bedingungen (6) und (7) ergiebt, dass nur die folgenden beiden Möglichkeiten zulässig sind:

$$m = 1;\ r = s = 0,$$

also $v = R(z)$, einer rationalen Function von z,

oder $$m = 2;\ r = s = 1;\ a = 2.$$

Wenn nun

$$v = R(z) = \frac{G_1(z)}{G_2(z)} = \frac{A\,z^\gamma + A'\,z^{\gamma-1} + \cdots}{B\,z^\delta + B'\,z^{\delta-1} + \cdots}$$

die Differentialgleichung (1) befriedigen soll, wobei A wie B von Null verschieden vorausgesetzt werden dürfen, so muss

$$az\left\{G_2 G_1' - G_1 G_2'\right\} + b G_1 G_2 = az G_2^2 - G_1^2$$

sein. Nun sind die Grade von $G_1\,G_2$ und $az\left\{G_2 G_1' - G_1 G_2'\right\}$ nicht grösser als $\gamma + \delta$; die Entwicklungen von

$$azG_2^2 \quad \text{und} \quad G_1^2$$

fangen resp. an mit

$$a A^2 z^{2\gamma+1} \quad \text{und} \quad B^2 z^{2\delta}.$$

Da nun immer eine der beiden Zahlen $2\gamma + 1$ und 2δ grösser ist als $\gamma + \delta$, so muss entweder A oder B gleich Null sein, gegen die Annahme.

Es bleibt somit schliesslich nur noch die einzige Möglichkeit $a = 2$ übrig.

Das Integral v der Gleichung

$$2z\left(1 - \frac{dv}{dz}\right) = v(v + b)$$

ist der reciproke Werth des logarithmischen Differentialquotienten von dem Integral y der Gleichung

$$2zy'' = by' + y.$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass das allgemeine Integral dieser Gleichung die Gestalt hat:

$$c_1 \cdot e^{i\sqrt{2z}}\, G(\sqrt{2z}) + c_2 \cdot e^{-i\sqrt{2z}}\, \overline{G}(\sqrt{2z}),$$

wo $G(\sqrt{2z})$ eine ganze rationale Function von $\sqrt{2z}$ bedeutet und $\overline{G}(\sqrt{2z})$ das zu $G(\sqrt{2z})$ conjugirte Polynom ist, d. h. dadurch aus $G(\sqrt{2z})$ entsteht, dass man sämmtliche Coefficienten dieser Function durch die conjugirt complexen Werthe ersetzt.

Wir erhalten somit als Antwort auf die oben aufgeworfene Frage den Satz:

„*Bedeuten a und b positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, so besitzt die Differentialgleichung*

$$az\left(1 - \frac{dv}{dz}\right) = v(v+b)$$

falls $a > 2$ ist, kein Integral, welches einer Relation der Form

$$\varphi_0(v,z) + \varphi_1(v,z)\,e^{\psi_1(v,z)} + \varphi_2(v,z)\,e^{\psi_2(v,z)} + \cdots + \varphi_\nu(v,z)\,e^{\psi_\nu(v,z)} = 0$$

genügt, wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ algebraische Functionen von v und z bedeuten.

Dagegen findet für $a = 2$ eine solche Relation immer statt, indem der reciproke Werth des allgemeinen Integrales der Gleichung

$$2z\left(1 - \frac{dv}{dz}\right) = v(v+b)$$

gleich dem logarithmischen Differentialquotienten eines Ausdrucks von der Form

$$c_1 \cdot e^{i\sqrt{2z}}\, G(\sqrt{2z}) + c_2 \cdot e^{-i\sqrt{2z}}\, \overline{G}(\sqrt{2z})$$

ist, wo $G(\sqrt{2z})$ und $\overline{G}(\sqrt{2z})$ bestimmte zu einander conjugirte Polynome von $\sqrt{2z}$ bedeuten."

Aus diesem Satze folgt nun namentlich die Unmöglichkeit, die in Nr. II abgeleiteten Sätze aus dem Satze des Herrn Lindemann über die Exponentialfunction herzuleiten, falls die ganze Zahl a grösser ist als 2.

Hildesheim, im März 1883.

Ueber Tangentenconstructionen.

Von

Adolf Hurwitz in Göttingen.

I.

Die von Steiner angegebene Construction der Lemniscatentangente*) lässt sich folgendermassen verallgemeinern:

In einer Ebene seien zwei Gruppen von Elementen gegeben, von denen die eine aus α festen Punkten $C_1 C_2 \cdots C_\alpha$ und $n-\alpha$ festen Geraden $g_1 g_2 \cdots g_{n-\alpha}$, die andere aus β festen Punkten $C_1', C_2', \cdots, C_\beta'$ und $m-\beta$ festen Geraden $g_1' g_2' \cdots g_{m-\beta}'$ besteht. Ein veränderlicher Punkt bewege sich in der Ebene so, dass das Product seiner Abstände von den Elementen der ersten Gruppe in einem constanten Verhältniss bleibt, zu dem Product seiner Abstände von den Elementen der zweiten Gruppe. Dabei wollen wir absehen von dem trivialen Falle, wo das constante Verhältniss einen der Werthe Null oder Unendlich besitzt; ferner setzen wir, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, $n \geqq m$ voraus.

Jetzt findet man die Tangente in irgend einem Punkte P der von dem veränderlichen Punkte beschriebenen Curve durch die folgende Construction:

„Man verbinde den Punkt P mit den festen Centren $C_1 C_2 \cdots C_\alpha$, $C_1' C_2' \cdots C_\beta'$ und errichte auf diesen Verbindungsgeraden in den Punkten $C_1 \cdots C_\beta'$ die Lothe $h_1 h_2 \cdots h_\alpha$, $h_1' h_2' \cdots h_\beta'$. Ferner construire man die geraden Polaren von P in Bezug auf die beiden (zerfallenen) Curven n^{ter} Ordnung, von welchen die eine aus den Geraden $h_1 h_2 \cdots h_\alpha$, $g_1 g_2 \cdots g_{n-\alpha}$, die andere aus den Geraden $h_1' h_2' \cdots h_\beta'$, $g_1' g_2' \cdots g_{m-\beta}'$ und der $(n-m)$-fach genommenen unendlich fernen Geraden besteht. Dann ist die Verbindungsgerade von P mit dem Durchschnittspunkte jener beiden Polaren die verlangte Tangente."

Fallen die bei der Construction verwendeten Polaren zusammen, so wird die Tangente in P unbestimmt und P ist ein vielfacher Punkt der betrachteten Curve.

Von speciellen Fällen seien die folgenden erwähnt:

---

*) Ges. Werke, Bd. 2, pag. 19.

1) Für $n = \alpha = 2$, $m = \beta = 0$ geht die obige Construction in die von Steiner gefundene Construction der Lemniscatentangente über.

2) Besteht die erste Elementengruppe aus einem Punkte C und einer Geraden g, die zweite Gruppe aus einer durch C gehenden und zu g parallelen Geraden g', so beschreibt der bewegliche Punkt die Konchoide.

3) Werden die beiden Elementengruppen von je zwei Geraden gebildet, so ergiebt sich ein bekannter Satz aus der Theorie der Kegelschnitte.

Zum Beweise des allgemeinen Satzes mögen r_i, p_i, r_i', p_i' die Abstände eines veränderlichen Punktes von den Elementen C_i, g_i, C_i', g_i' bezeichnen. Dann ist für jeden Punkt der von uns betrachteten Curve

$$\sum \log r + \sum \log p - \sum \log r' - \sum \log p' = c;$$

also für zwei unendlich nahe Punkte P, Q der Curve:

$$\sum \frac{dr}{r} + \sum \frac{dp}{p} - \sum \frac{dr'}{r'} - \sum \frac{dp'}{p'} = 0.$$

Die Division durch das Bogenelement $PQ = ds$ ergiebt:

$$\sum \frac{\cos(r,t)}{r} + \sum \frac{\cos(p,t)}{p} = \sum \frac{\cos(r',t)}{r'} + \sum \frac{\cos(p',t)}{p'},$$

wobei t die (mit einer willkürlichen aber bestimmten Richtung versehene) Tangente im Punkte P bezeichnet und (r, t) ((p, t) etc.) den Winkel bedeutet, welchen die nach P führende Richtung der Strecke r (p etc.) mit der Richtung von t bildet. Sind nun $A_1 A_2 \cdots A_n$ die Schnittpunkte von t mit den Geraden $h_1 h_2 \cdots h_\alpha$, $g_1 g_2 \cdots g_{n-\alpha}$ und $B_1 B_2 \cdots B_m$ die Schnittpunkte von t mit $h_1' h_2' \cdots h_\beta'$, $g_1' \cdots g_{m-\beta}'$, so folgt

$$\sum \frac{1}{PA} = \sum \frac{1}{PB},$$

eine Gleichung, welche geometrisch gedeutet unsere Construction ergiebt.

Aus dem Beweise geht hervor, dass der obige Satz mit geringen Modificationen gültig bleibt, wenn an Stelle der festen Geraden beliebige Curven genommen werden. Ferner kann derselbe auch leicht auf den Raum übertragen werden, wo dann die festen Elemente beliebige Punkte, Curven und Flächen im Raume sein können.

II.

Auf eine ähnliche Art beweist man die in den folgenden Angaben enthaltene sehr allgemeine Tangentenconstruction.

Es mögen r_1, r_2, $\cdots$ r_n die Abstände eines Punktes P von α

festen Punkten und $n - \alpha$ festen Curven oder von α festen Punkten, β festen Curven und $n - \alpha - \beta$ festen Flächen*) sein, wobei im ersten Falle alle in Betracht zu ziehenden Gebilde in einer Ebene liegen sollen. Die nach P führende Richtung der Strecken r_i werde als die positive bezeichnet. Nun bewege sich der Punkt P so, dass eine bestimmte Function der Grössen r_i:

$$f(r_1 r_2 \cdots r_n)$$

einen constanten Werth behalte. Dann ergiebt der folgende Satz die Construction der Normale an irgend einer Stelle P der von dem beweglichen Punkte beschriebenen Curve oder Fläche:

„*Trägt man von P aus auf den zu diesem Punkte gehörigen Abständen r_1, $r_2 \cdots r_n$ Strecken ab, welche resp. proportional sind zu den Werthen von* $\frac{\partial f}{\partial r_1}, \frac{\partial f}{\partial r_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial r_n}$ *und bildet die geometrische Summe der Strecken, so läuft diese der in Rede stehenden Normale parallel. Zwei Strecken sind dabei nach derselben oder nach entgegengesetzten Richtungen der betreffenden Abstände abzutragen, je nachdem die beiden zugehörigen partiellen Differentialquotienten dasselbe oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.*"

Man kann diesem Satze noch verschiedene andere Fassungen geben, von welchen nur die folgende erwähnt werden möge:

„Bestimmt man den Schwerpunkt für die (gleichschweren) Endpunkte der auf den Abständen r_i abgetragenen Strecken, so liegt dieser auf der Normale im Punkte P." **)

Wenn die mehrfach erwähnten Strecken die geometrische Summe Null ergeben, oder, was dasselbe ist, wenn der genannte Schwerpunkt mit P zusammenfällt, so ist der betrachtete Punkt P ein vielfacher Punkt der Curve oder Fläche. Die Function $f(r_1, r_2 \cdots r_n)$ hat in einem solchen Punkte ein Maximum resp. Minimum oder nicht, je nachdem P ein isolirter oder ein nicht isolirter Punkt ist***).

---

*) Unter dem Abstand eines Punktes von einer Curve oder Fläche ist der „senkrechte" Abstand zu verstehen.

**) Wie ich nachträglich bemerkt habe, findet sich dieser Satz, sofern er sich auf ebene Curven bezieht, schon in l'Hôpital's Analyse des infiniment petits. (Juni 1883.)

***) In Betreff der Punkte P, für welche die Function $c_1 r_1^\mu + c_2 r_2^\mu + \cdots + c_n r_n^\mu$ ein Maximum oder Minimum wird, vergl.:

Steiner: „Ueber den Punkt der kleinsten Entfernung". Ges. Werke, Bd. II, pag. 95.

Wetzig: „Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsummen der Abstände eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden oder Ebenen." Crelle's Journal, Bd. 62, pag. 346.

Jullien: „Problèmes de mécanique rationelle". Bd. 2, pag. 371—373.

Als Anwendungen der allgemeinen Normalenconstruction führe ich die folgenden Sätze an:

„Fällt man von irgend einem Punkte P einer Ellipse Lothe auf die beiden gleichen conjugirten Durchmesser derselben, so liegt die Mitte der Strecke, welche von den Fusspunkten dieser Lothe begrenzt wird, auf der Normale der Ellipse in dem betrachteten Punkte.“

Die Summe der Quadrate jener Lothe ist nämlich für alle Punkte der Ellipse constant. —

Jedes Ellipsoid besitzt, wie man leicht beweist, unendlich viele reelle Tripel conjugirter Halbmesser von der Eigenschaft, dass die drei Dreiecke, welche aus je zwei dieser Halbmesser als Seiten gebildet werden können, gleichen Flächeninhalt haben.

„Fällt man von irgend einem Punkte des Ellipsoids auf die drei Ebenen eines solchen Halbmesser-Tripels die Lothe, so liegt der Schwerpunkt des Dreiecks, welches von den Fusspunkten dieser Lothe gebildet wird, auf der Normale des Ellipsoids in dem betrachteten Punkte.“

Göttingen, Februar 1883.

Ueber einen liniengeometrischen Satz.

Von

F. Klein in Leipzig.

(Aus den Göttinger Nachrichten vom 20. März 1872).*)

Statt die Coordinaten p_{ik} der geraden Linie im Raume als zweigliedrige Determinanten aus den Coordinaten zweier Punkte oder Ebenen zu definiren, kann man sie bekanntlich auch als selbständige Veränderliche auffassen, welche an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

gebunden sind. Bei diesem Ausgangspunkte entsteht die Frage, ob jeder algebraische Liniencomplex durch *eine* zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung definirt werden kann, oder ob nicht zur reinen Darstellung des Complexes gelegentlich mehrere Gleichungen erforderlich sind. Ich werde nun im Folgenden zeigen: *dass allerdings zur Darstellung eines algebraischen Liniencomplexes immer eine zu* $P = 0$ *hinzutretende Gleichung genügt.* Die zum Beweise nothwendigen, sehr einfachen Ueberlegungen, wie sie im Nachstehenden auseinandergesetzt sind, können voraussichtlich überhaupt bei der Untersuchung analoger Fragen**) Anwendung finden und scheinen dadurch ein allgemeineres Interesse zu besitzen.

Rein analytisch gefasst, lautet der zu beweisende Satz folgender-

---

*) Ich bringe nachstehend vier ältere Arbeiten von mir, die bisher nur beiläufig publicirt waren, zum Wiederabdruck, indem ich glaube, dass dieselben auch heute noch ein gewisses Interesse haben, und ich in absehbarer Zeit doch jedenfalls nicht dazu komme, die in ihnen behandelten Themata, wie ich es ursprünglich vorhatte, weiter auszuführen. Der Wiederabdruck ist, von ganz unbedeutenden sprachlichen Aenderungen abgesehen, ein wörtlicher. Ein paar Citate, welche ich jetzt hinzugefügt habe, sind durch das in Klammern beigefügte Datum [Febr. 1883] kenntlich gemacht. Klein. [Febr. 1883.]

**) Ich erinnere hier an eine Betrachtung, welche Cayley gelegentlich anstellt (Quart. Journ. t. III. 1860, p. 234), und die sich darauf bezieht, dass nicht auf allen algebraischen Flächen unvollständige Durchschnittscurven gelegen sein können.

massen: Aus einer allgemeinen*) Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen ist eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch eine quadratische Gleichung mit nicht verschwindender Determinante**)

$$P = 0$$

ausgeschieden. Jede in ihr enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen kann durch eine zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung dargestellt werden."

Statt dieses Satzes mögen wir gleich den folgenden, ihn einschliessenden beweisen:

„Es sei eine allgemeine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen gegeben, wo $n \geqq 4$, und aus ihr eine Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen durch eine quadratische Gleichung:

$$P = 0$$

abgeschieden. Jede in der letzteren enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von $(n-2)$ Dimensionen kann durch eine zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung dargestellt werden, *falls nicht alle aus den Coefficienten von P zusammengesetzten fünfreihigen Unterdeterminanten verschwinden.*"

Diese Bedingung ist in dem ursprünglich aufgestellten Satze befriedigt, insofern dort die (sechsreihige) Determinante von P selbst nicht verschwindet, um so weniger also ihre fünfreihigen Unterdeterminanten sämmtlich gleich Null sind.

Der Beweis des allgemeinen algebraischen Satzes mag zunächst für $n = 4$ geführt werden, wo also die Bedingung die ist, *dass die Determinante von P nicht verschwindet.* Bei einem beliebigen n lassen sich hinterher dieselben Betrachtungen anstellen, für $n = 4$ haben wir nur den Vorzug, den Ueberlegungen, wie im Folgenden geschehen soll, ein anschauliches geometrisches Bild zu Grunde legen zu können.

Das einzelne Element der gegebenen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen sei durch die relativen Werthe der fünf homogenen Veränderlichen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$$

bestimmt. Man wird dieselben immer (und auf unendlich viele Weisen) so wählen können, dass die gegebene quadratische Gleichung $P = 0$ (deren Determinante nicht verschwindet) die folgende Gestalt annimmt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,$$

oder, indem man

---

*) *Allgemein* mag eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen heissen, deren Element von *unabhängig gedachten* Parametern abhängt.

**) Diese nähere Bestimmung ist zugefügt, weil sie die quadratische Gleichung, sofern ihre Eigenschaften hier in Betracht kommen, vollständig charakterisirt.

setzt:

$$x_4 + ix_5 = p, \qquad x_4 - ix_5 = q$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + pq = 0.$$

Das Element:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0, \quad p = 0,$$

welches im Folgenden ausgezeichnet werden soll, ist dabei ein unter den übrigen der Mannigfaltigkeit $P = 0$ angehörigen beliebig ausgewähltes.

In der nunmehr hergestellten Gleichungsform kann die Mannigfaltigkeit $P = 0$ ohne Weiteres auf eine allgemeine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen eindeutig abgebildet werden, ganz dem entsprechend, wie die Abbildung einer Fläche zweiten Grades auf die Ebene durch Projection von einem Punkte der Fläche aus erfolgt. Man setze nämlich, unter

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$$

die homogenen Coordinaten eines Elementes einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen verstanden:

$$\varrho x_1 = \xi_1 \xi_4, \quad \varrho x_2 = \xi_2 \xi_4, \quad \varrho x_3 = \xi_3 \xi_4, \quad \varrho p = \xi_4 \xi_4,$$
$$\varrho q = -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2).$$

Die allgemeine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen mag jetzt durch den Punktraum vorgestellt sein, die ξ mögen also homogene Punktcoordinaten bedeuten: *dann ist die gegebene Mannigfaltigkeit $P = 0$ durch die vorstehenden Gleichungen eindeutig auf den Punktraum abgebildet.* Dabei tritt im Punktraume ein fundamentaler Kegelschnitt auf:

$$\xi_4 = 0, \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

dessen Punkten jedesmal ∞^1 Elemente der gegebenen Mannigfaltigkeit $P = 0$ entsprechen. Anderseits sind sämmtliche übrige Punkte der Ebene

$$\xi_4 = 0$$

einem einzigen Elemente der Mannigfaltigkeit $P = 0$, dem Elemente:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad p = 0$$

zugeordnet, welches, in Analogie mit dem Projectionspunkte bei der Abbildung der Flächen zweiten Grades, im folgenden das *Projectionselement* heissen mag.

Fügt man nun zu $P = 0$ eine weitere algebraische Gleichung, die vom $m$ten Grade sein mag;

$$\Omega = 0$$

hinzu, so erhält man im Punktraume als Bild der beiden Gleichungen genügenden Elemente eine Fläche vom Grade $2m$, welche den fundamentalen Kegelschnitt m-fach enthält. Von dieser Bildfläche kann

sich gelegentlich, einfach oder mehrfach zählend, die Ebene $\xi_4 = 0$ absondern. Es tritt dies dann und nur dann ein, wenn das Projectionselement selbst der Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$, als gewöhnliches oder singuläres Element, angehört. Aber dies können wir immer vermeiden, da es uns ja frei steht, auch wenn die Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$ bereits gegeben ist, das Projectionselement unter den Elementen von $P = 0$ zu wählen, wie wir wollen. Es bildet sich also allgemein die Mannigfaltigkeit:

$$P = 0, \qquad \Omega = 0$$

als eine Fläche vom $2m$ten Grade ab, *welche den fundamentalen Kegelschnitt zur m-fachen Curve hat, und die Ebene desselben in nicht dem Kegelschnitte angehörigen Punkten nicht trifft.*

Es ist aber auch umgekehrt ersichtlich, dass jede Fläche $2m$ten Grades, welche diesen Bedingungen genügt, den vollständigen Durchschnitt von $P = 0$ mit der durch eine hinzutretende Gleichung $\Omega = 0$ vorgestellten Mannigfaltigkeit repräsentirt. Denn die Gleichung einer solchen Fläche muss in jedem Gliede die Ausdrücke ξ_4 und $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$ zusammen in der $m$ten Dimension enthalten. Das einzelne Glied hat also, unter μ eine Zahl ≥ 0 und $\leq m$ verstanden, die folgende Form

$$\xi_4^\mu \cdot (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{m-\mu} \cdot \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4),$$

wo φ eine homogene Function vom μten Grade der beigefügten Argumente ist. Aber das Product:

$$\xi_4^\mu \, \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

ist ersichtlich nichts anderes, als eine homogene Function μten Grades der Argumente

$$\xi_1 \xi_4, \quad \xi_2 \xi_4, \quad \xi_3 \xi_4, \quad \xi_4 \xi_4.$$

Jedes Glied der gegebenen Flächengleichung und also die Flächengleichung selbst ist mithin eine homogene Function $m$ten Grades der fünf Argumente:

$$\xi_1 \xi_4, \; \xi_2 \xi_4, \; \xi_3 \xi_4, \; \xi_4 \xi_4, \; (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2).$$

Man hat jetzt nur statt dieser Argumente bez.

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad p, \quad -q$$

zu setzen, um die Gleichung $m$ten Grades

$$\Omega = 0$$

derjenigen Mannigfaltigkeit zu haben, welche mit $P = 0$ zusammen als vollständigen Durchschnitt eine Mannigfaltigkeit bestimmt, deren Bild im Punktraume die ursprünglich gegebene Fläche ist, womit denn die Behauptung, dass die Fläche das Bild eines vollständigen Durchschnittes sei, bewiesen ist.

Eine beliebige in $P = 0$ enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen, wird sich nun aber, — falls wir nicht, was

wir immer vermeiden können, das Projectionselement unter ihren Elementen wählen — *nicht anders als eine solche Fläche abbilden können, die den vorgenannten Bedingungen genügt.* Denn die Bildfläche muss, der Annahme über die Lage des Projectionselementes entsprechend, die Ebene $\xi_4 = 0$ in keinen anderen Punkten, als in den Punkten des fundamentalen Kegelschnittes treffen, und das ist, *weil der Kegelschnitt ein irreducibeles Gebilde ist*, nicht anders möglich, als wenn sie von gerader Ordnung $= 2m$ ist, und den Kegelschnitt als m-fache Curve enthält.

Hiermit ist der Beweis unseres Satzes für $n = 4$ geführt. Seine wesentlichen Momente mögen hier noch ausdrücklich zusammengefasst werden, es sind die folgenden:

1) dass im Punktraume eine *irreducibele* Fundamentalcurve auftritt,

2) dass eine durch die Fundamentalcurve gelegte Fläche (die Ebene $\xi_4 = 0$) ein einzelnes, beliebig anzunehmendes Element des darzustellenden Gebildes repräsentirt,

3) dass es nur auf das Verhalten der Bildfläche zum Fundamentalkegelschnitte ankommt, ob eine $P = 0$ angehörige Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen als vollständiger Durchschnitt gefasst werden kann. —

Unser Schluss würde dagegen sofort ungültig werden, wenn der Fundamentalkegelschnitt reducibel wäre, also in ein Geradenpaar zerfiele. Denn dann kann man Flächen von der Ordnung $(m' + m'')$ construiren, welche die Geraden bez. m'- und m''-fach enthalten. Dieselben treffen, wie verlangt, die Ebene des Kegelschnittes nur in Punkten des Kegelschnittes, aber vollständige Durchschnitte würden sie erst dann vorstellen, wenn $m' = m''$ wäre.

Dieses Zerfallen des fundamentalen Kegelschnittes tritt nun gerade dann ein, wenn die Determinante der Form P verschwindet, und musste desshalb beim Beweise unseres Satzes diese Möglichkeit ausdrücklich ausgeschlossen werden. In der That, hat P eine verschwindende Determinante (und zunächst noch keine verschwindenden Unterdeterminanten), so kann man ihm die Form geben:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + pq,$$

die Abbildungsfunctionen werden:

$$\varrho x_1 = \xi_1 \xi_4, \quad \varrho x_2 = \xi_2 \xi_4, \quad \varrho x_3 = \xi_3 \xi_4, \quad \varrho p = \xi_4 \xi_4,$$
$$\varrho q = -(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

und der fundamentale Kegelschnitt wird:

$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0,$$

ist also in ein Linienpaar:

$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1 + i\xi_2 = 0,$$
$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1 - i\xi_2 = 0$$

zerfallen. —

Auf ganz ähnliche Weise, wie nunmehr der Beweis unseres Satzes für $n = 4$ geführt und das Nichtverschwinden der Determinante als nothwendige und hinreichende Bedingung erkannt wurde, erledigt sich die Frage für ein beliebiges n. Ist erstlich $n = 3$, haben wir also eine Fläche zweiten Grades, so entsteht bei der Abbildung derselben auf die allgemeine Mannigfaltigkeit der nächst niederen Dimension ohnehin ein reducibeles Fundamentalgebilde, auch wenn die Determinante der Fläche nicht verschwindet, nämlich ein Punktepaar. *Auf Flächen zweiten Grades findet unser Satz desshalb keine Anwendung*).* Dagegen gilt der Satz allemal, wenn bei der Abbildung der Mannigfaltigkeit $P = 0$ auf die allgemeine Mannigfaltigkeit von $(n - 1)$ Dimensionen — eine Abbildung, die sich immer in gleicher Weise gestaltet — ein irreducibeles Fundamentalgebilde auftritt. Hierzu ist das Nichtverschwinden der aus den Coefficienten von P gebildeten fünfreihigen Determinanten die nothwendige und hinreichende Bedingung. Als Fundamentalgebilde tritt nämlich eine Mannigfaltigkeit von $(n - 3)$ Dimensionen auf, welche aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von $(n - 2)$ Dimensionen durch eine quadratische Gleichung abgeschieden wird. Soll das Fundamentalgebilde zerfallen, so ist dazu das Verschwinden aller aus den Coefficienten der Gleichung gebildeter dreireihiger Unterdeterminanten die Bedingung; und dies Verschwinden tritt dann und nur dann ein, wenn ein Gleiches bei den fünfreihigen Unterdeterminanten der ursprünglichen quadratischen Gleichung $P = 0$ der Fall war. *Hiermit ist denn unser allgemeiner Satz für ein beliebiges n, insbesondere das in ihm enthaltene liniengeometrische Theorem, bewiesen.*

Ich will hier von der auseinandergesetzten Theorie noch zwei weitere geometrische Anwendungen geben. Die erste bezieht sich wieder auf Liniengeometrie. Man verbinde nämlich mit der quadratischen Gleichung, der die Liniencoordinaten zu genügen haben:

$$P = 0,$$

eine lineare. So hat man einen linearen Complex, den man auch in der folgenden Weise bestimmen kann. Aus der linearen Gleichung nehme man den Werth einer der Veränderlichen, ausgedrückt in den fünf anderen, und substituire ihn in $P = 0$, wodurch eine neue quadratische Gleichung $P' = 0$ entsteht. Der lineare Complex er-

*) Ebensowenig gilt der Satz für Kegelschnitte, wie ohne Weiteres ersichtlich.

scheint dann als durch diese Gleichnng aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen ausgeschieden. Die Determinante von P' verschwindet nicht, wenn der lineare Complex ein allgemeiner ist; sie verschwindet dann und nur dann, wenn er ein specieller wird*). Wir erhalten also den folgenden Satz:

Congruenzen, welche einem allgemeinen linearen Complexe angehören, können als vollständiger Durchschnitt desselben mit einem anderen Complexe dargestellt werden.

Für den speciellen linearen Complex gilt aber der Satz nicht mehr. Ebensowenig wird der analoge Satz gelten, wenn wir zu der Gleichung des linearen Complexes eine weitere lineare Gleichung hinzufügen und die durch beide dargestellte lineare Congruenz in's Auge fassen. Auf einer linearen Congruenz giebt es in der That Linienflächen, welche sich nicht als vollständiger Durchschnitt der Congruenz mit einem hinzutretenden Complex darstellen lassen. Es sind dies diejenigen, welche die Leitlinien der Congruenz ungleich oft enthalten.

Eine zweite geometrische Anwendung bezieht sich auf die Darstellung des Raumpunktes durch die relativen Werthe seiner (mit gewissen Constanten multiplicirten) Potenzen mit Bezug auf fünf Kugeln, welche Herr Lie in Anknüpfung an die Abbildung des linearen Complexes diese Nachrichten 1871 n. 7, p. 208 gegeben hat, während sie Herr Darboux bereits früher (1868) in einer der Pariser Academie eingereichten Abhandlung aufgestellt hatte, die aber noch nicht veröffentlicht ist (cf. Darboux in den Comptes Rendus 1871. Sept.) Der Punkt wird durch fünf homogene Coordinaten dargestellt, welche, einzeln gleich Null gesetzt, fünf linear unabhängige Kugeln vorstellen, und diese Coordinaten sind an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante geknüpft. Der Punktraum ist hiernach das Bild einer Mannigfaltigkeit, die aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch diese quadratische Gleichung abgeschieden wird; es liegen also genau die

*) Es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, dass die eben vorgetragene Abbildung einer Mannigfaltigkeit $P = 0$ von drei Dimensionen auf den Punktraum mit der Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum gleichbedeutend ist, welche Herr Nöther in den Göttinger Nachrichten 1869. Nr. 15, gegeben und die Herr Lie seinen metrisch-projectivischen Untersuchungen zu Grunde gelegt hat. Ich möchte an dieser Stelle ausdrücklich auf die Abbildung des speciellen linearen Complexes hinweisen, welche die Theorie der Flächen mit einer mehrfachen Geraden mit derjenigen der Flächen mit zwei sich schneidenden mehrfachen Geraden in eine merkwürdige Verbindung setzt, durch welche z. B. die Zeuthen'schen Untersuchungen über die Flächen mit einer mehrfachen Geraden (Math. Ann. t. IV, I) für die letztgenannten Flächen verwerthet werden können.

Verhältnisse vor, wie wir sie eben bei dem Beweise des allgemeinen Satzes für $n = 4$ voraussetzten. Dem Projectionselemente entspricht die unendlich ferne Ebene des Punktraumes, der in ihr enthaltene imaginäre Kugelkeis ist der fundamentale Kegelschnitt. Einer Verlegung des Projectionselementes entspricht, wie man leicht sieht, eine Transformation des Punktraums durch reciproke Radien. Hier erhalten wir also: *Jede algebraische Fläche kann vermöge Umformung durch reciproke Radien in eine solche übergeführt werden, die durch eine Gleichung zwischen den in Rede stehenden Coordinaten rein dargestellt wird.* Dagegen würde der entsprechende Satz bei einer analogen Coordinatenbestimmung in der Ebene nicht mehr richtig sein*).

*) Man vergleiche die Arbeiten von Lie und mir im fünften Bande der mathematischen Annalen, sowie Hrn. Darboux's im Jahre 1873 erschienenes Buch: „Sur une certaine famille de courbes et de surfaces“ (Paris, Gauthiers-Villars). [Febr. 1883].

Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie.

Von

F. Klein in Leipzig.

(Aus den Göttinger Nachrichten vom 14. August 1872).

Wenn bei der analytischen Behandlung der Geometrie das Studium der algebraischen Gebilde nothwendig zu der Einführung complexer Elemente hinleitet, so hat man lange Zeit darüber gestritten, ob und in wie weit den complexen Elementen eine rein geometrische Bedeutung beizulegen sei. Die mehr oder minder unbestimmten Principien, wie sie von Poncelet, Chasles u. A. mit Bezug auf diese Frage formulirt wurden, konnte eine exacte Auffassung nicht befriedigen; sie erweisen sich nicht nur als unklar, sondern in vielen Fällen geradezu als ungenügend. Auch die in neuerer Zeit so vielfach angewandte und gewiss höchst fruchtbare Methode, die complexen Gebilde als nur analytisch definirt anzusehen, von ihnen aber Dinge auszusagen, welche die geometrische Anschauung den reellen Gebilden beilegt, indem man darunter nur die auch für die complexen Elemente bestehenden bez. analytischen Relationen versteht, kann nicht als die abschliessende Behandlung des Gegenstandes erscheinen, obwohl sie in ihrer Richtung Alles leistet. Denn wir wollen auch in der analytischen Geometrie uns nicht begnügen, geometrische Sätze an der Hand übrigens nicht gedeuteter analytischer Operationen als wahr zu erkennen, sondern wir wollen den geometrischen Inhalt jeder einzelnen Operation verfolgen, so dass das Resultat als ein durch unsere räumliche Anschauung nothwendig bedingtes mit Bewusstsein erkannt wird. In dieser Richtung liegt also bei den complexen Elementen die Frage vor, ob man nicht den Sätzen und Aufgaben, die sich analytisch auf complexe Elemente beziehen, dadurch eine geometrische Bedeutung ertheilen könne, dass man sie auf reale Gebilde überträgt, die zu den complexen in einer wesentlichen Beziehung stehen. v. Staudt's Verdienst ist es*), in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage die Frage

---

*) Vergl. hierzu die beiden neuen Aufsätze: Stolz, Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie. Math. Ann. t. IV. — August, Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie. (Programm der Friedrichs-Realschule in Berlin 1872.)

in der so präcisirten Form aufgestellt und in einer nun noch näher zu beleuchtenden Art beantwortet zu haben.

Jeder complexe Punkt — und es mag hier nur von complexen *Punkten* gehandelt werden — liegt mit seinen conjugirten auf einer reellen Geraden und giebt mit ihm zusammen das Paar Grundpunkte für eine reelle auf der Geraden befindliche Involution ab. Diese Involution ist durch die beiden Punkte vollständig bestimmt; es findet auch das Umgekehrte statt; sie kann daher die beiden complexen Punkte geometrisch vertreten, insofern für sie bestimmte Beziehungen gelten müssen, sobald irgend welche Beziehungen für die complexen Punkte festgesetzt werden. Aber es entsteht die Schwierigkeit, zu sondern, was auf den einen oder den anderen complexen Punkt sich bezieht. Um dies zu erreichen — und das ist der Kern seiner Methode — legt v. Staudt der geraden Linie, auf welcher sich die Involution befindet, einen bestimmten *Sinn* bei, in welchem sie durchlaufen werden soll; die Involution vertritt den einen oder den andern complexen Punkt, jenachdem man den einen oder anderen Sinn auswählt.

Diese Einführung und Unterscheidung des Sinnes scheint zunächst sehr willkürlich. Denn derselbe hängt mit der auf der Geraden befindlichen Involution gar nicht zusammen, er giebt nur an, in welcher Reihenfolge wir die überdies durch die Involution paarweise zusammengeordneten Punkte der Geraden unserer Aufmerksamkeit vorführen sollen. Und es ist gar nicht zu sehen, wesshalb die Unterscheidung des Sinnes mit der Trennung der beiden complexen Punkte zusammenhängt.

Dem gegenüber sei es gestattet hier eine andere Interpretation der complexen Elemente vorzutragen, welche eine Einsicht in die aufgeworfenen Fragen gestattet, welche übrigens die v. Staudt'sche Interpretation umfasst und nur als eine Weiterbildung derselben angesehen werden will.

In ihrer allgemeinsten Form kann die fragliche Interpretation folgendermassen dargelegt werden. Die beiden auf einer Geraden befindlichen complexen Punkte O, O' können als Grundpunkte für eine auf der Geraden zu treffende *projectivische Massbestimmung* betrachtet werden. Als Entfernung zweier Punkte a, b hat man dann den mit einer beliebig zu wählenden Constanten c multiplicirten Logarithmus eines der beiden Doppelverhältnisse zu betrachten, welches die Punkte a, b mit den Punkten O, O' bilden. Nachdem man über c nach Belieben verfügt, ist die Massbestimmung bis auf das Vorzeichen festgelegt, *in dieser Unbestimmtheit repräsentirt sie die beiden complexen Punkte O und O'*. Ein Wechsel des Vorzeichens kann mit einer Vertauschung der beiden Punkte O und O' in Zusammenhang gebracht

werden. Denn bei einer solchen Vertauschung geht das bez. Doppelverhältniss in seinen reciproken Werth über, der Logarithmus des Doppelverhältnisses ändert sein Zeichen. *Indem wir also der Massbestimmung ein bestimmtes Vorzeichen beilegen, sondern wir zwischen den beiden complexen Punkten, insofern Vorzeichenwechsel und Vertauschung der beiden Punkte einander entsprechen.*

Wir wollen jetzt von einem beliebigen Punkte a anfangend auf der gegebenen Geraden eine Scala mit Bezug auf die festgelegte Massbestimmung äquidistanter Punkte construiren, welche in positivem Sinne fortschreitet, in dem wir von a aus eine positive Strecke α wiederholt antragen. Die so entstehende und in bestimmtem Sinne durchlaufene Punktreihe vertritt die Massbestimmung vollständig, auch wenn sie sich nach n-maliger Wiederholung schliesst, vorausgesetzt nur, dass $n > 2$. Sinkt n auf 2 herab, so hat die Reihe als solche keinen eigenthümlichen Sinn mehr; sie hat auch zu wenig Constante, um die beiden complexen Punkte zu definiren. — Ist aber $n > 2$, so können wir die Punktreihe, die dann eine sogenannte cyklisch projectivische Reihe von n Punkten ist*), mit ihrem Sinne an Stelle der Massbestimmung setzen; *als Bild des einzelnen complexen Punktes dient dann also die in bestimmtem Sinne durchlaufene cyklisch projectivische Reihe.*

Statt der einen solchen Reihe mögen wir unendlich viele construiren, indem wir den Anfangspunkt a sich beliebig ändern lassen; wir mögen die unendlich vielen Reihen in der Weise auf einander folgen lassen, wie es ihre Anfangspunkte entsprechend einer positiven Zunahme der Entfernung von a thun. Ist n, wie wir voraussetzten, > 2, so können alle diese Punktreihen in bestimmter Aufeinanderfolge aus einer einzigen derselben durch Construction abgeleitet werden**); die Einführung der unendlich vielen Reihen hat nur den Zweck, dass sie den Werth beurtheilen lässt, den die einzelne Reihe zur Darstellung der complexen Grundpunkte besitzt; sie ist eben eine unter einfach unendlich vielen.

Ist aber $n = 2$, haben wir also mit Punktepaaren zu thun, die dann eine Involution bilden, so wird das gleichzeitige Betrachten von mindestens zwei Paaren nothwendig, denen dann noch der Sinn, in

---

*) Eine solche wird auf einer beliebigen Geraden von den n Strahlen ausgeschnitten, die den Winkelraum um einen Punkt herum in n gleiche Theile theilen; man erhält dabei die allgemeinste cyklisch projectivische Reihe, jede einmal.

**) Man erreicht dies am einfachsten, wenn man die erste Reihe durch n Strahlen eines Büschels bestimmt, die unter einander gleiche Winkel bilden; dreht man den Büschel um seinen Mittelpunkt, so schneiden die Strahlen alle weiteren Punktreihen aus.

welchem die Gerade durchlaufen werden soll, besonders hinzugefügt werden muss. *Dann hat man eben die v. Staudt'sche Interpretation.*

Nehmen wir aber, was am einfachsten scheint, $n = 3$. Man hat dann 3 Punkte auf der Geraden und zwar drei beliebige Punkte, da jedes System von 3 Punkten cyklisch projectivisch ist. Die Grundpunkte desselben werden durch die quadratische Covariante $\triangle$ der durch die drei Punkte repräsentirten cubischen Form f vorgestellt. Drei Punkte sind auch gerade nothwendig und hinreichend, um einen bestimmten Sinn auf den Geraden fest zulegen. *Wir repräsentiren also schliesslich den complexen Punkt durch drei beliebige in bestimmtem Sinne zu nehmende Punkte einer Geraden.* — Der complexe Punkt ist dann einer der beiden Punkte, die durch $\triangle = 0$ vorgestellt werden. Dass sich die Unterscheidung des Sinnes auf der Geraden mit der Unterscheidung der Factoren von $\triangle$ deckt, kommt darauf hinaus, dass die Festsetzung des Sinnes der Adjunction des Differenzenproductes der drei Wurzeln von $f = 0$ äquivalent ist, letzteres aber zugleich Differenzenproduct der Wurzeln von $\triangle = 0$ ist.

Es mag hier nicht näher ausgeführt werden, wie sich die constructiven Aufgaben, welche man für complexe Punkte stellen kann, unter Zugrundelegung dieser einfachsten Darstellung gestalten; dagegen mag noch kurz der Darstellung durch cyklisch projectivische Reihen von 4 Punkten a, b, c, d gedacht werden. Dieselbe fällt nämlich ihrem Wesen nach mit v. Staudt's „harmonischer" Darstellung der zur Definition der complexen Punkte dienenden Involution zusammen, und nur die Auffassung ist hier etwas anders. Bei v. Staudt hat man in den vier Punkten a, b, c, d zwei Paare der bez. Involution vor sich, nämlich ac und bd, und man schreibt die Punkte nur in der Reihenfolge a, b, c, d, um zugleich den Sinn auf der Geraden zu fixiren. Hier dagegen gehen die Punkte a, b, c, d in ihrer Reihenfolge durch dieselbe Operation aus einander hervor, und der Sinn findet sich von selbst mitbestimmt*).

---

*) Ausführlich beschäftigt sich mit der im Texte gegebenen Interpretation von geometrischer Seite Hr. Lüroth: Math. Annalen, Bd. XI. Den Fall $n = 3$ benutzt Hr. Harnack in der Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung (in Schlömilch's Zeitschrift, Bd. XXII). [Febr. 1883.]

Eine Uebertragung des Pascal'schen Satzes auf Raumgeometrie.

Von

F. Klein in Leipzig.

(Aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom 10. November 1873)*).

Man erhält ein eigenthümliches Princip zur Uebertragung von Sätzen der Ebene auf den Raum, wenn man die Riemann'sche Repräsentation einer complexen Variabeln auf der Kugelfläche mit der projectivischen Betrachtung der Gebilde zweiten Grades verbindet. Dasselbe soll im Folgenden kurz bezeichnet und insbesondere auf den Pascal'schen Satz angewendet werden.

Hesse hat bekanntlich eine Methode gegeben (Borchardt's Journal Bd. 66), um Sätze der Ebene auf die gerade Linie, — algebraisch ausgedrückt, auf das Werthgebiet einer einzelnen, im Sinne der linearen Invariantentheorie betrachteten, Variabeln — zu übertragen. Man lasse nämlich jeder geraden Linie der Ebene das Punktepaar entsprechen, in welchem sie einen festen Kegelschnitt schneidet, und beziehe den Kegelschnitt durch stereographische Projection auf eine feste Gerade. Die Punktepaare der Geraden werden so die Bilder der Linien der Ebene, und die ebene Geometrie ist mit der Geometrie der Geraden in Verbindung gesetzt, wenn man in ersterer die Linien, auf letzterer die Punktepaare als Elemente betrachtet.

Man repräsentire nun weiter das Werthgebiet der Variabeln, deren *reelle* Werthe allein auf der festen Geraden veranschaulicht waren, in Riemann'scher Weise auf einer Kugelfläche, oder, was eine leicht verständliche Verallgemeinerung ist, auf einer nicht gerad-

---

*) Es ist dies diejenige Arbeit, auf welche Hr. Wedekind bei seiner Definition des complexen Doppelverhältnisses von vier Punkten der Kugel Bezug nimmt, Bd. 9 dieser Annalen, pag. 209 ff. [Febr. 1883].

linigen reellen Fläche zweiten Grades*). Der geraden Linie der ursprünglichen Ebene, mochte sie reell oder complex sein, entspricht eindeutig ein reelles Punktepaar der Fläche, und dieses Punktepaar ersetze man wieder durch seine Verbindungsgerade. So hat man schliesslich eine Beziehung zwischen Ebene und Raum, *vermöge deren jeder reellen oder complexen Geraden der Ebene eine und im allgemeinen nur eine reelle Gerade des Raumes entspricht. Letztere ist in ihrer Lage dadurch beschränkt, dass sie gezwungen ist, eine nicht geradlinige reelle Fläche zweiten Grades zu treffen.*

Diese Beziehung hat namentlich folgende Eigenthümlichkeit: Zwei Gerade der Ebene, die mit den Tangenten, welche man durch ihren Durchschnittspunkt an den bei Herstellung der Beziehung benutzten festen Kegelschnitt legen kann, ein *reelles* Doppelverhältniss bilden, erhalten als Bilder zwei räumliche Gerade, die sich erstens *schneiden* und überdiess innerhalb des somit durch sie bestimmten Büschels mit den an die feste Fläche gelegten durch ihren Durchschnittspunkt gehenden Tangenten *dasselbe reelle* Doppelverhältniss bilden. Insbesondere also: Linien der Ebene, die in Bezug auf den festen Kegelschnitt conjugirt sind, werden wieder conjugirte, sich überdiess schneidende, Raumgeraden zu Bildern haben. Oder, wie man sich ausdrücken kann, indem man den Kegelschnitt in der Ebene, die Fläche im Raume nach Cayley's Vorgange als Fundamentalgebilde für eine projectivische Massbestimmung betrachtet: *Senkrechten Linien der Ebene entsprechen senkrechte, sich schneidende Linien des Raumes.*

Um das hiermit geschilderte Uebertragungsprincip auf den Pascal'schen Satz anzuwenden, mag man demselben folgende Form geben. Statt zu sagen, dass die drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsseits in einer Geraden liegen, kann man sich dahin ausdrücken, dass die Polaren dieser drei Punkte, d. h. die drei Geraden, welche bez. zu den zusammengehörigen Gegenseiten gleichzeitig conjugirt sind, zu einer vierten Geraden conjugirt sind; oder endlich, indem man nun den Kegelschnitt als Fundamentalgebilde einer projectivischen Massbestimmung wählt: *dass die gemeinsamen Perpendikel der Gegenseiten eines in das Fundamentalgebilde eingeschriebenen Sechsseits ein gemeinsames Perpendikel haben.*

Auf den Raum übertragen behält der Satz vollständig seine Form; und das ist die Verallgemeinerung des Pascal'schen Satzes, die hier

*) Man erhält diese Repräsentation, von der gewöhnlichen Darstellung der complexen Variabeln in der Ebene ausgehend, indem man die Ebene parallel zu der Tangentialebene der Fläche in einem ihrer Nabelpunkte legt und durch stereographische Projection von diesem Nabelpunkte aus Fläche und Ebene auf einander bezieht.

gegeben werden sollte. Unter „Fundamentalgebilde" ist nur eine geschlossene Fläche zweiten Grades verstanden; das in sie eingeschriebene Sechsseit braucht nicht eben zu sein, sondern kann irgendwie angenommen werden; endlich erscheinen alle Constructionen auf das Innere der Fläche beschränkt. Wollte man diese Beschränkung aufheben, wollte man ferner, was nahe liegt, zu weiterer Verallgemeinerung an Stelle der nicht geradlinigen reellen Fläche zweiten Grades eine beliebige Fläche zweiten Grades setzen, so würde zunächst eine gewisse Unbestimmtheit zu beseitigen sein, die daraus entsteht, dass die Construction des gemeinsamen Perpendikels zweier Raumgeraden in Cayley's Geometrie eine zweideutige ist und nur durch Beschränkung auf das Innere der nicht geradlinig vorausgesetzten reellen Fläche zu einer eindeutigen gemacht wird.

Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve.

Von

F. Klein in Leipzig.

(Aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom 8. December 1873)*).

Der allgemeine Functionsbegriff ist historisch aus der analytischen Geometrie (resp. aus der Mechanik und überhaupt der mathematischen Physik) erwachsen; aber es besteht kein Zweifel, dass er, um völlig correct zu sein, von jedem anschauungsmässigen Gebiete abgelöst und auf rein arithmetische Grundlage gestellt werden muss. Ich glaube, dass dies seither, auch nach Dirichlet's strenger Definition einer Function, noch nicht in hinreichendem Maasse geschehen ist**), so sehr das Bedürfniss dazu in allgemeinen mathematischen Kreisen empfunden wird. Und eben hierin scheint der Grund für die Schwierigkeiten zu liegen, die in so manchen Sätzen über willkürliche Functionen gefunden werden, wie z. B. in dem, dass es stetige Functionen ohne Differentialquotienten giebt.

Demgegenüber denke ich im Folgenden den rein arithmetischen Charakter des Functionsbegriffes deutlich zu bezeichnen (§ 1, 2). Ich gehe sodann dazu über, die Vorstellung der willkürlichen Curve zu analysiren (§ 3, 4) und finde, dass sie den aus ihr folgenden Eigenschaften nach nicht sowohl dem Functionsbegriffe als einem verwandten analytischen Begriffe, dem des *Functions-Streifens*, wie ich ihn nenne,

*) Im Zusammenhange mit dem im Texte wiederabgedruckten Aufsatze verweise ich auf die beiden im vorigen Jahre erschienenen Lehrbücher von Hrn. Pasch: „Vorlesungen über neuere Geometrie", und: „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung", (Leipzig, B. G. Teubner). Es ist meine Ansicht, dass, ähnlich wie im Texte, in jedem Lehrbuche der Differential- und Integralrechnung der Unterschied zwischen der unmittelbaren (physikalischen) Anschauung, und der abstracten, mathematischen Auffassung zur Sprache gebracht werden sollte. [Febr. 1883].

**) Wenigstens gelangte eine solche Auffassung noch nicht zur Darstellung. Ich kann aber nicht zweifeln, dass sich mancher Mathematiker dieselben Ueberlegungen mehr oder minder deutlich gebildet hat, wie sie im Texte entwickelt werden sollen.

entspricht (§ 5, 6). Den inneren Grund dafür erblicke ich, ganz allgemein gesagt, in der *Ungenauigkeit* unserer räumlichen Anschauung (§ 3). Ich bin mir freilich bewusst, dass ich mit diesem Versuche einer Begründung aus dem rein mathematischen Gebiete hinaustrete und psychologische Probleme berühre, über die etwas Richtiges auszusagen ausserordentlich schwierig ist. Aber einmal stehe ich mit der bez. Auffassung der Raumanschauung nicht allein (vergl. § 3); andererseits empfiehlt sie sich durch ihren Erfolg: die ganze Reihe von Misslichkeiten, welche die gewöhnliche Auffassung mit sich führt (§ 4), erledigt sich ohne Weiteres. In § 7 endlich gebe ich noch einige Sätze über den Gebrauch von Reihen zur Darstellung willkürlicher Curven.

§ 1.

Rein arithmetische Definition und Erzeugung einer Function.

Bei der Definition dessen, was Function zu nennen ist, wird man immer von einer reellen Grösse x als unabhängiger Variabeln ausgehen, die im Folgenden insbesondere so gedacht sein soll, dass sie nicht nur alle rationalen, sondern auch alle irrationalen Werthe annehmen kann*).

Eine andere Grösse y heisst eine (eindeutige) Function von x innerhalb eines Intervall's**), *wenn zu jedem Werthe von x innerhalb des Intervall's ein bestimmter Werth von y gehört.* Dies ist Dirichlet's bekannte Definition; aber man wird die weitere Frage aufwerfen, wie man eine solche Function herzustellen hat? Indem die Betrachtung der anschauungsmässigen Gebiete, welche nach der gewöhnlichen Auffassung hier von Belang sind, zunächst völlig bei Seite gelassen werden soll, stellen wir folgenden Satz als Ausgangspunkt voran:

*Es kann nie eine unendliche, sondern immer nur eine endliche Anzahl von Dingen als willkürlich gegeben vorausgesetzt werden****).

---

*) Der rein arithmetische Begriff der Irrationalzahl ist in neuerer Zeit von mehreren Seiten her scharf als solcher entwickelt worden, was hier angeführt sei, weil diese Schriften ihrer Tendenz nach mit dem, was in § 1, 2 des Textes auseinandergesetzt werden soll, übereinstimmen. Es sind: Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872; Heine, Die Elemente der Functionenlehre, Borchardt's Journal Bd. 74; Cantor, Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Mathematische Annalen, Bd. V.

**) An und für sich steht Nichts im Wege, von Functionen zu sprechen, die innerhalb verschiedener Intervalle oder auch nur für einzelne Werthe von x existiren. Aber die hierin liegende grössere Allgemeinheit würde für die Betrachtungen des Textes ohne Bedeutung sein, so dass es nicht nöthig scheint, sie explicite einzuführen.

***) Ich habe diesen Satz am schärfsten ausgesprochen und durchgeführt gefunden in Dühring's Natürlicher Dialectik (Berlin 1865).

Dementsprechend kann eine Function nie für die unendlich vielen Werthe des Argumentes, für die sie hergestellt werden soll, willkürlich gegeben sein, sondern *sie muss aus einer endlichen Zahl gegebener Elemente vermöge eines bestimmten Gesetzes für jeden Werth ihres Argumentes berechnet werden können.*

Es soll das nicht missverstanden werden. Wenn die Function nach gewöhnlicher Ausdrucksweise in verschiedenen Intervallen oder auch für einzelne Werthe des Argumentes verschiedenen Gesetzen genügt, so bezeichnen wir deren Inbegriff eben als *ein* Gesetz.

In diesem Gesetze und der in ihm liegenden *Möglichkeit* der Berechnung ist dann das Wesen der Function zu erblicken. Die Function ist, dementsprechend, nicht als *fertig existirend* vorzustellen, wie dies in Anlehnung an die räumliche Anschauung wohl nur zu oft geschieht; sie existirt, im strengen Sinne des Wortes, nur für die einzelnen Werthe des Argumentes, für die sie berechnet worden ist (was selbst wieder voraussetzt, dass es Werthe giebt, für welche die Berechnung durch einen endlichen Process geleistet werden kann).

Insofern zwei verschiedene Werthe, für die man die Berechnung durchgeführt haben mag, nothwendig *endlich* verschieden sind, hat man bei diesen Festsetzungen über das Verhalten der Function für unmittelbar auf einander folgende Argumente und also über das Vorhandensein oder Nicht-Vorhandensein eines Differentialquotienten gar keine Intuition; die Schwierigkeit, welche man in der Annahme stetiger Functionen ohne Differentialquotienten zu finden glaubt, existirt überhaupt nicht.

§ 2.

Von der Darstellung einer Function durch Reihen. Einführung des Functions-Streifens.

Entsprechend dem voraufgeschickten Satze von der Unmöglichkeit, unendlich viele Dinge als willkürlieh gegeben anzunehmen, hat eine unendliche Reihe von Operationen nur dann einen bestimmten Sinn, wenn wir in ihr bloss eine *endliche* Anzahl von Bestimmungen willkürlich denken, die übrigen durch ein *Gesetz* aus ihr ableiten. So ist es z. B. mit einer Potenzreihe; wir können von einer solchen Reihe als einer gegebenen nur sprechen, indem wir uns die Coefficienten der in's Unendliche fortlaufenden Glieder durch eine Regel aus einer endlichen Anzahl voraufgegangener bestimmt denken*).

Wenn wir, ohne weitere Beschränkung, sagen, dass eine Reihe

*) Ich bin hierauf gelegentlich von Hrn. Kronecker gesprächsweise aufmerksam gemacht worden; in seiner Bemerkung lag für mich wohl der erste Anlass, mir die in § 1, 2 des Textes niedergelegte Anschauung zu bilden.

eine gewisse Function *darstellen* könne, so meinen wir einfach, dass das Gesetz, welches zur Berechnung der Function diente, in die Form des durch die Reihe angegebenen regelmässigen Processes gebracht werden kann.

Etwas, was von dieser *exacten* Darstellung einer Function durch eine Reihe begrifflich durchaus verschieden ist, was aber unter verschiedenen Gesichtspunkten (und insbesondere in allen Fällen der Anwendung auf praktische Verhältnisse) dasselbe leistet, ist *die nur approximative Darstellung* einer Function. Wir sagen, dass eine (endliche oder unendliche) Reihe eine gegebene Function approximativ darstelle, wenn der Unterschied des Functionswerthes und des aus der Reihe berechneten immer kleiner ist, als eine *gegebene* Grösse δ. Die Darstellung würde nur dann eine exacte sein, wenn diese Grösse *beliebig* gelassen werden könnte.

Ueber die Möglichkeit der approximativen Darstellung von Functionen durch Reihen lassen sich ohne Weiteres allgemeine Sätze aufstellen, wie das in der Folge noch geschehen soll (§ 7), während es bekannt ist, dass über die Möglichkeit einer exacten Darstellung durch die gewöhnlich gebrauchten Reihen so lange Nichts behauptet werden kann, als nicht die im allgemeinen Functionsbegriffe liegende Willkürlichkeit beträchtlich eingeschränkt ist und namentlich sehr viel mehr eingeschränkt ist, als es durch die blosse Annahme der Stetigkeit geschieht.

Die nur approximative Darstellung einer Function charakterisirt einen wichtigen Theil mathematischer Speculation, in welchem nicht von den exacten, sondern nur von den angenäherten Relationen der Grössen gehandelt wird*). In ihm wird man alle Functionen, deren Werthe um weniger als eine gegebene Grösse δ von einander abweichen, zu einem Ganzen zusammenfassen, das dann durch eine Gleichung der Form

$$y = f(x) + \varepsilon \qquad \varepsilon < \delta$$

charakterisirt sein wird. Ein solches umfassendes Gebiet von zwei Dimensionen ist es, welches im Folgenden als ein *Functionsstreifen* oder schlechthin als ein *Streifen* bezeichnet werden soll. Diese Benennung ist mit Absicht so gewählt, dass sie an die geometrische Anschauung erinnert; denn diese kann, wie die weitere Ueberlegung zeigt, für die Theorie der Streifen, wie dieselbe im Folgenden gebraucht werden soll, ohne Weiteres verwendet werden (vergl. § 5).

Was ein Streifen ist, mag durch die vorstehenden Sätze nur erst veranschaulicht, noch nicht scharf definirt sein. In der That

*) In diesen Theil ist z. B. fast die ganze sogenannte „angewandte Mathematik" zu verweisen.

werden wir weiterhin (§ 5) noch eine wesentliche Zusatzbestimmung treffen und überdiess die Willkürlichkeit der zu Grunde liegenden Function $f(x)$ in einem gewissen Sinne einschränken.

§ 3.

Ueber die Möglichkeit, eine Function durch eine Curve darzustellen.

Indem ich mich nunmehr zu der Frage wende, in wie weit eine Function anschauungsmässig gegeben sein kann, beschränke ich mich auf das abstracteste unter den hier in Betracht kommenden Gebieten, auf den *Raum*, und, da nur von zwei Veränderlichen die Rede sein soll, auf die Ebene*). Die Punkte der Ebene seien in gewöhnlicher Weise durch die Werthe von y und x repräsentirt; ist es möglich, durch eine in der Ebene verlaufende Curve ein Functionsverhältniss zwischen y und x genau zu bezeichnen?

Durch eine willkürlich *gezeichnete* Curve sicher nicht; denn die Zeichnung sowohl als ihre spätere Beobachtung sind, wie alle derartigen Thätigkeiten, nur von approximativer Genauigkeit.

Durch eine *gesetzmässig erzeugte Curve* gewiss, sofern das Gesetz mitgetheilt wird, welches sie beherrscht. Aber in dem Falle ist es eben dieses Gesetz und die Voraussetzung voller Genauigkeit der geometrischen Axiome, durch welche die Function bestimmt wird; die Frage, mit der wir uns hier beschäftigen wollen, liegt in einer wesentlich anderen Richtung.

Es soll sich nämlich darum handeln, ob man sich eine Curve überhaupt exact vorstellen und dieselbe somit, wenn auch nur subjectiv, als genaues Bild einer Function betrachten könne? wobei es denn gleichgültig sein wird, ob wir uns die Curve willkürlich oder vermöge eines bestimmten Gesetzes construirt denken. Ich behaupte: *Nein. Die Vorstellung einer Curve hat nur approximative Genauigkeit; das analytische Gegenbild der Curve ist nicht die Function, sondern der Streifen.* Es mag zunächst der Sinn dieser Behauptung näher formulirt und erst in den folgenden Paragraphen auf die Vortheile hingewiesen werden, welche aus ihr hervorgehen. Nach der psychologischen Seite soll sie sich insbesondere auf diejenigen Erörterungen stützen, die neuerdings von Hrn. *Stumpf* in seinem Buche: „Ueber den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung" (Leipzig, 1873) gegeben worden sind (vergl. daselbst bes. p. 280).

Das Element der räumlichen Anschauung ist im Sinne der hier vorzutragenden Ansicht nicht der einzelne Punkt, sondern der (dreifach)

---

*) Auf mechanische Vorstellungen wird man im Grossen und Ganzen die Betrachtungen des Textes übertragen können.

ausgedehnte Körper*). Wir können uns den Körper in hohem Maasse verkleinert denken, bekommen aber niemals die fertige Anschauung eines einzelnen Punktes. Es ist in demselben Sinne unmöglich, eine Curve exact vorzustellen; wir erblicken immer einen Körper, von dem nur zwei Dimensionen beträchtlich gegen die dritte zurücktreten. Wenn wir Geometrie auf einer Fläche, also insbesondere Geometrie der Ebene treiben, so ist damit die Tiefenvorstellung nicht ausgeschlossen; es wird nur nicht auf sie geachtet.

Bezüglich der Breite, die wir einer Curve in unserer Anschauung beilegen, gelten dann die folgenden Bestimmungen, die geeignet scheinen, den Gegenstand, um den es sich handelt, noch deutlicher zu bezeichnen: Man kann die Breite für einzelne Stellen der Curve durch Concentriren der Aufmerksamkeit auf dieselben beträchtlich verringern, aber wohl nicht**) unter jede gegebene Grenze und sicher nicht unter jede beliebige Grenze. Für jede Stelle aber, die selbständig aufgefasst wird, ist dabei ein besonderer Act der Aufmerksamkeit nothwendig, wie man am besten wahrnimmt, wenn man sich die Curve in sehr viel grösserem Maassstabe denkt, als man gewohnt ist.

§ 4.

Schwierigkeiten, die sich ergeben, wenn man Curve und Function entsprechend setzt.

Entgegen der Behauptung, wie sie im vorigen Paragraphen entwickelt wurde, soll jetzt zunächst ein genaues Entsprechen von Curve und Function angenommen und auf die Widersprüche hingewiesen werden, welche dann entstehen. Es versteht sich dabei von selbst, dass der zusammenhängenden Curve nur eine Function ohne alle Unstetigkeiten entsprechend gesetzt werden kann.

Eine Curve hat, nach der Anschauung, die wir thatsächlich besitzen***), in jedem Punkte eine Tangente. *Dementsprechend müsste jede stetige Function einen ersten Differentialquotienten haben, was nicht richtig ist.*

---

*) Hierin also liegt ein fundamentaler Unterschied zwischen unserer Vorstellung vom Punktraume und demjenigen arithmetischen Begriffe, den man als sein Analogon construirt hat, nämlich dem Begriffe der (n-fach ausgedehnten) *Mannigfaltigkeit;* das Erste bei der Auffassung der Mannigfaltigkeit ist das einzelne Werthsystem.

**) In der That scheint es unmöglich, einen Körper von gegebener Grösse zu denken, wenn diese Grösse sehr klein angenommen wird.

***) Nur von dieser (gewohnheitsmässigen) Anschauung ist im Texte überhaupt die Rede; ob wir dieselbe ev. werden modificiren können, ist eine Frage, die durchaus jenseits der Grenzen unserer Betrachtung liegt.

Die Neigung dieser Tangente ändert sich, unserer Anschauung entsprechend, stetig, wenn wir auf der Curve fortschreiten. Sie ist also selbst wieder durch eine stetige Function vorgestellt, die man von Neuem durch eine Curve repräsentiren mag. Man findet so, dass jede stetige Function nicht nur einen ersten, sondern auch einen zweiten Differentialquotienten hat; und wenn man in derselben Weise fortfährt, ergiebt sich, dass sie auch einen dritten, vierten, ..., überhaupt unbegrenzt viele Differentialquotienten besitzt. Aber eine solche Function ist, nach dem Taylor'schen Satze, durch ihren Verlauf in dem kleinsten Intervalle gegeben*). *Eine willkürliche Curve müsste also durch ihr kleinstes Stück völlig bestimmt sein*, was eine Contradictio in adjecto ist.

Wäre sie es nicht, so gäbe es eine neue Schwierigkeit. Ist eine Curve, ob auch willkürlich, in allen Punkten exact aufzufassen, so würde es möglich sein, eine Function für jeden Werth ihres Argumentes innerhalb eines Intervall's willkürlich zu geben, *und dies verstösst gegen die in* § 1 *formulirte Unmöglichkeit, unendlich viele Dinge als willkürlich gegeben vorauszusetzen.*

Die entwickelten Schwierigkeiten fallen fort, wenn man die Curve nicht der Function, sondern dem Functionsstreifen adäquat setzt, wie nun gezeigt werden soll. Zugleich scheint dies die einzige Lösung zu sein, welche hier möglich ist. Wenigstens ist eine andere Lösung, so viel ich weiss, noch nicht vorgeschlagen worden**).

§ 5.

Nähere Betrachtung der Functionsstreifen.

Den Functionsstreifen führten wir in § 2 durch eine Gleichung

$$y = f(x) \pm \varepsilon \qquad \varepsilon < \delta$$

in die Betrachtung ein. Wählen wir die gegebene Grösse δ so gross, dass sie bei räumlicher Repräsentation der y und x eine merkliche Strecke bezeichnet, so stellt die vorstehende Gleichung eben dasjenige

*) Dies ist, neueren Untersuchungen zufolge, ein Irrthum; vergl. du Bois, Bd. XXI dieser Annalen, pag. 109 ff. Der Einwurf des Textes sollte also vorsichtiger formulirt werden. [Febr. 1883.]

**) In einer Rede vor der British Association zu Brighton (1872 On the aims and instruments of scientific thoughts) hat Hr. Clifford darauf aufmerksam gemacht, dass eine Erledigung der entsprechenden Schwierigkeiten, die sich bei der Betrachtung der mechanischen Probleme aufdrängen, sachlich darin gesucht werden könne, dass man für unsere continuirliche Anschauung ein discontinuirliches Substrat voraussetzt — eine Vorstellungsweise, die sich auch schon in Riemann's Abhandlung: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, als eine mit den Thatsachen verträgliche angedeutet findet. Eine solche Vorstellung von dem, was unserer Anschauung in der Sphäre des Sein's entspricht, macht die Erläuterungen des Textes nicht nur nicht überflüssig, sondern muss dieselben geradezu voraussetzen.

dar, was man auch in der gewöhnlichen Ausdrucksweise als einen *Streifen* bezeichnet, und wofür ein *Weg*, ein *Strom* der gewöhnlichen Anschauung entnommene Bilder sein mögen.

Die Ränder eines solchen Streifen's wird man, je nachdem man sich der in § 3 formulirten Ansicht anschliesst, oder nicht, als unbestimmt und nur approximativ gegeben oder als völlig bestimmt vorstellen. Demgegenüber soll jetzt die analytische Definition so gestellt werden, dass diese Ränder unbestimmt gedacht werden *müssen*. Es möge nämlich ϱ eine gegen δ sehr kleine Grösse bezeichnen, die aber im Uebrigen völlig unbestimmt gelassen wird, *und der Streifen sei fortan definirt durch die Gleichung:*

$$y = f(x) \pm \varepsilon \qquad \varepsilon < \delta - \varrho.$$

Wir haben sodann noch eine Beschränkung hinsichtlich der Willkürlichkeit von $f(x)$ hinzuzufügen, damit der analytische Ausdruck völlig dem geometrischen Anschauungsbilde entspricht, wie es durch die Worte: Weg, Strom bezeichnet wird. Diese Bilder sagen nämlich aus, dass wir es mit einem Gebiete zu thun haben, das in einer Dimension sehr viel ausgedehnter als in der anderen ist. Analytisch wird man dies so formuliren können: Sei λ im Vergleiche zu δ eine beträchtliche, μ eine geringe Zahl; so bestimme man für alle in Betracht kommenden Werthe x_0 der unabhängigen Variabeln eine lineare Function

$$y = \alpha x + \beta,$$

welche für die Argumente x_0 und $x_0 + \lambda$ mit den Werthen $f(x_0)$ und $f(x_0 + \lambda)$ zusammenfällt (was natürlich voraussetzt, dass innerhalb des Intervall's, für welches die Function existirt, Differenzen von der Grösse λ Platz finden). Die hinzutretende Voraussetzung sei dann die, *dass diese lineare Function innerhalb des Intervall's von x_0 bis $x_0 + \lambda$ von der gegebenen Function $f(x)$ nirgends um mehr als um μ abweicht.*

Man kann dann zeigen, dass die Abweichung der Function $f(x)$ innerhalb der beiden Intervalle x_0 bis $x_0 + \lambda$ und $x_0 + \lambda$ bis $x_0 + 2\lambda$ von einer quadratischen Function:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

die mit ihr für die Werthe x_0, $x_0 + \lambda$, $x_0 + 2\lambda$ des Argumentes übereinstimmt, ebenfalls in bestimmte Grenzen eingeschlossen ist etc.

§ 6.

Fortsetzung. Differentialquotienten eines Streifens. Zahl der Bestimmungsstücke, von denen ein Streifen abhängt.

Was geometrisch unter der *Richtung* eines Streifens, unter seiner *Krümmung* zu verstehen ist, ist ersichtlich; beide sind keine exact

bestimmten Grössen, sondern nur in dem Maasse genauer anzugeben, als der Streifen schmaler ist. Dementsprechend wird man analytisch von *einem ersten und zweiten Differentialquotienten des Streifens* als approximativ gegebenen Grössen reden können. Als ersten Differentialquotienten im Punkte x_0 wird man geradezu den ersten Differentialquotienten der im vorigen Paragraphen aufgestellten berührenden linearen Function, α, oder auch der dort gegebenen berührenden quadratischen Function, $2ax_0 + b$, bezeichnen können. Als zweiten Differentialquotienten mag man den zweiten Differentialquotienten der ersetzenden quadratischen Function, also $2a$, einführen. Die Grenzen, zwischen welche diese Angaben eingeschlossen sind, rücken in dem Maasse enger an einander, als man die Quotienten $\frac{\lambda}{\delta}$ und $\frac{\mu}{\delta}$ der im vorigen Paragraphen eingeführten Hülfsgrössen beträchtlicher resp. geringer annimmt. Ueberhaupt wird man von einem n^{ten} Differentialquotienten des Streifens reden können; ein solcher Quotient ist niemals exact aber immer approximativ bestimmt.

Der Unterschied aber besteht zwischen den Differentialquotienten einer Function und eines Streifens (abgesehen davon, dass letzterer keine exact gegebene Grösse ist): dass bei der Function der betr. Quotient streng an dem einzelnen Werthe des Argumentes haftet, dass er bei dem Streifen dagegen sich erst durch Beurtheilung des Gesammtverlaufes ergiebt.

Achten wir noch auf das Maass der Willkürlichkeit, deren ein Streifen fähig ist, wobei ausdrücklich an die Unbestimmtheit seiner Ränder erinnert werden soll. Dementsprechend ist nämlich ein Streifen so vollkommen, als überhaupt möglich, bestimmt, wenn wir in jeder Strecke λ seines Intervalls eine endliche (hinreichend grosse) Zahl ihm angehöriger Punkte kennen. *Der Streifen selbst hängt also nur von einer endlichen Zahl willkürlicher Festsetzungen ab.*

Vergleichen wir das Resultat dieser Ueberlegungen mit den Widersprüchen, die sich in § 4 ergaben, wo wir die Curve als exact dem Begriffe der Function entsprechend auffassen wollten. So ist ersichtlich, dass die letzteren alle fortfallen, sobald wir die Curve dem Streifen entsprechend setzen. *Die Schwierigkeiten betr. die Differentialquotienten existiren nicht mehr, weil letztere jetzt eine andere Definition erhalten haben; der Widerspruch, dass unendlich viele Dinge als gegeben vorausgesetzt werden müssten, ist weggehoben, da die willkürliche Curve nur von einer endlichen Zahl von Festsetzungen abhängt.* Und dieses ist die hauptsächlichste Einsicht, welche durch die gegenwärtige Mittheilung entwickelt werden sollte.

§ 7.

Repräsentation der Streifen (Curven) durch Reihen.

Noch einige Bemerkungen über die Repräsentation von Streifen durch Functionen und insbesondere durch Reihen mögen hier zugesetzt werden. Wir werden dabei sagen, dass eine Function einen Streifen darstelle, wenn alle ihre Werthe dem Gebiete des Streifens angehören. Es ist dabei weder nöthig, dass die Function Differentialquotienten besitzt (nicht einmal, dass sie stetig ist), noch auch, wenn sie solche besitzt, dass dieselben mit den Differentialquotienten des Streifens übereinstimmen. Aber man wird diejenige Darstellung für die vollkommenste halten, bei der dies der Fall ist.

Als ein erstes Beispiel nenne ich eine nach dem Vorhergehenden naheliegende Darstellung durch Fourier'sche Reihen. Man verbinde nämlich (geometrisch geredet) Punkte, welche dem Streifen angehören und den Argumenten

$$-n\lambda, \cdots, -\lambda, o, +\lambda, \cdots, +n\lambda$$

entsprechen, so wie sie auf einander folgen, durch begrenzte gerade Linien; das entstehende Polygon repräsentire man durch eine Fourier'-sche Reihe. *Dann hat man eine Repräsentation des Streifens durch eine Function, die mit alleiniger Ausnahme der Punkte*

$$x = o, \pm\lambda, \cdots, \pm n\lambda$$

überall Differentialquotienten hat. Die ersten Differentialquotienten stimmen mit denen des Streifens (*annähernd*) *überein; die übrigen nicht, sie haben den constanten Werth Null.*

Diese Art der Repräsentation hat den Vorzug, an jeder Stelle nur von dem Verlaufe des Streifens in nächster Nähe abhängig zu sein, und also die Willkürlichkeit, die wir in den Streifen hineinlegen, auch analytisch zum Ausdrucke zu bringen.

Als ein zweites Beispiel, das den entgegengesetzten Charakter besitzt, sei die Darstellung des Streifens durch eine *Potenzreihe* genannt. Wir können, vermittelst der bekannten Lagrange'schen Interpolationsformel eine Potenzreihe herstellen, welche jede beliebige (endliche) Anzahl von Punkten des Streifens enthält. Man überzeugt sich — und dieser Satz liegt implicite der Definition der Differentialquotienten eines Streifens in § 6 zu Grunde — dass bei richtiger Wahl der bestimmenden Punkte nicht nur die Potenzreihe selbst den Streifen annähernd darstellt, sondern namentlich auch, dass ihre Differentialquotienten an jedem Punkte mit den bez. Differentialquotienten des Streifens approximativ übereinstimmen. *In diesem Sinne kann also jeder Streifen durch eine Potenzreihe dargestellt werden.*

Schliesst man sich der Anschauung an, dass eine Curve nichts anderes ist, als ein Streifen, so sind diese Sätze Fundamentalsätze über die Darstellung willkürlicher Curven.

§ 8.

Schlussbemerkung.

Die vorgetragenen Betrachtungen legen die Frage nahe, in wie weit es in analytischen Untersuchungen gestattet ist, geometrische Anschauung zu verwenden. Diese Frage ist um so wichtiger, als man einen Gebrauch dieser Anschauung in den mannigfachsten Gebieten nicht nur in ausgiebigster Weise, sondern auch mit dem grössten Erfolge macht. Ich denke dabei nicht sowohl an eigentliche Geometrie, die ja ausser in dem lebendigen Erfassen des im Raume Angeschauten noch an den Axiomen eine Stütze findet, als vielmehr an solche Disciplinen, wie Analysis situs oder geometrische Theorie der Differentialgleichungen. Es dürfte sehr schwer sein, die Grenzen für die Richtigkeit solcher Betrachtungen allgemein anzugeben. Aber die Fruchtbarkeit, welche diese Verknüpfung analytischer Probleme mit der Raumanschauung besitzt, scheint auf die erhöhte *Uebersicht* hinauszukommen, welche diese Anschauung mit sich führt, und für welche die nach der entwickelten Ansicht fehlende Genauigkeit im Kleinen nicht nur kein Hinderniss, sondern geradezu eine Förderung ist.

Ueber die Integration der trigonometrischen Reihe.

Von

Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Heine's Satz*), dass die Fourier'sche Reihe in Strecken, in denen ihre Summe eine stetige Function ist, vollständig**) convergirt, gestattet zwar diese Reihe gliedweise zu integriren, falls ihre Sprungstellen nur in endlicher Zahl oder in geeignet gruppirten unbegrenzten Mengen vorhanden sind, aber über die gliedweise Integrirbarkeit von trigonometrischen Reihen mit nur integrirbar vorausgesetzter Summe kann auf Grund des Heine'schen Satzes Nichts ausgesagt werden.

Wir nehmen an

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_1 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_1 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx \end{aligned} \right\} + \text{etc.}$$

sei im weitesten Sinne integrirbar, wobei unbegrenzt grosse Werthe von $f(x)$ nicht ausgeschlossen sind.***) Alsdann ist erwiesen †), dass

*) Borch. Journ. Bd. 71, S. 353—365 und Theorie der Kegelfunct. II. Aufl. S. 53ff.

**) Ich nenne eine Reihe $u_1(x) + u_2(x) +$ etc. vollständig convergent im *Punkt* $x = x_1$, wenn $u_1(x_1) + u_2(x_1) +$ etc. convergirt, und $\sum_1^n u_p(x_1 + \delta)$ den nämlichen Limes wie $u_1(x_1) + u_2(x_1) +$ etc. hat, in welcher gegenseitigen Beziehung man auch n ins Unbegrenzte wachsen und δ ins Unbegrenzte abnehmen lassen möge. In einem *Intervall* convergirt die Reihe $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ vollständig, wenn sie in jedem Punkt vollständig convergirt. Ich werde nächstens diese Benennung „vollständig" gegenüber dem üblichen „gleichmässig" rechtfertigen.

***) Ueber die Art des unbegrenzten Anwachsens der Function, siehe die Art. 22, 23, 24 der in der folgenden Anm. cit. Abh.

†) Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe etc., Abh. d. k. bayer. Akad. der W., II Cl., XII Bd., I Abth.

(2) $$\pi f(x) = \lim_{h=\infty} \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha f(2\alpha + x) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

wo $h = 2n + 1$ die Succession der ungeraden Zahlen vorstellt.

Es handelt sich also um den Limes:

(3) $$\lim_{h=\infty} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha f(2\alpha + x) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha},$$

wobei wir zunächst $-\pi < x_0 < x_1 < +\pi$ annehmen wollen.

Das innere Integral zerfällen wir in die Theile

(4) $$\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} + \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{0}$$

und untersuchen zuerst den Limes von

(5) $$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha\, f(2\alpha + x) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}.$$

Wenn x wachsend von x_0 bis x_1 geht, so geht $\frac{\pi - x}{2}$ positiv und abnehmend von $\frac{\pi - x_0}{2}$ bis $\frac{\pi - x_1}{2}$. Das innere Integral in (5) zerlegen wir in

(6) $$\int_0^{\frac{\pi-x_1}{2}} + \int_{\frac{\pi-x_1}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}}$$

und betrachten zuerst den Limes von

(7) $$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\frac{\pi-x_1}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha f(2\alpha + x) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}.$$

Hierin $\frac{\pi - x}{2} = u$ gesetzt, kommt:

(8) $$2 \int_{\frac{\pi-x_1}{2}}^{\frac{\pi-x_0}{2}} du \int_{\frac{\pi-x_1}{2}}^{u} d\alpha f(2\alpha + \pi - 2u) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha},$$

was auf Grund der Formel:

$$(9)\qquad \int_a^b d\varrho \int_a^\varrho d\sigma\, \varphi(\varrho,\sigma) = \int_a^b d\varrho \int_\varrho^b d\sigma\, \varphi(\sigma,\varrho)$$

übergeht in:

$$(10)\qquad 2\int_{\frac{\pi-x_1}{2}}^{\frac{\pi-x_0}{2}} du \int_u^{\frac{\pi-x_0}{2}} d\alpha\, f(2u+\pi-2\alpha)\,\frac{\sin hu}{\sin u}.$$

Die Function von u:

$$(11)\qquad \int_u^{\frac{\pi-x_0}{2}} d\alpha f(2u+\pi-2\alpha) = \frac{1}{2}\int_{x_0+2u}^{\pi} d\beta\, f(\beta)$$

ist offenbar integrirbar, und da die Grenzen der äusseren Integration in (10) die Null von u ausschliessen, so ist nach dem 1. Hauptsatz der Theorie der darstellenden Integrale*) der Limes von (7):

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\frac{\pi-x_1}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha\, f(2\alpha+x)\,\frac{\sin h\alpha}{\sin\alpha}$$

gleich Null.

Das Integral

$$(12)\qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{\frac{\pi-x_1}{2}} d\alpha\, f(2\alpha+x)\,\frac{\sin h\alpha}{\sin\alpha}$$

des ersten Theils in (6) wird

$$(13)\qquad = \int_0^{\frac{\pi-x_1}{2}} d\alpha\,\frac{\sin h\alpha}{\sin\alpha}\int_{x_0}^{x_1} dx\, f(2\alpha+x),$$

und hat offenbar den Limes $\frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} d\alpha\, f(\alpha)$. Denn giebt man dem inneren Integral die Form:

$$(14)\qquad \int_{x_0+2\alpha}^{x_1+2\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{x_1+2\alpha} f(x)\,dx - \int_0^{x_0+2\alpha} f(x)\,dx,$$

und zerlegt auf die mehrfach von mir benutzte Weise die Function

*) Borchardt's Journ. Bd. 79, pag. 41.

$f(x)$ in $\varphi(x)+\psi(x)$ wo $\varphi(x)$ gleich $f(x)$ oder Null und $\psi(x)$ gleich Null oder $f(x)$ ist, jenachdem $f(x)$ positiv oder negativ*), so ändern sich die Integrale links in:

$$(15)\quad \int_0^{x_1+2\alpha}\varphi(x)\,dx+\int_0^{x_1+2\alpha}\psi(x)\,dx-\int_0^{x_0+2\alpha}\varphi(x)\,dx-\int_0^{x_0+2\alpha}\psi(x)\,dx=\int_{x_0+2\alpha}^{x_1+2\alpha}f(x)\,dx$$

sämmtlich monoton mit α. Sie sind überdies stetige Functionen von α, falls das Integral $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ absolut convergent ist, d. i. falls $f(x)$ nur so unbegrenzt grosse Werthe annehmen kann, dass $\int_0^{\pi}\text{mod.}\,f(x)\,dx$ endlich und bestimmt ist.**) Dieses Integral erhält die Grenzen 0 und π, da in dem Integral $\int_0^{x_1+2\alpha}$ α von 0 bis $\frac{\pi-x_1}{2}$ gehen kann.

Nun ist noch das Integral (4):

$$(16)\qquad \int_{x_0}^{x_1}dx\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{0}d\alpha\, f(2\alpha+x)\,\frac{\sin h\alpha}{\sin\alpha}$$

zu untersuchen. Wenn das innere Integral zerlegt wird in

$$(17)\qquad \int_{-\frac{\pi+x_0}{2}}^{0}+\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{-\frac{\pi+x_0}{2}}$$

so kommt statt 8:

$$(18)\qquad 2\int_{-\frac{\pi+x_0}{2}}^{-\frac{\pi+x_1}{2}}du\int_{-\frac{\pi+x_0}{2}}^{u}d\alpha\, f(2\alpha-\pi-2u)\,\frac{\sin h\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Das Weitere entsprechend wie oben. Es ergiebt sich $\frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx$ als

---

*) Mit $f(x)$ sind dann $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ natürlich ebenfalls integrirbar.

**) Ich lasse es hier bei dieser hinreichenden Bedingung bewenden, die indessen auf Grund der in der dritten Anm. zu diesem Aufsatz cit. Ausführungen leicht etwas erweitert werden kann.

Limes von (16) unter der hinreichenden Bedingung, dass $\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\,dx$ absolut convergent sei.

Endlich sei $x_1 = \pi$. Dann fällt in (6) das erste Integral fort und das zweite

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi - x}{2}}$$

giebt statt (8) und (10) die Ausdrücke:

$$2\int\limits_{0}^{\frac{\pi - x_0}{2}} du \int\limits_{0}^{u} d\alpha\, f(2\alpha + \pi - 2u)\, \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} \tag{19}$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi - x_0}{2}} du \int\limits_{u}^{\frac{\pi - x_0}{2}} d\alpha\, f(2u + \pi - 2\alpha)\, \frac{\sin hu}{\sin u} \tag{20}$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi - x_0}{2}} du \frac{\sin hu}{\sin u} \int\limits_{x_0 + 2u}^{\pi} d\beta\, f(\beta). \tag{21}$$

Der Limes wird also $\frac{\pi}{2}\int\limits_{x_0}^{\pi} d\beta\, f(\beta)$. An den Ausdrücken (16) etc. ändert sich nichts Wesentliches. Ganz ähnliche Bemerkungen erledigen den Fall $x_0 = -\pi$.

Wenn sodann das Intervall $x_0 \ldots x_1$ sich über eine oder beide Grenzen des Intervalls $-\pi \cdots + \pi$ hinaus erstreckt, so zerlegt man es in Intervalle, die dem oben betrachteten analog sind, was bei der Periodicität der Reihe immer möglich ist.

So entsteht der Satz:

Es sei

$$f(x) = \left.\begin{matrix} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx \end{matrix}\right\} + \text{etc.}$$

eine solche Function, dass

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} dx \text{ mod. } f(x)$$

endlich und bestimmt ist. Alsdann convergirt stets die Reihe

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &a_0(x_1-x_0)-a_1(\sin x_1-\sin x_0)-\frac{a_2}{2}(\sin 2x_1-\sin 2x_0)\\ &\qquad\qquad-\cdots-\frac{a_n}{n}(\sin nx_1-\sin nx_0)\\ &\qquad+b_1(\cos x_1-\cos x_0)+\frac{b_2}{2}(\cos 2x_1-\cos 2x_0)\\ &\qquad\qquad+\cdots+\frac{b_n}{n}(\cos nx_1-\cos nx_0)\end{aligned}\right\}+\text{etc.},$$

und zwar gegen den Werth

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

2.

Zum Schluss wollen wir noch die Summe der Reihe

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} F(x)&=a_0x-a_1\sin x-\frac{a_2}{2}\sin 2x-\cdots-\frac{a_n}{n}\sin nx\\ &\qquad+b_1\cos x+\frac{b_2}{2}\cos 2x+\cdots+\frac{b_n}{n}\cos nx\end{aligned}\right\}+\text{etc.}$$

aufsuchen.

Aus (22) folgt für $x_0=0$, $x_1=x$

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &a_0x-a_1\sin x-\frac{a_2}{2}\sin 2x-\cdots-\frac{a_n}{n}\sin nx\\ &\quad+b_1\cos x+\frac{b_2}{2}\cos 2x+\cdots+\frac{b_n}{n}\cos nx\\ &\qquad\qquad-\sum_1^n\frac{b_p}{p}\end{aligned}\right\}+\text{etc.}=\int_0^x f(x)\,dx.$$

Hierin $x=\pi$ gesetzt, ergiebt sich:

$$(25)\qquad a_0\pi-2\sum_0^\infty\frac{b_{2p+1}}{2p+1}=\int_0^\pi f(x)\,dx$$

wo $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx$. Die Reihe $\sum\frac{b_p}{p}$ über die ungeraden p ist also convergent. Es frägt sich ob die Reihe $\sum\frac{b_p}{p}$, über sämmtliche p summirt, ebenfalls convergirt. Um dies zu entscheiden, integriren wir (24) noch einmal, d. i. wir integriren das zweimalige Integral

hinter lim in 3, nach x_1, indem wir $x_0 = 0$ annehmen, bilden also den Ausdruck:

$$(26) \qquad \int_0^X dx_1 \int_0^{x_1} dx \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha\, f(2\alpha + x) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

und suchen dessen Limes nach h. Geben wir (26) die Form:

$$(27) \qquad \int_0^X dx\,(X - x) \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha\, f(2\alpha + x) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha},$$

so ist von den beiden Integralen

$$(28) \quad X \int_0^X dx \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha\, f(2\alpha + x) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} - \int_0^X dx \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha\, x f(2\alpha + x) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

das erste nach dem obigen schon erledigt, sein Limes ist

$$\pi X \int_0^X f(x)\, dx.$$

Das zweite werden wir schreiben:

$$(29) \int_0^X dx \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha\,(2\alpha + x) f(2\alpha + x) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} - 2 \int_0^X dx \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha f(2\alpha + x) \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin h\alpha.$$

Von diesen beiden Integralen giebt das erste wie oben behandelt den Limes

$$\pi \int_0^X x f(x)\, dx,$$

das zweite, wegen des I. Hauptsatzes der Theorie der darstellenden Integrale, den Limes 0. Somit hat (26) im Ganzen den Limes

$$\pi \int_0^X dx_1 \int_0^{x_1} dx\, f(x).$$

Mithin erhalten wir aus (24), wenn wir nach x von 0 bis X integriren:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} & a_0\frac{X^2}{2}+a_1\cos X+\frac{a^2}{2^2}\cos 2X+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\cos nX \\ & \qquad +b_1\sin X+\frac{b^2}{2^2}\sin 2X+\cdots+\frac{b_n}{n^2}\sin nX \\ & \qquad\qquad +a_0\frac{X^2}{2}-\sum_1^n\frac{a_p}{p^2}-X\sum_1^n\frac{b_p}{p}\end{aligned}\right\}+\text{etc.}=\int_0^X dx_1\int_0^{x_1}dx\, f(x).$$

Hieraus folgt bereits, dass $\sum_1^\infty \frac{b_p}{p}$, über alle p genommen, eine convergente Reihe ist. Setzt man noch $X=\pi$ so kann man $\sum_1^\infty \frac{b_p}{p}$ durch eine unbedingt convergente Reihe ausdrücken:

$$(31)\quad a_0\frac{\pi^2}{2}-2\sum_0^\infty\frac{a_{2p+1}}{(2p+1)^2}-\pi\sum_1^\infty\frac{b_p}{p}=\int_0^\pi(\pi-x)f(x)\,dx.$$

Im Ganzen ergiebt sich der zweite Satz:

Die trigonometrische Reihe:

$$\left.\begin{aligned} F(x) = a_0 x - a_1\sin x - \frac{a_2}{2}\sin 2x - \cdots - \frac{a_n}{n}\sin nx \\ + b_1\cos x + \frac{b_2}{2}\cos 2x + \cdots + \frac{a_n}{n}\cos nx \end{aligned}\right\} + \text{etc.}$$

convergirt für alle Werthe von x, wenn,

$$\left.\begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx \\ + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots + b_n\sin nx \end{aligned}\right\} + \text{etc.}$$

gesetzt,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dx \text{ mod. } f(x)$$

endlich und bestimmt ist. Die Summe der ersteren Reihe lautet:

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx+\sum_1^\infty\frac{b_p}{p},$$

und die Reihe rechter Hand genügt der Beziehung

$$a_0\frac{\pi^2}{2}-2\sum_1^\infty\frac{a_{2p+1}}{(2p+1)^2}-\pi\sum_1^\infty\frac{b_p}{p}=\int_0^\pi(\pi-x)f(x)\,dx.$$

Die Reihe

$$F(x) = a_0 x = \left.\begin{array}{l} - a_1 \sin x - \frac{a_2}{2} \sin 2x - \cdots - \frac{a_n}{n} \sin nx \\ + b_1 \cos x + \frac{b_2}{2} \cos 2x + \cdots + \frac{b_n}{n} \cos nx \end{array}\right\} + \text{etc.}$$

welche wieder eine trigonometrische Reihe ist, gestattet wieder die Fourier'sche Coefficienten-Bestimmung, und da sie, wenn die Reihe $f(x)$ die Bedingung des vorstehenden Satzes erfüllt, eine stetige Function von x ist, so kann auch sie wieder integrirt werden, u. s. f. Man kann aber auch von der Reihe $F(x)$ ausgehen, und, indem man von der Reihe $f(x)$ nur für einzelne Punkte etwas voraussetzt, Beziehungen zwischen der Reihe $F(x)$ und der Reihe $f(x)$ aufsuchen. Dieser gleichsam umgekehrte Weg, welchen Riemann bezüglich der trigonometrischen Reihe in (30) verfolgte, scheint auch bei der Reihe $F(x)$ nicht ergebnisslos zu sein.

Freiburg i. Br. im März 1883.

Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Von

Leo Königsberger in Wien.

Im § 2 meiner „allg. Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" habe ich nachgewiesen, dass eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten reductibel ist, wenn zwei Fundamentalintegrale derselben in algebraischer Beziehung zu einander stehen, und dass, wenn dies letztere nicht der Fall ist, die Annahme der Reductibilität der Differentialgleichung die Existenz einer linearen oder auch linearen homogenen Differentialgleichung als algebraisches Integral erster Ordnung zur Folge hat; weiter war aber im § 9 gezeigt worden, dass auch in dem Falle, in welchem zwei Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen, nothwendig ein particuläres Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung existirt, welches einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet*), und es wurde

*) Wir können die dort gewonnenen Resultate auch noch etwas anders aussprechen; sei die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

so wird dieselbe, wenn sie reductibel ist, entweder ein algebraisches Integral $\varphi(x)$ besitzen oder ein Integral haben, welches einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\beta) \qquad \frac{dy}{dx} = py$$

genügt, und da für den Fall des algebraischen Integrales nur $p = \frac{d\log\varphi(x)}{dx}$ gesetzt zu werden braucht, damit $y = \varphi(x)$ sich ergiebt, so wird also in jedem Falle für *ein* Integral der reductibeln Differentialgleichung (α) die Existenz der Differentialgleichung (β) erforderlich sein; wird dieses Integral nun mit

$$y_1 = e^{\int p\,dx}$$

bezeichnet, und stellt y_2 ein zu y_1 gehöriges Fundamentalintegral vor, so dass bekanntlich

auf diese Weise ermöglicht, für den Fall, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung kein algebraisches Integral besitzt, das Abel'sche Theorem in dem von mir definirten Sinne für die Integrale reductibler Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufzustellen. Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass, wenn ein Fundamentalintegral algebraisch, das andere transcendent ist, sich ein Abel'sches Theorem für zwei transcendente Fundamentalintegrale unmittelbar ergiebt, indem sich aus diesen beiden das algebraische Integral linear zusammensetzt. Will man in das Abel'sche Theorem nicht bloss die Fundamentalintegrale selbst, sondern auch deren erste Ableitungen eintreten lassen, so kann man dasselbe leicht für alle linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufstellen; denn bezeichnet man mit y_1 und y_2 zwei Fundamentalintegrale dieser Differentialgleichung, so ist bekanntlich

---

$$y_1^2 \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = ce^{-\int P dx}$$

ist, so ergiebt sich mit Benutzung des Werthes von y_1 aus dieser letzten Gleichung

$$y_2 = Ce^{\int p dx} \int e^{-\int (P+2p) dx} dx,$$

und es wird somit jedes Integral der reductibeln Differentialgleichung (α) die Form haben

$$(\gamma) \qquad y = e^{\int p dx} \left\{\mu_1 + \mu_2 \int e^{-\int (P+2p) dx} dx\right\},$$

worin μ und μ_2 willkührliche Constanten bedeuten, oder anders ausgesprochen, *jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung* (α), *welche andere Integrale als die in der Form* (γ) *enthaltenen besitzt, ist irreductibel.*

Man kann die Bedingung der Reductibilität endlich noch folgendermassen ausdrücken; da die Differentialgleichung (α) vermöge der Substitution

$$(\delta) \qquad y = e^{\int z dx}$$

bekanntlich in die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\varepsilon) \qquad \frac{dz}{dx} + z^2 + Pz + Q = 0$$

übergeht, so wird, weil $y_1 = e^{\int p dx}$ sein sollte, nothwendig p ein Integral der Differentialgleichung (ε) sein müssen, und umgekehrt, wenn (ε) ein algebraisches Integral p besitzt, so wird

$$y = e^{\int p dx}$$

ein Integral der Differentialgleichung (α) sein, welche, weil dasselbe der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = py$$

genügt, reductibel ist; wir erhalten somit den Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Reductibilität der Differentialgleichung (α) *ist die, dass die Differentialgleichung* (ε) *ein algebraisches Integral besitzt.*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = ce^{-\int P dx},$$

wenn P den als algebraische Function von x vorausgesetzten Coefficienten von y' in der Differentialgleichung zweiter Ordnung vorstellt, und es folgt hieraus, wenn mit

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}_{x_1}$$

der Werth der Determinante für $x = x_1$ bezeichnet wird, dass, wenn $\int P dx$ der Einfachheit wegen als Integral erster Gattung vorausgesetzt wird, bis auf einen constanten Factor

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}_{x_1} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}_{x_2} \cdots \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}_{x_\mu} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}_{X_1} \cdots \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}_{X_p}$$

ist, worin μ eine willkührliche ganze Zahl, $X_1, \cdots X_p$ in bekannter Weise mit $x_1, \cdots x_\mu$ algebraisch verbundene Argumente bezeichnen, und es ist klar, dass mit Zulassung der Ableitungen der Fundamentalintegrale bis zur $m - 1^{\text{ten}}$ Ordnung die entsprechende Determinante von m Fundamentalintegralen einer linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung vermöge der bekannten Liouville'schen Beziehung ein genau so gestaltetes Abel'sches Theorem liefern wird.

Der unmittelbare Zweck der vorliegenden Arbeit ist jedoch nicht die weitere Entwicklung des Abel'schen Theorems für irreductible lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, sondern eine Untersuchung, die derselben vorausgehen muss, nämlich die Frage nach den Beziehungen der Fundamentalintegrale einer solchen Differentialgleichung zu Integralen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P\frac{dy}{dx} + Qy \tag{1}$$

eine lineare homogene *irreductible* Differentialgleichung, in welcher P und Q algebraische Functionen von x bedeuten sollen, und bestehe zwischen zwei Fundamentalintegralen y_1 und y_2 derselben und einem particulären Integrale z_1 der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = pz + q, \tag{2}$$

in welcher p und q ebenfalls algebraische Functionen von x bedeuten, eine algebraische Beziehung

$$F(x, y_1, y_2, z_1) = 0; \tag{3}$$

es soll die Natur dieser Beziehung untersucht werden.

Setzen wir dieselbe in die Form

$$y_2 = f(x, y_1, z_1), \tag{4}$$

so wird sich wegen

$$y_2' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f}{\partial z_1}(pz_1 + q)$$

$$y_2'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y_1} y_1' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1}(pz_1 + q) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_1} y_1'(pz_1 + q)$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} y_1'^2 + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1'' + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}(pz_1 + q)^2$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z_1}\left(p^2 z_1 + pq + z_1 \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx}\right)$$

durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1) mit Berücksichtigung von

$$y_1'' = P y_1' + Q y_1$$

die Beziehung ergeben:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y_1} y_1' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1}(pz_1 + q) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_1}(pz_1 + q) y_1' + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} y_1'^2$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y_1} Q y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}(pz_1 + q)^2 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\left(p^2 z_1 + pq + z_1 \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx}\right)$$
$$= P\frac{\partial f}{\partial x} + P\frac{\partial f}{\partial z_1}(pz_1 + q) + Qf. \tag{5}$$

Es ist leicht einzusehen, dass dies keine in den Grössen y_1', y_1, z_1, x identische Gleichung sein kann; denn wäre dies der Fall, so müsste, weil y_1' nur explicite, nicht im Functionszeichen f vorkommt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_1}(pz_1 + q) = 0 \tag{7}$$

ebenfalls identisch erfüllt sein für beliebige Werthe von x, y_1 und z_1; aus (6) folgt dann, dass

$$f = X y_1 + X_1 \tag{8}$$

ist, worin X und X_1 algebraische Functionen von x und z_1 sind, deren erste vermöge der Gleichung (7) der für alle x und z_1 identischen Bedingung genügen muss

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z_1}(pz_1 + q) = 0. \tag{9}$$

Da aber das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung die Form hat

$$X = \varphi\left\{z_1 e^{-\int p\,dx} - \int e^{-\int p\,dx} q\,dx\right\}, \tag{10}$$

und z_1 als Integral der Differentialgleichung (2) durch den Ausdruck gegeben ist

$$z_1 = \alpha e^{\int p\,dx} + e^{\int p\,dx}\int e^{-\int p\,dx} q\,dx, \tag{11}$$

worin α eine Constante bedeutet, so wird

$$X = \varphi(\alpha) = A \tag{12}$$

also selbst eine Constante, und es geht (8) in

(13) $$y_2 = f(x, y_1, z_1) = Ay_1 + X_1$$

über, worin X_1 eine algebraische Function von x und z_1 ist; da aber A eine Constante, so muss X_1 ein Integral der Differentialgleichung (1) sein, denn der Fall $X_1 = 0$ ist ausgeschlossen, da y_1 und y_2 zwei Fundamentalintegrale sein sollten. Dass aber X_1 nicht ein Integral von (1) sein kann, ist daraus ersichtlich, dass, wenn wir

$$\eta = X_1, \frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z_1}(pz_1 + q)$$

bilden, die Elimination von z_1 zwischen diesen beiden in x und z_1 algebraischen Gleichungen eine Differentialgleichung von der Form

$$F\left(x, \eta, \frac{d\eta}{dx}\right) = 0$$

liefern, somit das Integral η der Differentialgleichung (1) schon einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen würde, was mit der Annahme der Irreductibilität der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht vereinbar ist.

Es folgt hieraus, dass die Gleichung (5) nicht eine in den Grössen x, y_1, y_1' und z_1 identische sein kann; sie wird somit eine Relation zwischen eben diesen Grössen feststellen, die wir in die Form

(14) $$z_1 = \varphi(x, y_1, y_1')$$

setzen wollen. Da nun y_1 ein particuläres Integral einer irreductibeln Differentialgleichung ist, so gilt der Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen, wonach das Integral der irreductibeln Differentialgleichung durch ein beliebiges anderes derselben ersetzt werden darf, wenn nur für die Integrale der anderen Differentialgleichungen (s. § 5 meiner „Untersuchungen") passende Integrale eben dieser substituirt werden; wir erhalten somit aus (14) die Beziehung

(15) $$z_1 + m\zeta_1 = \varphi(x, \mu y_1, \mu y_1'),$$

worin μ eine willkührliche, m eine davon abhängige Constante und

(16) $$\zeta_1 = e^{\int p\,dx}$$

oder ζ_1 ein Integral der homogenen linearen Differentialgleichung

(17) $$\frac{d\zeta}{dx} = p\zeta$$

ist. Aus (14) und (15) folgt

(18) $$\varphi(x, \mu y_1, \mu y_1') = \varphi(x, y_1, y_1') + m\zeta_1,$$

welche Gleichung eine in x, y_1, y_1', ζ_1 identische oder nicht identische sein kann.

Nehmen wir zuerst an, die Gleichung (18) sei eine identische, so ist unmittelbar einzusehen, dass ζ_1 eine algebraische Function von x sein muss, da es nur in dem einen Posten $m\zeta_1$ auf der rechten Seite

dieser Gleichung vorkommt, doch kann diese algebraische Function auch Null sein; sei nun ζ_1 algebraisch und die Gleichung (18) identisch, so werden sich aus letzterer durch Differentiation nach y_1, y_1' und μ die Beziehungen ergeben

$$\frac{\partial\varphi(x,\mu y_1,\mu y_1')}{\partial(\mu y_1)}\,\mu = \frac{\partial\varphi(x,y_1,y_1')}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial\varphi(x,\mu y_1,\mu y_1')}{\partial(\mu y_1')}\,\mu = \frac{\partial\varphi(x,y_1,y_1')}{\partial y_1'},$$

$$\frac{\partial\varphi(x,\mu y_1,\mu y_1')}{\partial(\mu y_1)}\,y_1 + \frac{\partial\varphi(x,\mu y_1,\mu y_1')}{\partial(\mu y_1')}\,y_1' = \zeta_1\frac{dm}{d\mu},$$

und hieraus wieder, wenn $\varphi(x, y_1, y_1') = \varphi$ gesetzt wird,

$$(19) \qquad y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + y_1'\frac{\partial\varphi}{\partial y_1'} = \mu\frac{dm}{d\mu}\zeta_1,$$

welche Gleichung wiederum eine identische sein muss. Da nun das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung die Form hat:

$$(20) \qquad \varphi = \mu\frac{dm}{d\mu}\zeta_1\log y_1 + \omega\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right),$$

worin ω eine willkürliche Function bedeutet, die auch die Variable x enthalten darf, weil nun ferner die Function $\varphi(x, y_1, y_1')$ eine algebraische Function ihrer Argumente sein soll, in dem Ausdrucke (20) aber y_1' nur in dem Functionszeichen ω enthalten ist, so wird auch ω eine algebraische Function vorstellen, und daher

$$\mu\frac{dm}{d\mu}\zeta_1 = 0$$

sein müssen, woraus folgt, dass entweder $\frac{dm}{d\mu} = 0$ d. h. m von μ unabhängig ist, oder dass $\zeta_1 = 0$; da nun die erste Annahme, weil für $\mu = 1 \quad m = 0$ ist, auf die Functionalgleichung

$$(21) \qquad \varphi(x, \mu y_1, \mu y_1') = \varphi(x, y_1, y_1')$$

führt, welche nach der oben gemachten Voraussetzung eine identische sein soll, diese aber zur allgemeinen Lösung die Form

$$\varphi(x, y_1, y_1') = \omega\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right)$$

hat, so folgt, dass, wenn die Gleichung (18) eine identische sein soll, die Gleichung (14) die Form annimmt

$$(22) \qquad z_1 = \omega\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right),$$

worin ω eine willkürliche algebraische Function bedeutet.

Ist dagegen (18) eine nicht identische Gleichung, sondern liefert sie eine algebraische Beziehung von der Form

$$(23) \qquad \zeta_1 = F(x, y_1, y_1'),$$

so ist unmittelbar einleuchtend, dass ζ keine algebraische Function von x sein kann, weil sonst zwischen x, y_1, y_1' eine algebraische Beziehung

bestehen, also y_1 schon einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen würde, während die Differentialgleichung zweiter Ordnung eine irreductible sein sollte, und es wird daher aus (23) wiederum nach dem Satze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung, weil ζ ein Integral der Differentialgleichung (17) ist, folgen, dass

(24) $$F(x, \varrho y_1, \varrho y_1') = r F(x, y_1, y_1')$$

ist, worin ϱ eine beliebige, r eine von ϱ abhängige Constante bedeutet. Da nun die Gleichung (24) eine identische sein muss, weil sonst wiederum y_1 einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen würde, so folgt durch Differentiation nach y_1, y_1', ϱ

$$\frac{\partial F(x,\varrho y_1,\varrho y_1')}{\partial(\varrho y_1)}\,\varrho = r\,\frac{\partial F(x, y_1, y_1')}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial F(x, \varrho y_1, \varrho y_1')}{\partial(\varrho y_1')} = r\,\frac{\partial F(x, y_1, y_1')}{\partial y_1'},$$

$$\frac{\partial F(x, \varrho y_1, \varrho y_1')}{\partial(\varrho y_1)}\, y_1 + \frac{\partial F(x, \varrho y_1, \varrho y_1')}{\partial(\varrho y_1')}\, y_1' = \frac{dr}{d\varrho}\, F(x, y_1, y_1'),$$

und hieraus, wenn $F(x, y_1, y_1') = F$ gesetzt wird,

$$y_1\,\frac{\partial F}{\partial y_1} + y_1'\,\frac{\partial F}{\partial y_1'} = \frac{\varrho}{r}\,\frac{dr}{d\varrho}\,F;$$

das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung hat die Form

$$F(x, y_1, y_1') = y_1^a\,\omega\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right),$$

worin a eine Constante, ω eine willkürliche Function bedeutet, und man erhält somit für den Fall, dass die Gleichung (18) nicht eine identische ist, für diese Gleichung die nothwendige Form

(25) $$\zeta_1 = y_1^a\,\omega\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right).$$

Es ist die Frage somit jetzt darauf zurückgeführt, die Möglichkeit der Beziehungen (22) und (25) zu untersuchen; beschäftigen wir uns zuerst mit der Gleichung (22), welche wir in die Form setzen

(26) $$y_1' = y_1\,\Omega(x, z_1),$$

worin Ω eine algebraische Function von x und z bezeichnet. Da sich aus (26) durch Differentiation, wenn $\Omega(x, z_1) = \Omega$ gesetzt wird,

$$y_1'' = y_1\Omega^2 + y_1\,\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y_1\,\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}\,\frac{dz_1}{dx}$$

ergiebt, so folgt mit Hülfe der Differentialgleichungen (1) und (2)

(27) $$\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial z_1}\,(pz_1 + q) = -\,\Omega^2 + P\Omega + Q,$$

und es muss diese in x und z_1 algebraische Gleichung eine in diesen Grössen identische sein, weil z_1 ein transcendentes Integral sein sollte. Bestimmen wir z_1 als eine solche Function von x, dass der in x und z_1 algebraischen Gleichung

$$(28) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0$$

identisch genügt wird*), so ergebe sich $z_1 = \psi(x)$, und es wird für diesen Werth von z_1 die Gleichung (27) auch noch für alle Werthe von x identisch befriedigt werden, also

$$(29) \qquad \left(\frac{\partial \Omega(x, z_1)}{\partial x}\right)_{z_1 = \psi(x)} = -\Omega(x, z_1)^2_{z_1 = \psi(x)} + P\Omega(x, z_1)_{z_1 = \psi(x)} + Q$$

sein; setzt man aber

$$\Omega(x, \psi(x)) = \Pi(x),$$

worin also $\Pi(x)$ eine algebraische Function bedeutet, so ist

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \frac{\partial \Omega(x, \psi(x))}{\partial x} + \frac{\partial \Omega(x, \psi(x))}{\partial \psi(x)} \frac{d\psi(x)}{dx}$$

$$= \left(\frac{\partial \Omega(x, z_1)}{\partial x}\right)_{z_1 = \psi(x)} + \left(\frac{\partial \Omega(x, z_1)}{\partial z_1}\right)_{z_1 = \psi(x)} \psi'(x)$$

oder vermöge (28)

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \left(\frac{\partial \Omega(x, z_1)}{\partial x}\right)_{z_1 = \psi(x)},$$

und es geht daher (29) in

$$(30) \qquad \frac{d\Pi(x)}{dx} = -\Pi(x)^2 + P\Pi(x) + Q$$

über. Setzt man aber

$$\Pi(x) = \frac{d \log y}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y},$$

also

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{1}{y} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{1}{y^2},$$

so geht (30) in

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P\frac{dy}{dx} + Qy$$

also in die vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) über, und es würde dieselbe also ein Integral

---

*) Dies würde nur dann nicht möglich sein, wenn $\Omega(x, z_1)$ eine in z_1 lineare Function von der Form wäre

$$\Omega(x, z_1) = Rz_1 + S,$$

worin R und S algebraische Functionen von x bedeuten; dann würde aber die Gleichung (27) in die Beziehung

$$z_1\frac{dR}{dx} + \frac{dS}{dx} + R(pz_1 + q) = -R^2z_1^2 - 2RSz_1 - S^2 + PRz_1 + PS + Q$$

übergehen, welche, da z_1 sich nicht als algebraische Function von x ergeben darf, eine in x und z_1 identische sein muss, was aber andererseits wieder nicht möglich ist, da z_1^2 nur auf der rechten Seite dieser Gleichung in *einem* Gliede vorkommt; für den Fall, dass $R = 0$ ist, würde aber $\Omega(x, z_1)$ von z_1 unabhängig sein, und die Gleichung (26) somit eine algebraische Beziehung zwischen x, y_1, y_1' liefern, was mit der Irreductibilität der Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht verträglich ist.

(31) $$y = e^{\int \Pi(x)\,dx}$$

besitzen, worin $\Pi(x)$ eine algebraische Function von x bedeutet; aber dies ist unmöglich, da

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int \Pi(x)\,dx} \cdot \Pi(x)$$

ist, und y also der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \Pi(x)$$

genügen würde.

Nachdem die Unmöglichkeit der Gleichung (22) erwiesen, gehen wir zur Untersuchung der Beziehung (25) über, welche wir wiederum in die Form setzen wollen

(32) $$y_1' = y_1 \Omega(x, y_1^{-a} \cdot \zeta_1);$$

es folgt wiederum durch Differentiation, wenn der Kürze halber $\Omega(x, y_1^{-a} \cdot \zeta_1) = \Omega$ gesetzt wird, mit Benutzung der Differentialgleichungen (1) und (17)

(33) $$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial (y_1^{-a} \cdot \zeta_1)} [p - a\Omega]\, y_1^{-a} \cdot \zeta_1 = -\Omega^2 + P\Omega + Q,$$

und es muss diese in x, y_1, ζ_1 algebraische Gleichung — dass die Grösse a in der Gleichung (32) eine rationale Zahl sein muss, folgt, weil Ω eine algebraische Function der in ihr enthaltenen Grössen sein sollte — eine in diesen Grössen identische sein, weil im entgegengesetzten Falle sich

$$y_1^{-a} \cdot \zeta_1 = R$$

ergäbe, worin R eine algebraische Function von x ist, und aus

$$\zeta_1 = R y_1^a, \quad \frac{d\zeta_1}{dx} = p\zeta_1 = y_1^a \frac{dR}{dx} + aRy_1^{a-1} \frac{dy_1}{dx}$$

für y_1 die algebraische Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{a} \left[p - \frac{\frac{dR}{dx}}{R} \right]$$

folgen würde*), was wiederum gegen die Annahme der Irreductibilität der Differentialgleichung (1) verstösst. Bestimmt man nun in der

*) Die Annahme $a = 0$ und $p = \frac{d \log R}{dx}$, welche diese Gleichung zu einer identischen machen würde, führte die Gleichung (32) in

$$y_1' = y_1 \Omega(x, \zeta_1)$$

über, und dass diese nicht bestehen kann, folgt durch Vergleichung mit (26), für welche nur in (2) $q = 0$ zu setzen ist.

identischen Gleichung (33) $y_1^{-a}\cdot\zeta_1$ als eine solche algebraische Function von x, dass der in x und $y_1^{-a}\cdot\zeta_1$ algebraischen Gleichung

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(y_1^{-a}\cdot\zeta_1)}=0 \tag{34}$$

identisch genügt wird*), so ergiebt sich

$$y_1^{-a}\cdot\zeta_1=\psi(x),$$

und es wird für diesen Werth von $y_1^{-a}\cdot\zeta_1$ die Gleichung (33) auch noch für alle Werthe von x identisch befriedigt werden, also

$$\left(\frac{\partial\Omega(x,y_1^{-a}\cdot\zeta_1)}{\partial x}\right)_{y_1^{-a}\cdot\zeta_1=\psi(x)} \tag{35}$$

$$=-\Omega(x,y_1^{-a}\cdot\zeta_1)^2_{y_1^{-a}\cdot\zeta_1=\psi(x)}+P\Omega(x,y_1^{-a}\cdot\zeta_1)_{y_1^{-a}\cdot\zeta_1=\psi(x)}+Q$$

---

*) Ist wiederum

$$\Omega(x,y_1^{-a}\cdot\zeta_1)=Ry_1^{-a}\cdot\zeta_1+S, \tag{α}$$

worin R und S algebraische Functionen von x bedeuten, so geht die Gleichung (33) in

$$y_1^{-a}\cdot\zeta_1\frac{dR}{dx}+\frac{dS}{dx}+R\left[p-aRy_1^{-a}\cdot\zeta_1-aS\right]y_1^{-a}\cdot\zeta_1 \tag{β}$$
$$=-R^2y_1^{-2a}\cdot\zeta_1^2-2RSy_1^{-a}\cdot\zeta_1-S^2+PRy_1^{-a}\cdot\zeta_1+PS+Q$$

über, und es müsste dieselbe wiederum eine in x und $y_1^{-a}\cdot\zeta_1$ identische sein da sich sonst wiederum $y_1^{-a}\cdot\zeta_1$ als algebraische Function von x ergeben würde, was, wie oben nachgewiesen worden, nicht möglich ist; die Identität der Gleichung (β) würde aber die Beziehungen nach sich ziehen

$$-aR^2=-R^2,\quad \frac{dR}{dx}+R(p-aS)=-2RS+PR,$$
$$\frac{dS}{dx}=-S^2+PS+Q,$$

oder da aus der ersten $a=1$ folgt, weil R nicht verschwinden kann,

$$\frac{dR}{dx}=-pR-SR+PR,\quad \frac{dS}{dx}=-S^2+PS+Q;$$

die letztere dieser beiden Gleichungen würde wieder aus den oben angeführten Gründen gegen die Annahme der Irreductibilität der Differentialgleichung zweiter Ordnung verstossen, wenn nicht $S=0$ wäre, was jedoch $Q=0$ nach sich ziehen würde, also kann $\Omega(x,y_1^{-a}\cdot\zeta_1)$ keine lineare Function von $y_1^{-a}\cdot\zeta_1$ sein, und es wird somit möglich sein, die oben aufgestellte Gleichung

$$\frac{\partial\Omega(x,y_1^{-a}\cdot\zeta_1)}{\partial(y_1^{-a}\cdot\zeta_1)}=0$$

aufzulösen.

sein; setzt man wiederum

$$\Omega(x, \psi(x)) = \Pi(x),$$

so folgt genau wie oben, dass

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \frac{\partial\Omega(x, \psi(x))}{\partial x} + \frac{\partial\Omega(x, \psi(x))}{\partial\psi(x)} \psi'(x) =$$

$$= \left(\frac{\partial\Omega(x, y_1^{-a}\cdot\zeta_1)}{\partial x}\right)_{y_1^{-a}\cdot\zeta_1=\psi(x)} + \left(\frac{\partial\Omega(x, y_1^{-a}\cdot\zeta_1)}{\partial(y_1^{-a}\cdot\zeta_1)}\right)_{y_1^{-a}\cdot\zeta_1=\psi(x)} \psi'(x),$$

oder nach (34)

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \left(\frac{\partial\Omega(x, y_1^{-a}\cdot\zeta_1)}{\partial x}\right)_{y_1^{-a}\cdot\zeta_1=\psi(x)},$$

also nach (35)

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = -\Pi(x)^2 + P\Pi(x) + Q,$$

was wiederum aus den oben angegebenen Gründen nicht möglich ist.

Fassen wir nun die gefundenen Resultate zusammen; die Annahme der algebraischen Beziehung (3) zwischen zwei Fundamentalintegralen einer irreductibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung und einem Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung führte auf eine, wie oben nachgewiesen wurde, nicht identische algebraische Beziehung (5) oder (14) zwischen einem Fundamentalintegrale, dessen Ableitung und dem Integrale der linearen Differentialgleichung erster Ordnung*), welche wiederum eine Beziehung (18) nach sich zog, welche, wenn sie eine identische war, zwischen dem Integrale der linearen Differentialgleichung erster Ordnung und dem logarithmischen Differentiale eines Fundamentalintegrales eine Beziehung von der Form (22) feststellte, und wenn sie nicht identisch befriedigt wurde, zwischen dem Integrale der reducirten linearen

*) Durch die obigen Auseinandersetzungen ist nachgewiesen worden, dass zwischen einem Fundamentalintegrale einer linearen homogenen irreductibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung, dessen Ableitung und einem Integrale einer *linearen* Differentialgleichung erster Ordnung eine algebraische Beziehung nicht stattfinden könne, und es entsteht die Frage, ob überhaupt in eine solche Beziehung das Integral irgend einer Differentialgleichung erster Ordnung eintreten könne; man sieht nun unmittelbar, dass es *stets* eine solche Beziehung giebt, denn da die Substitution

$$z = \frac{y'}{y}$$

bekanntlich die Differentialgleichung zweiter Ordnung in die zugehörige erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 + Pz + Q$$

transformirt, so liefert jene Substitution selbst die gesuchte Relation.

Differentialgleichung erster Ordnung, einem Fundamentalintegrale und dessen Ableitung eine Beziehung von der Form (25) ergab, — endlich war aber gezeigt worden, dass die Beziehungen (22) und (25) sich nicht mit der Annahme der Irreductibilität der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung vertragen, und es folgt somit der Satz

dass eine algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen einer irreductibeln homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, einem Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung und der unabhängigen Variabeln überhaupt nicht bestehen kann.

Stellen wir nunmehr die allgemeinere Frage, ob zwischen zwei Fundamentalintegralen einer homogenen linearen irreductibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung, der unabhängigen Variabeln und dem transcendenten Integrale irgend einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung eine algebraische Beziehung stattfinden könne*), und drücken diese Beziehung durch

$$z_1 = F(x, y_1, y_2) \tag{36}$$

aus, worin z_1 ein Integral der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, z) \tag{37}$$

sein soll, so wird sich durch Differentiation von (36) die Beziehung ergeben

$$\varphi(x, z_1) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_2} y_2' \tag{38}$$

und durch Zusammensetzung von (36) und (38)

$$\varphi(x, F) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_2} y_2'. \tag{39}$$

Da nun für die Differentialgleichung (1) bekanntlich die Relation besteht

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = ce^{\int P dx}, \tag{40}$$

so wird (39) in

$$y_1 \varphi(x, F) = y_1 \frac{\partial F}{\partial x} + ce^{\int P dx} \frac{\partial F}{\partial y_2} + y_1'\left(y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2}\right) \tag{41}$$

übergehen, welche nunmehr von dem Integrale der Differentialgleichung erster Ordnung (37) und von y_2' frei ist.

Die Gleichung (41) kann nun offenbar keine in den Grössen $x, y_1, y_2, y_1', e^{\int P dx}$ identische sein; denn ist $e^{\int P dx}$ nicht eine alge-

*) Wir haben es der Einfachheit der Darstellung wegen, sowie zum Zwecke des Nachweises der Unmöglichkeit der Existenz der verschiedenen früher aufgestellten Gleichungen vorgezogen, den Fall, in welchem die Differentialgleichung erster Ordnung eine lineare ist, besonders zu behandeln und dürfen uns deshalb auch im Folgenden kürzer fassen.

braische Function von x, also P nicht das logarithmische Differential einer solchen, so könnte das Glied, welches allein diese Exponentialgrösse enthält, nur dann herausfallen, wenn F von y_2 unabhängig wäre, dann würde aber nach (39) y_1 als das Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung definirt sein, was wegen der Irreductibilität der Differentialgleichung (1) nicht angeht; ist dagegen $e^{\int P dx}$ eine algebraische Function von x, und die Gleichung (41) sollte identisch sein, so müsste, weil y_1' nur in dem letzten Posten vorkommt, für alle Werthe von x, y_1, y_2

$$y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0,$$

also

$$(42) \qquad z_1 = F(x, y_1, y_2) = \omega\left(x, \frac{y_2}{y_1}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{y_2}{y_1} = \Omega(x, z_1)$$

sein, was aber unmöglich ist, da dann nach (40)

$$y_1^2 \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = y_1^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} \varphi(x, z_1)\right) = c e^{\int P dx}$$

folgte, und somit y_1 nach der für P gemachten Annahme eine algebraische Function von x und z_1

$$y_1 = L(x, z_1)$$

wäre, woraus sich

$$y_1' = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial z_1} \varphi(x, z_1)$$

und durch Elimination von z_1

$$M(x, y_1, y_1') = 0$$

ergäbe, was wiederum unmöglich ist; wir schliessen daraus, dass die Gleichung (41) keine identische sein kann und bringen die durch sie definirte Beziehung in die Form

$$(43) \qquad y_2 = f(x, y_1, y_1', Z_1),$$

worin

$$(44) \qquad Z_1 = e^{\int P dx}$$

ein Integral der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(45) \qquad \frac{dZ}{dx} = PZ$$

ist. Aus (43) folgt durch Differentiation mit Benutzung von (1) und (45)

$$
\begin{aligned}
y_2' &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f}{\partial y_1'} (Py_1' + Qy_1) + \frac{\partial f}{\partial Z_1} PZ_1, \\
y_2'' &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y_1} y_1' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y_1'} (Py_1' + Qy_1) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial Z_1} PZ_1 \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} y_1'^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_1'} y_1'(Py_1' + Qy_1) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial Z_1} y_1' PZ_1 \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y_1} (Py_1' + Qy_1) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1' \partial Z_1} (Py_1' + Qy_1) PZ_1 \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1'^2} (Py_1' + Qy_1)^2 \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \left(P^2 y_1' + PQy_1 + Qy_1' + y_1' \frac{dP}{dx} + y_1 \frac{dQ}{dx}\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial Z_1^2} P^2 Z_1^2 + \frac{\partial f}{\partial Z_1} \left(P^2 Z_1 + Z_1 \frac{dP}{dx}\right),
\end{aligned}
$$

und durch Einsetzen des Werthes (43) und der soeben abgeleiteten in die Gleichung

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = P \frac{dy_2}{dx} + Qy_2$$

ergiebt sich eine algebraische Gleichung von der Form

$$\Omega(x, y_1, y_1', Z_1) = 0; \tag{46}$$

dass diese Gleichung aber keine Relation zwischen x, y_1, y_1', Z_1 definiren darf, geht daraus hervor, dass, wie oben nachgewiesen war, eine Beziehung von der Form (14), in welcher z_1 das Integral irgend einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung war, überhaupt nicht bestehen durfte, und es wird somit (46) eine identische Relation sein, oder anders ausgesprochen, es wird die Differentialgleichung (1) für jeden Werth von y statt y_2 erfüllt werden, der aus (43) hervorgeht, wenn darin für y_1 irgend ein Integral der Differentialgleichung (1) und für Z_1 irgend ein Integral der Differentialgleichung (45) substituirt wird, oder auch mit Beziehung auf den Satz von der Erhaltung der algebraischen Relation, der jedoch in diesem Falle verallgemeinert ist, es wird die algebraische Beziehung (43) erhalten bleiben, wenn man für y_1 und Z_1 beliebige Integrale ihrer resp. Differentialgleichungen setzt, vorausgesetzt, dass für y_2 ein passendes Integral der Differentialgleichung (1) substituirt wird. In Folge dessen ergiebt sich aus (43), wenn der Kürze halber $f(x, y_1, y_1', Z_1) = f(Z_1)$ gesetzt wird,

$$f(\mu Z_1) = m_1 y_1 + m_2 f(Z_1), \tag{47}$$

und daraus wieder, weil eine Relation zwischen x, y_1, y_1', Z_1 nicht existiren kann, also (47) eine identische Gleichung sein muss, durch Differentiation nach Z_1 und μ

$$\frac{\partial f(\mu Z_1)}{\partial(\mu Z_1)}\mu = m_2\frac{\partial f(Z_1)}{\partial Z_1},\qquad \frac{\partial f(\mu Z_1)}{\partial(\mu Z_1)}Z_1 = y_1\frac{dm_1}{d\mu} + f(Z_1)\frac{dm_2}{d\mu},$$

und somit

$$\frac{m_2}{\mu}Z_1\frac{\partial f(Z_1)}{\partial Z_1} = y_1\frac{dm_1}{d\mu} + f(Z_1)\frac{dm_2}{d\mu},$$

welche als eine Differentialgleichung in $f(Z_1)$ und Z_1 aufgefasst das Integral liefert

$$f(Z_1) = \beta y_1 + AZ_1^{\alpha}, \tag{48}$$

in welchem α und β Constanten sind, während A eine algebraische Function von x, y_1, y_1' bedeutet. Nun soll aber ferner dieselbe Function der Bedingung genügen, dass die Gleichung (43) erhalten bleibt, wenn y_1 durch ein willkürliches Integral von (1), y_2 durch ein passendes Integral derselben Gleichung ersetzt wird, und man erhält somit, wenn die obige Function $f(x, y_1, y_1', Z_1)$ zur Abkürzung durch $f(y_1, y_1')$ bezeichnet wird,

$$f(\mu y_1, \mu y_1') = m_1 y_1 + m_2 f(y_1, y_1'), \tag{49}$$

wo μ wiederum eine willkürliche, m_1 und m_2 davon abhängige Constanten bedeuten, und durch Differentiation nach y_1, y_1' und μ, da die Gleichung (49) wiederum eine identische sein muss,

$$\frac{\partial f(\mu y_1, \mu y_1')}{\partial(\mu y_1)}\mu = m_1 + m_2\frac{\partial f(y_1, y_1')}{\partial y_1},\qquad \frac{\partial f(\mu y_1, \mu y_1')}{\partial(\mu y_1')}\mu = m_2\frac{\partial f(y_1, y_1')}{\partial y_1'},$$

$$\frac{\partial f(\mu y_1, \mu y_1')}{\partial(\mu y_1)}y_1 + \frac{\partial f(\mu y_1, \mu y_1')}{\partial(\mu y_1')}y_1' = y_1\frac{dm_1}{d\mu} + f(y_1, y_1')\frac{dm_2}{d\mu}$$

und daraus

$$\frac{m_2}{\mu}\left(y_1\frac{\partial f(y_1, y_1')}{\partial y_1} + y_1'\frac{\partial f(y_1, y_1')}{\partial y_1'}\right) = \left(\frac{dm_1}{d\mu} - \frac{m_1}{\mu}\right)y_1 + \frac{dm_2}{d\mu}f(y_1, y_1'), \tag{50}$$

welche Gleichung wiederum eine identische sein muss, also als partielle Differentialgleichung mit den unabhängigen Variabeln y_1 und y_1' aufgefasst werden darf; setzen wir die oben für $f(Z_1)$ ermittelte Form (48) in die Gleichung (50) ein, so ergiebt sich für A die partielle Differentialgleichung

$$y_1\frac{\partial A}{\partial y_1} + y_1'\frac{\partial A}{\partial y_1'} = \delta A + \varepsilon y_1 Z_1^{-\alpha}, \tag{51}$$

worin δ und ε wiederum Constanten bedeuten, deren allgemeines Integral die Form hat

$$A = \frac{\varepsilon y_1 Z_1^{-\alpha}}{-\delta + 1} + y_1^{\delta}\,\omega\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right), \tag{52}$$

worin ω eine willkürliche algebraische Function vorstellt. Setzt man diesen Werth (52) in die Gleichung (48) ein, so folgt nach (43)

$$(53)\qquad f(x, y_1, y_1', Z_1) = y_2 = \eta y_1 + y_1^\delta Z_1^\alpha \omega\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right),$$

worin α, δ und η Constanten sind, und substituirt man

$$y_2 - \eta y_1 = Y_2, \quad y_1 = Y_1,$$

so folgt, dass die Annahme der Existenz der Beziehung (43) die Relation zwischen zwei Fundamentalintegralen der Differentialgleichung (1)

$$(54)\qquad Y_2 = Y_1^\delta Z_1^\alpha \omega\left(x, \frac{Y_1'}{Y_1}\right)$$

nach sich zieht. Nach dem Satze von der Erhaltung der algebraischen Relation in der oben angegebenen Form darf hierin Y_1 durch Y_2 ersetzt werden, wenn nur für Y_2 ein passendes Integral der Differentialgleichung (1) substituirt wird, und es ergiebt sich somit ausserdem

$$(55)\qquad m_1 Y_1 + m_2 Y_2 = Y_2^\delta Z_1^\alpha \omega\left(x, \frac{Y_2'}{Y_2}\right).$$

Durch Umkehrung der Beziehungen (54) und (55) folgt

$$(56)\qquad Y_1' = Y_1 \Omega(x, Y_2 Y_1^{-\delta} Z_1^{-\alpha})$$

und

$$(57)\qquad Y_2' = Y_2 \Omega(x, (m_1 Y_1 + m_2 Y_2) Y_2^{-\delta} Z_1^{-\alpha}),$$

worin m_1, m_2, δ, α Constanten und Ω wiederum eine willkürliche Function bedeutet, und vermöge der Gleichung

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = Ce^{\int P dx} = CZ_1$$

ergiebt sich

$$(58)\quad Y_1 Y_2 \{\Omega(x, (m_1 Y_1 + m_2 Y_2) Y_2^{-\delta} Z_1^{-\alpha}) - \Omega(x, Y_2 Y_1^{-\delta} Z_1^{-\alpha})\} = CZ_1,$$

worin C von Null verschieden ist, da

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)}{dx} = 0$$

Y_2 als constantes Multiplum von Y_1 liefern würde, während Y_1 und Y_2 Fundamentalintegrale waren. Die Gleichung (58) muss nun, wie schon wiederholt hervorgehoben, nach den früheren Auseinandersetzungen eine in den Grössen x, Y_1, Y_2, Z_1 identische sein, und unterwirft man daher Y_1 und Y_2, für welche willkürliche Werthe gesetzt werden dürfen, der Bedingung, dass

$$(m_1 Y_1 + m_2 Y_2)\, Y_2^{-\delta} = Y_2 Y_1^{-\delta}$$

oder dass

$$\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)^{\delta+1} - m_2\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) = m_1$$

ist, so wird die linke Seite der Gleichung (58) verschwinden, während die rechte, wie gezeigt worden, nicht Null werden darf; es führt

somit die Annahme der nicht identischen Beziehung (43) auf einen Widerspruch, und wir erhalten den Satz,

dass eine algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen einer irreductibeln homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, einem Integrale irgend einer Differentialgleichung erster Ordnung und der unabhängigen Variabeln überhaupt nicht bestehen kann.

Ueberblicken wir die Beweisart des eben ausgesprochenen Satzes, so wurden wir unbekümmert um die ursprünglich gemachte Voraussetzung von der Existenz der Relation (36) zur Unmöglichkeit der Existenz einer algebraischen Beziehung (43) zwischen zwei Fundamentalintegralen einer irreductibeln homogenen linearen Differentialgleichung, der Ableitung des einen derselben und dem Integrale Z_1 geführt, welches durch (44) definirt war; nehmen wir daher zwischen zwei Fundamentalintegralen einer homogenen linearen irreductibeln Differentialgleichung y_1 und y_2, der unabhängigen Variabeln x und dem Integrale z_1 irgend einer algebraischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\varphi\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^mz}{dx^m}\right) = 0 \tag{59}$$

eine algebraische Beziehung von der Form

$$z_1 = F(x, y_1, y_2) \tag{60}$$

an, so wird man durch Differentiation von (60) mit Zuhülfenahme der Differentialgleichung (1) die Beziehungen herleiten können

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dz_1}{dx} = F_1\left(x, y_1, y_2, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}\right) \\ \dfrac{d^2z_1}{dx^2} = F_2\left(x, y_1, y_2, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{d^mz_1}{dx^m} = F_m\left(x, y_1, y_2, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}\right), \end{array}\right. \tag{61}$$

und durch Elimination der Grössen

$$z_1, \frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2z_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^mz_1}{dx^m}$$

aus den $m+1$ Gleichungen (60), (61) und der Gleichung

$$\varphi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2z_1}{dx^2}, \ldots \frac{d^mz_1}{dx^m}\right) = 0$$

die der Gleichung (39) analoge Beziehung

$$\Phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0 \tag{62}$$

herleiten können, oder auch die vermöge der Gleichung (40) umgestaltete, der Gleichung (41) analoge Relation

$$\Psi(x, y_1, y_2, y_1', Z_1) = 0. \tag{63}$$

Wenn also die Gleichung (63) keine identische ist, also die Form (43) hat, so kann sie, wie oben gezeigt worden, überhaupt nicht existiren, und es ist dann die durch die Annahme der Beziehung (60) gemachte Voraussetzung unstatthaft, oder anders ausgedrückt,

es kann nur dann zwischen zwei Fundamentalintegralen einer linearen homogenen irreductibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung und dem Integrale irgend einer anderen Differentialgleichung ein algebraischer Zusammenhang stattfinden, wenn die durch Elimination des Integrales der letzteren Differentialgleichung aus jener Relation hergeleitete Gleichung zwischen den beiden Fundamentalintegralen und deren Ableitungen entweder selbst in eine identische Gleichung übergeht, oder nachdem die Ableitung eines der Fundamentalintegrale vermöge der allgemein gültigen Beziehung (40) *herausgeschafft worden, eine identische wird.*

So besteht z. B. zwischen den beiden Fundamentalintegralen y_1 und y_2 einer jeden homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und einem Integrale z_1 der linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3z}{dx^3} - 3P\frac{d^2z}{dx^2} + \left(2P^2 - \frac{dP}{dx} - 4Q\right)\frac{dz}{dx} + \left(4PQ - 2\frac{dQ}{dx}\right)z = 0$$

die Beziehung

$$z_1 = y_1 y_2,$$

und in der That findet man, dass, wenn hieraus die Werthe von z_1, $\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{d^2z_1}{dx^2}$, $\frac{d^3z_1}{dx^3}$ berechnet, durch y_1, y_2, y_1', y_2', ausgedrückt und in die Differentialgleichung dritter Ordnung eingesetzt werden, dieselbe identisch befriedigt wird.

Wien im Februar 1883.

Zusatz.

Zur Erläuterung des auf S. 276 gemachten Schlusses mag noch folgende Bemerkung hinzugefügt werden:

Wenn in der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}(pz+q) = -\Omega^2 + P\Omega + Q,$$

in welcher $\Omega(x, z)$ oder Ω eine algebraische Function von x und z ist, und die für alle Werthe von x und z identisch befriedigt sein sollte,

$$(2) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0$$

gesetzt $z = \psi(x)$ eine algebraische Function von x liefert, welche auch eine endliche Constante sein darf, so wird, wenn man diesen Werth von z in die Gleichung (1) einführt, dieselbe in

(3) $$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_{z=\psi(x)} = -(\Omega)^2_{z=\psi(x)} + P(\Omega)_{z=\psi(x)} + Q$$

übergehen, indem $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_{z=\psi(x)} = 0$ wird und $p\psi(x) + q$ nicht für jedes x unendlich gross werden kann, weil es dann auch $p\psi(x)$, also auch $\psi(x)$ sein müsste, da p und q es der Voraussetzung nach nicht waren. Setzt man nun

(4) $$\Omega(x, \psi(x)) = F(x),$$

so wird

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\partial\Omega(x, \psi(x))}{\partial x} + \frac{\partial\Omega(x, \psi(x))}{\partial\psi(x)}\psi'(x)$$

$$= \left(\frac{\partial\Omega(x, z)}{\partial x}\right)_{z=\psi(x)} + \left(\frac{\partial\Omega(x, z)}{\partial z}\right)_{z=\psi(x)}\psi'(x)$$

oder nach der Bestimmung von $\psi(x)$ und der Gleichung (3)

(5) $$\frac{dF(x)}{dx} = -F(x)^2 + PF(x) + Q,$$

d. h. es hätte die Differentialgleichung erster Ordnung

(6) $$\frac{dz}{dx} = -z^2 + Pz + Q$$

ein algebraisches Integral $z = F(x)$ oder bekanntlich die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

(7) $$\frac{d^2u}{dx^2} = P\frac{du}{dx} + Qu$$

das Exponentialintegral

(8) $$u = e^{\int F(x)dx},$$

dieselbe wäre somit, da (8) der Gleichung

$$\frac{du}{dx} = uF(x)$$

Genüge leistet, eine reductible; da dieselbe jedoch als irreductibel vorausgesetzt war, so ist die Annahme, dass $\Omega(x, \psi(x)) = F(x)$ eine algebraische Function von x liefert, ausgeschlossen. Geht aber (4) in eine Constante

$$\Omega(x, \psi(x)) = \alpha$$

über, welche zunächst endlich sein mag, so wird aus (5) folgen, dass

(9) $$\alpha^2 - P\alpha - Q = 0 \text{ oder } Q = \alpha^2 - P\alpha$$

ist, und die Differentialgleichung (7) wird dann die Form annehmen

$$\frac{d^2u}{dx^2} = P\frac{du}{dx} + (\alpha^2 - P\alpha)u,$$

welche offenbar das Integral $u = e^{\alpha x}$ hat, also wieder irreductibel wäre; wäre endlich die Constante α unendlich, und werde zur Abkürzung $\psi(x) = z_1$ gesetzt, so wird Ω als algebraische Function von z aufgefasst, welche in $z = z_1$ unendlich gross werden soll, die Form haben

$$\Omega = a_0(z - z_1)^{-\frac{m}{n}} + a_1(z - z_1)^{-\frac{m-1}{n}} + \cdots$$

oder

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{m}{n} a_0 (z - z_1)^{-\frac{m}{n}-1} - \frac{m-1}{n} a_1 (z - z_1)^{-\frac{m-1}{n}-1} + \cdots$$

sein, da aber $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ für $z = z_1$ verschwinden sollte, so kann Ω nicht unendlich werden, es ist also auch dieser Fall ausgeschlossen. Für den Fall also, dass $\psi(x)$ eine endliche Function von x oder eine endliche Constante ist, wäre die Unmöglichkeit der Gleichung (1) erwiesen, und es bleibt somit nur noch der Fall zu untersuchen übrig, in welchem die Auflösung der Gleichung (2) die Lösung $z = \infty$ ergiebt. Die Entwicklung von $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ lautet dann

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = b_0 z^{\frac{-\mu}{\nu}} + b_1 z^{\frac{-\mu-1}{\nu}} + \cdots,$$

worin μ und ν positive ganze Zahlen bedeuten; dann ist aber

$$\Omega - A = \frac{b_0}{\frac{-\mu}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu}{\nu}+1} + \frac{b_1}{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} + \cdots,$$

worin A eine endliche, im allgemeinen algebraisch von x abhängige Grösse bedeutet, wenn $\frac{\mu}{\nu} > 1$ also $\Omega = A$ ist, und $A = 0$ zu setzen ist, wenn $\frac{\mu}{\nu} < 1$ also $\Omega = \infty$ wird — der Fall $\frac{\mu}{\nu} = 1$ ist ausgeschlossen, weil sonst Ω nicht algebraisch wäre; dann ist aber

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\frac{\partial b_0}{dx}}{-\frac{\mu}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu}{\nu}+1} + \frac{\frac{d b_1}{dx}}{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} + \cdots,$$

und es würde die Gleichung (1) lauten

$$(10) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\frac{\partial b_0}{\partial x}}{\frac{-\mu}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu}{\nu}+1} + \frac{\frac{d b_1}{dx}}{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} + \cdots$$
$$+ \left(b_0 z^{\frac{-\mu}{\nu}} + b_1 z^{\frac{-\mu-1}{\nu}} + \cdots\right)(pz + q)$$
$$= -\left(A + \frac{b_0}{\frac{-\mu}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu}{\nu}+1} + \frac{b_1}{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} + \cdots\right)^2$$
$$+ P\left(A + \frac{b_0}{\frac{-\mu}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu}{\nu}+1} + \frac{b_1}{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} z^{\frac{-\mu-1}{\nu}+1} + \cdots\right) + Q;$$

ist $\frac{\mu}{\nu} > 1$, so wird für $z = \infty$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = - A^2 + PA + Q,$$

und dies würde wieder bedeuten, dass entweder die Differentialgleichung (6) ein algebraisches Integral hat oder dass, wenn A eine Constante ist, eine Beziehung von der Form (9) stattfindet, welche Fälle beide ausgeschlossen waren; ist dagegen $\frac{\mu}{\nu} < 1$, so würde die linke Seite der Gleichung (10) unendlich wie $z^{\frac{-\mu}{\nu}+1}$, während die rechte unendlich wird, wie $z^{2\left(\frac{-\mu}{\nu}+1\right)}$, also kann die Gleichung (10) nicht bestehen, in allen Fällen ist also die Unmöglichkeit der Existenz der Beziehung (1) erwiesen.

Reduction zweier Covarianten binärer Formen.

Von

E. Stroh in München.

I. Reduction der Covariante i''_Δ einer binären Form achter Ordnung*).

Die Covariante 4ter Ordnung 3ten Grades $(fk)^4 = f_k$ werde durch l bezeichnet. Ferner die aus ihr entspringenden Formen $(ll)^2$ und $(ll)^4$ beziehungsweise durch m und L. Dann lässt sich m durch die Grundform i_Δ und zerfallende Formen linear ausdrücken.

Es gilt nämlich die Entwicklung

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} f & k & f_k \\ 0 & 2 & 4 \end{matrix}\right\} m = ((ff_k)^2 k)^4 + ((ff_k)^3 k)^3 + \tfrac{2}{7}((ff_k)^4 k)^2.$$

Nun ist aber

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} (ff_k)^2 &= \tfrac{10}{3}\, i_2 + \tfrac{2}{7}\, k^2 + \frac{Ai - Bf}{9}, \\ (ff_k)^3 &= -\,2 i_3, \\ (ff_k)^4 &= i_k + \tfrac{12}{7}\,\Delta + \tfrac{1}{5}\, Ak, \end{aligned}\right.$$

und daraus ergiebt sich durch Ueberschiebung über k und Benützung einiger einfacher Identitäten:

$$\begin{aligned} ((ff_k)^2 k)^4 &= \tfrac{10}{3}\, i_{2k} + \tfrac{36}{245}\, Ck + \frac{Ai_k - Bf_k}{9}, \\ ((ff_k)^2 k)^3 &= -\,2 i_{33}, \\ ((ff_k)^4 k)^2 &= i_{k2} + \tfrac{2}{7}\, Ck + \tfrac{1}{5}\, A\Delta. \end{aligned}$$

Demnach wird

$$m = \left(\tfrac{10}{3}\, i_{2k} - 2 i_{33} + \tfrac{2}{7}\, i_{k2}\right) + \tfrac{8}{35}\, Ck + \tfrac{2}{35}\, A\Delta + \frac{Ai_k - Bf_k}{9}.$$

Der erste in Klammern eingeschlossene Theil dieses Ausdrucks kann durch i_Δ allein ausgedrückt werden. Da nämlich

---

*) Vergl. v. Gall, Math. Ann. Bd. XVII. — Sylvester, *American J.* Vol. IV, *Comptes Rendus* 1881 pag. 192 u. 365. — Wegen der Bezeichnungen siehe Gordan, das Formensystem binärer Formen, Leipzig 1875, und übrigens v. Gall, l. c.

$$(3)\qquad \begin{cases} i_{2k} = \frac{3}{14}\, i_{k2} + \frac{1}{2}\, i_{\Delta}, \\ i_{33} = \frac{1}{2}\, i_{k2} - \frac{1}{2}\, i_{\Delta}, \end{cases}$$

so wird dieser Theil gleich $\frac{8}{3}\, i_{\Delta}$ und somit der gesuchte Werth von m

$$(4)\qquad m = \frac{8}{3}\, i_{\Delta} + \frac{8}{35}\, Ck + \frac{2}{35}\, A\Delta + \frac{Ai_k - Bf_k}{9}.$$

Es ist daher einerlei, ob man i''_{Δ} oder $m'' = (m\Delta)^2$ auf niedere Formen zurückführt, da beide vermittelst dieser Gleichung durch einander linear ausgedrückt werden können. Die Reduction von m'' ergiebt sich nun aber in folgender Weise. Das Product $l_3 \cdot l_3$ lässt sich nach Formen von dem Typus $((ll)^{2\alpha}\,(kk)^{2\beta})^{\gamma}$ entwickeln, wo $2\alpha + 2\beta + \gamma = 6$ sein muss. Man hat zunächst:

$$(5)\qquad \begin{Bmatrix} l & k & l_3 \\ 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix} l_3 \cdot l_3 = (ll_3, k)^3 + ((ll_3)^1 k)^2 + \frac{3}{10}\, ((ll_3)^2 k)^1.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich:

$$\begin{Bmatrix} l & k & l \\ 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix} l_3 \cdot l = (l^2, k)^3 + \frac{6}{7}((ll)^2 k)^1,$$

$$\begin{Bmatrix} l & k & l \\ 0 & 1 & 3 \end{Bmatrix} (l_3 l)^1 + \frac{1}{2} l_k \cdot l = \frac{3}{2} m_2 + \frac{1}{4} Lk,$$

$$(6)\qquad \begin{Bmatrix} l & k & l \\ 0 & 0 & 4 \end{Bmatrix} l_k \cdot l = (l^2, k)^4 = \frac{12}{7}\, m_2 + \frac{1}{5} Lk,$$

$$\begin{Bmatrix} l & k & l \\ 1 & 1 & 3 \end{Bmatrix} (l_2 l)^2 = -\, m_3.$$

Durch Substitution dieser Werthe in obige Gleichung folgt dann:

$$(7)\qquad l_3 \cdot l_3 = (l^2)_{33} + \left(\frac{6}{7}\, m_{13} - \frac{3}{2}\, m_{22} - \frac{3}{10}\, m_{31}\right) + \frac{1}{2}\, l_k l_2 - \frac{1}{4}\, L\Delta.$$

Hierin kann der Term $(l^2)_{33}$ zunächst durch $(l^2)_{42}$ und $(l^2)_{\Delta}$ vermittelst der Beziehung

$$(8)\qquad (l^2)_{33} = \frac{1}{2}\, (l^2)_{42} - \frac{1}{2}\, (l^2)_{\Delta}$$

ersetzt werden, sodann aber mit Hilfe von Gleichung (6) überhaupt durch $(l^2)_{\Delta}$ und zerfallende Formen. Dadurch wird dann:

$$l_3 \cdot l_3 = -\frac{1}{2}\, (l^2)_{\Delta} + l_k\, l_2 - \frac{33}{14}\, m_{22} + \frac{6}{7}\, m_{13} - \frac{3}{10}\, m_{31} - \frac{7}{20}\, L\Delta.$$

Um nun aber den ersten Term $(l^2)_{\Delta}$ zu beseitigen, entwickle ich das Product $l_{\Delta} \cdot l$ in folgender Weise:

$$\begin{Bmatrix} l & \Delta & l \\ 0 & 0 & 4 \end{Bmatrix} l_\Delta \cdot l = (l^2)_\Delta + \tfrac{12}{7} m'' + \tfrac{1}{5} L\Delta.$$

Durch Substitution dieses Werthes für $(l^2)_\Delta$ folgt dann

$$(9)\quad l_3 \cdot l_3 = \left(\tfrac{6}{7} m_{13} - \tfrac{33}{14} m_{22} - \tfrac{3}{10} m_{31}\right) - \tfrac{1}{2} l \cdot l_\Delta + l_k \cdot l_2 + \tfrac{6}{7} m'' - \tfrac{1}{4} L\Delta.$$

Ganz ebenso wie in den Gleichungen (3) lassen sich nun auch hier die in der Klammer eingeschlossenen Terme durch andere ausdrücken. Dies geschieht mit Hilfe der Beziehungen:

$$(10)\quad \begin{cases} m_{13} = \quad \tfrac{3}{5} m'' + \tfrac{1}{20} k m_k - \tfrac{3}{20} C \cdot m, \\ m_{22} = -\tfrac{1}{2} m'' + \tfrac{1}{6} k m_k + \tfrac{1}{12} C \cdot m, \\ m_{31} = -\tfrac{3}{2} m'' + \tfrac{1}{2} k m_k - \tfrac{1}{4} C \cdot m, \end{cases}$$

die für jede beliebige Form 4ter Ordnung m gültig sind, ebenso wie auch die Gleichungen (3). Dadurch wird der betreffende Ausdruck:

$$\tfrac{15}{7} m'' - \tfrac{1}{2} k \cdot m_k - \tfrac{1}{4} C \cdot m.$$

Durch Substitution desselben in Gleichung (9) ergiebt sich dann die gesuchte Reductionsformel:

$$(11)\quad l_3^2 = 3m'' - \tfrac{1}{2} l \cdot l_\Delta + l_2 l_k - \tfrac{1}{2} k \cdot m_k - \tfrac{1}{4} C m - \tfrac{1}{4} L\Delta.$$

Dieselbe giebt die Form m'' und damit auch i''_Δ als lineare Function von zerfallenden Formen niederen Grades.

Es hat keine Schwierigkeit, den Ausdruck für i''_Δ selbst aufzufinden, jedoch erfordert dies etwas weitläufige Rechnung. Was zunächst den Werth von m'' angeht, so kann derselbe durch

$$(12)\quad m'' = \tfrac{8}{3} i''_\Delta + \frac{2AE + 4C^2}{105} k - \frac{AC}{105} \Delta + \tfrac{1}{9} (A i''_k - B f''_k)$$

ersetzt werden. Es bedeuten hierin A, B, C, D, E die fundamentalen Invarianten 2ten, 3ten, 4ten, 5ten und 6ten Grades, letztere durch $(\Delta k)^4$ definirt. Ferner können m_k und L durch die betreffenden Ausdrücke

$$(13)\quad \begin{cases} m_k = \tfrac{8}{3} i_{k\Delta} + \tfrac{8}{35} C^2 + \tfrac{2}{35} AE + \tfrac{1}{9} A i_{kk} - \tfrac{1}{9} BD, \\ L = i_{kk} + \tfrac{12}{7} E + \tfrac{1}{5} AC \end{cases}$$

ersetzt werden. Durch Einführung dieser Werthe ergiebt sich dann für $8 i''_\Delta$ folgender Ausdruck:

$$8 i_{\Delta}'' = f_{k3} \cdot f_{k3} + \frac{1}{2} f_{k\Delta} \cdot f_k - D f_{k2} + \frac{2}{3} C i_{\Delta} + \frac{AC}{36} i_k - \frac{BC}{36} f_k - \frac{A}{3} i_k''$$
$$+ \frac{B}{3} f_k'' + k \left\{ \frac{4}{3} i_{k\Delta} + \frac{A i_{kk} - BD}{18} + \frac{2C^2 - AE}{35} \right\}$$
$$+ \Delta \left\{ \frac{1}{4} i_{kk} + \frac{3}{7} E + \frac{13}{140} AC \right\}.$$

Hierin kann dann noch die Invariante i_{kk} durch die ihr äquivalente E vermittelst

$$i_{kk} = \frac{4}{63} E + \frac{1}{9} AC - \frac{1}{405} A^3 + \frac{2}{27} B^2$$

ersetzt werden.

II. Reduction der Covarianten (HH_1) und $(HH_1)^2$ im simultanen Systeme zweier binärer Formen vierter Ordnung*).

Seien die Formen f und φ, ihre Hesse'schen Covarianten H und H_1 und ihre ersten Invarianten i und i_1. Die gewünschte Reductionsformel für $(HH_1)^2$ folgt dann direct aus Gleichung (11) der vorigen Seite, wenn l durch f und k durch φ ersetzt wird. Es ergiebt sich dann:

$$(1) \quad 3(HH_1)^2 = (f\varphi)^3 \cdot (f\varphi)^3 + \frac{1}{2} f (fH_1)^4 + \frac{1}{2} \varphi (\varphi H)^4 + \frac{1}{4} H i_1$$
$$+ \frac{1}{4} H_1 i - (f\varphi)^2 \cdot (f\varphi)^4.$$

Eine ähnliche Gleichung für (HH_1) kann auf demselben Wege erhalten werden. Setzen wir $(f\varphi)^2 = \Theta$, $(f\varphi)^4 = J$, dann ist:

$$(2) \quad \left\{ \begin{matrix} f & \varphi & \Theta \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \right\} (f\varphi)^3 \cdot \Theta = (f\Theta, \varphi)^3 + \frac{3}{2} ((f\Theta)^1 \varphi)^2 + \frac{6}{7} ((f\Theta)^2 \varphi)^1$$
$$+ \frac{1}{5} (f\Theta)^3 \cdot \varphi.$$

Die Formen $(f\Theta)^\lambda$ lassen sich nun in folgender Weise entwickeln:

---

*) Man vergl. wegen dieser Formen, deren Reducibilität von Sylvester behauptet wurde, zunächst Gordan, Math. Annalen Bd. II, p. 275, Bertini, Math. Annalen Bd. XI, p. 36, Faà di Bruno, binäre Formen, übersetzt von Walter, pag. 369 und 372, sodann insbesondere d'Ovidio, Atti della R. Acc. di Torino, Vol. XV, pag. 302—304. An letzterer Stelle ist die Reduction dieser Formen mittelst symbolischer Rechnung gegeben, doch fehlt in dem Ausdruck für $(H, H_1)^2$ ein Coefficient 4. Der Werth von (H, H_1) stimmt mit dem im Texte gegebenen überein und ist letzterer nur der Vollständigkeit halber hier entwickelt worden.

$$\begin{Bmatrix} f & \varphi & f \\ 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \Theta \cdot f = (f^2\varphi)^2 + \tfrac{2}{7} H \cdot \varphi,$$

$$\begin{Bmatrix} f & \varphi & f \\ 0 & 1 & 2 \end{Bmatrix} (\Theta f) + \tfrac{1}{2} (f\varphi)^3 \cdot f = (H\varphi),$$

$$\begin{Bmatrix} f & \varphi & f \\ 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix} (f\varphi)^3 \cdot f = (f^2\varphi)^3 + \tfrac{6}{7} (H\varphi),$$

$$(\Theta f) = -\tfrac{1}{2} (f^2\varphi)^3 + \tfrac{4}{7} (H\varphi).$$

Aus

$$\begin{Bmatrix} f & \varphi & f \\ 0 & 2 & 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} f & \varphi & f \\ 0 & 1 & 3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} f & \varphi & f \\ 0 & 0 & 4 \end{Bmatrix}$$

folgen ferner die Gleichungen:

$$(\Theta f)^2 + ((f\varphi)^3 f) + \tfrac{1}{3} J \cdot f = (H\varphi)^2 + \tfrac{1}{3} i\varphi,$$

$$((f\varphi)^3 f) + \tfrac{1}{2} J \cdot f = \tfrac{3}{2} (H\varphi)^2 + \tfrac{1}{4} i\varphi,$$

$$Jf = (f^2\varphi)^4 + \tfrac{12}{7} (H\varphi)^2 + \tfrac{1}{5} i\varphi,$$

und daher:

$$(3) \qquad \begin{aligned} (\Theta f)^2 &= \tfrac{1}{6} Jf - \tfrac{1}{2} (H\varphi)^2 + \tfrac{1}{12} i\varphi, \\ (f^2\varphi)^2 &= Jf - \tfrac{12}{7} (H\varphi)^2 + \tfrac{1}{5} i\varphi. \end{aligned}$$

Endlich folgen aus

$$\begin{Bmatrix} f & \varphi & f \\ 1 & 2 & 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} f & \varphi & f \\ 1 & 1 & 3 \end{Bmatrix}$$

die Gleichungen:

$$(\Theta f)^3 + \tfrac{1}{2} ((f\varphi)^3 f)^2 = -(H\varphi)^3,$$

$$((f\varphi)^3 f)^2 = -(H\varphi)^3,$$

und demnach:

$$(\Theta f)^3 = -\tfrac{1}{2} (H\varphi)^3.$$

Damit sind alle Formen $(\Theta f)^\lambda$ durch solche von dem Typus $((ff)^{2k}\varphi)^\varrho$ ausgedrückt. Indem man in Gleichung (2) substituirt und abkürzend statt $((\Phi\varphi)^\lambda\varphi)^\mu = \Phi_{\lambda\mu}$ schreibt, ergiebt sich:

$$(f\varphi)^3 \cdot \Theta = (f^2)_{23} + \tfrac{3}{4} (f^2)_{32} + \left(\tfrac{2}{7} H_{03} - \tfrac{6}{7} H_{12} - \tfrac{3}{7} H_{21}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{7} J(f\varphi) + \tfrac{1}{10} \varphi (H\varphi)^3.$$

Die beiden ersten Terme können nun vermittelst

$$(f^2)_{23} = -\tfrac{1}{4}(f^2 H_1)^3 + \tfrac{5}{14}(f^2)_{41},$$

$$(f^2)_{32} = -(f^2 H_1)^3 + \tfrac{2}{3}(f^2)_{41}$$

durch andere ersetzt werden. Diese können dann mit Hülfe von Gleichung (3) und

$$\begin{Bmatrix} f & H_1 & f \\ 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix} (fH_1)^3 \cdot f = (f^2 H_1)^3 + \tfrac{6}{7}(HH_1)$$

weiter reducirt werden, so dass sich sodann folgender Ausdruck für $(f\varphi)^3 \cdot \Theta$ ergiebt:

$$(f\varphi)^3 \cdot \Theta = \left(\tfrac{2}{7} H_{03} - \tfrac{6}{7} H_{12} - \tfrac{93}{49} H_{21}\right) + \tfrac{6}{7}(HH_1) + J(f\varphi) - f(fH_1)^3 + \tfrac{1}{10}\varphi(H\varphi)^3.$$

Um den ersten in Klammern eingeschlossenen Theil umzuformen, benütze man die Identitäten:

$$H_{03} = \tfrac{6}{7}(HH_1) + \tfrac{1}{14}\varphi(H\varphi)^3,$$

$$H_{12} = \tfrac{1}{5}\varphi(H\varphi)^3,$$

$$H_{21} = -(HH_1) + \tfrac{1}{2}\varphi(H\varphi)^3.$$

Dann resultirt die gesuchte Formel:

$$3(HH_1) = (f\varphi)^3 (f\varphi)^2 - (f\varphi)^4 (f\varphi)^1 + f(fH_1)^3 - \varphi(\varphi H)^3.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wechselt ihr Vorzeichen, wenn man f mit φ vertauscht, was sehr gut als Controle für richtige Rechnung benützt werden kann.

Anmerkung. Die hier ausgeführten Reductionen sind specielle Fälle einer allgemeinen Reductionsmethode, welche ich demnächst veröffentlichen werde. Mit Hülfe derselben kann jede derartige Reduction auf vorgeschriebenem Wege bewerkstelligt werden, insbesondere wird das Problem erledigt werden: *Alle linearen Relationen zwischen Covarianten derselben Ordnung und desselben Grades aufzufinden.*

Berlin, Februar 1883.

Die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche.

Von

Heinrich Bruns in Leipzig.

Unter dieser Bezeichnung ist in der letzten Zeit mehrfach die Trajectorie eines Punktes untersucht worden, der gezwungen ist, sich auf der Erdoberfläche unter dem Einflusse der Schwere und der Erdrotation zu bewegen. Indem ich betreffs der Literatur auf die Selbst anzeige von: „Fr. Roth, die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche" im Aprilheft 1883 der Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie verweise, will ich hier nur hervorheben, dass in den betreffenden Arbeiten die Erdoberfläche als vollkommen glatt vorausgesetzt, d. h. die Reibung ausser Ansatz gelassen wird. Diese Vernachlässigung erscheint nun als ein wesentlicher Mangel, sobald man die Aufgabe nicht etwa bloss als eine interessante Rechenübung, sondern zur besseren Einsicht in meteorologische oder hydrographische Vorgänge verwerthen will, denn es ist ausschliesslich Wirkung der Reibung, wenn die Geschwindigkeiten der relativen Bewegungen auf der Erde im Allgemeinen immer sehr viel kleiner als die absoluten Geschwindigkeiten sind. Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie sich das Resultat, auf welches es hierbei allein ankommt, gestaltet, wenn man die Reibung berücksichtigt.

Es seien (xyz) die rechtwinkligen Aequatorialcoordinaten für ein festes Axensystem, $(\xi\eta\zeta)$ dieselben Grössen für ein analoges mit der Erde rotirendes Axensystem — der Nullpunkt im Schwerpunkt der Erde, die z-Axe nach dem Nordpol, die y-Axe 90^0 östlich von der x-Axe. Ist w die Umdrehungsgeschwindigkeit, so hat man bei passender Wahl des Zeitnullpunktes

$$\begin{aligned}\xi &= x\cos wt + y\sin wt,\\ \eta &= -x\sin wt + y\cos wt,\\ \zeta &= z.\end{aligned}$$

Ferner wird, wenn die Ableitungen nach t durch Accente bezeichnet werden,

$$\begin{aligned}
\xi'' &= x'' \cos wt + y'' \sin wt + 2w\eta' + w^2\xi,\\
\eta'' &= -x'' \sin wt + y'' \cos wt - 2w\xi' + w^2\eta,\\
\zeta'' &= z''.
\end{aligned}$$

Ist nun V das Potential für die Gravitation, Q das für die Schwungkraft, also

$$Q = \frac{1}{2} w^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} w^2(\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{2} w^2 r^2,$$

so ist $V + Q = U$ die Kräftefunction der Erde, und längs der Erdoberfläche U constant. Hiermit werden die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
x'' &= \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + F,\\
y'' &= \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U}{\partial y} + G,\\
z'' &= \frac{\partial V}{\partial z} + \lambda \frac{\partial U}{\partial z} + H,
\end{aligned}$$

wo die F, G, H die von der Reibung abhängigen Terme bedeuten. Diese Gleichungen gehen für $\lambda = \mu - 1$ zunächst über in

$$x'' = -\frac{\partial Q}{\partial x} + \mu \frac{\partial U}{\partial x} + F, \quad \text{etc.},$$

und ferner in

$$\begin{aligned}
\xi'' &= 2w\eta' + \mu \frac{\partial U}{\partial \xi} + L,\\
\eta'' &= -2w\xi' + \mu \frac{\partial U}{\partial \eta} + M,\\
\zeta'' &= \phantom{-2w\xi' + {}}\mu \frac{\partial U}{\partial \zeta} + N,
\end{aligned}$$

wo für die Reibungsterme L, M, N zu setzen ist

$$L = \frac{\xi'}{v} R, \quad M = \frac{\eta'}{v} R, \quad N = \frac{\zeta'}{v} R,$$

wenn v die Geschwindigkeit der relativen Bewegung und R den Widerstand in der Richtung der Tangente bedeutet.

Hieraus folgt nun zunächst

$$dv = R\,dt,$$

so dass also bei Vernachlässigung der Reibung v constant sein würde. Ist ferner ψ das von Nord über Ost gezählte Azimuth und l die geographische Länge, so folgt, wenn wir jetzt die Erde als Rotationskörper voraussetzen, aus

$$rv \sin\psi = r \cdot r \frac{dl}{dt} = \xi\eta' - \xi'\eta$$

durch Differentiiren und Einsetzen der obigen Ausdrücke für ξ'', η'':

$$r'v\sin\psi + rv'\sin\psi + rv\cos\psi\psi'$$
$$= -2wrr' + \mu\left(\xi\frac{\partial U}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial U}{\partial\xi}\right) + r\sin\psi\cdot R.$$

Das Glied mit R hebt sich gegen das mit v'; ferner verschwindet das von U abhängige Glied, sobald wir die Erde als Rotationskörper voraussetzen; endlich ist, wenn φ die Polhöhe bedeutet,

$$v\cos\psi\sin\varphi = -r',$$

so dass man schliesslich erhält:

$$\psi' = 2w\sin\varphi + \frac{v}{r}\sin\psi\sin\varphi.$$

Das zweite Glied rechts rührt von der Convergenz der Meridiane her, so dass die von der Erdrotation verursachte Azimuthänderung des bewegten Theilchens durch $2w\sin\varphi$ gegeben ist. Wir haben damit das im Voraus nicht zu erwartende merkwürdige Resultat, dass in unserem Falle die von der Erdrotation verursachte Azimuthdrehung *völlig unabhängig von der Reibung ist.*

Sternwarte Leipzig, 1883 April 9.

Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques.

Par

M. Cyparissos Stéphanos à Paris.

Il y a déjà quelque temps que l'idée de représenter, par des points du plan ou de l'espace, les diverses formes algébriques qui appartiennent à un même système linéaire, à deux ou à trois paramètres (non homogènes), a pris une place importante dans le domaine des considérations algébrico-géométriques.

Ce fut d'abord Hesse qui, par son *Uebertragungsprincip*, a enseigné de représenter les formes quadratiques binaires par les points du plan d'une conique. Depuis, l'étude projective des groupes de points d'une courbe rationnelle plane ou gauche a été rattachée à la représentation, par des points du plan ou de l'espace, des diverses formes binaires qui entrent dans un système linéaire à deux ou à trois paramètres. La représentation uniforme des surfaces rationnelles sur un plan a aussi, si l'on veut, pour point de départ la représentation, par des points de l'espace, des formes ternaires qui définissent des courbes planes appartenant à un système linéaire à trois paramètres.

On peut aussi se proposer l'étude d'une pareille représentation dans le cas où les formes à représenter contiendraient plusieurs séries de variables. Dans les représentations de ce genre il y a ceci de remarquable, que les formes représentées ne définissent plus des êtres géométriques inertes, en quelque sorte, comme le sont les groupes de points etc., mais plutôt des ensembles organisés, des correspondances. Cela ne fait qu'ajouter à l'intérêt qui doit s'attacher à de représentations de ce genre.

C'est l'étude d'une pareille représentation qui fait l'objet du présent Mémoire. La représentation dont nous allons nous occuper sera celle des formes bilinéaires binaires, ou bien celle des homographies définies par ces formes, par des points de l'espace.

De même que la représentation des formes quadratiques binaires par des points d'un plan se réduit à la considération d'une conique

fondamentale dont les points représentent des formes quadratiques à discriminant nul, de même ici on peut ramener le tout à la considération d'une surface du second ordre S^2 (dont on doit distinguer les deux systèmes de droites en *génératrices* et en *directrices* à cause des rôles différents qui leur sont réservés) et d'un plan π coupant cette surface suivant une conique C^2. La surface S^2 est le lieu des points qui représentent des homographies singulières, correspondant à des formes bilinéaires à déterminant nul. Le plan π, d'autre part, est le lieu des points qui représentent des homographies involutives, correspondant à des formes bilinéaires symétriques.

De cette manière la partie de notre représentation qui est relative aux formes symétriques, revient à la représentation des formes quadratiques correspondantes par des points du plan π. Il est bien à remarquer que la conique de π qui sert ainsi comme conique fondamentale coïncide avec C^2. Cela fait qu'aux divers points de cette conique se trouvent attachées les diverses valeurs d'un paramètre $x\ (x_1 : x_2)$.

Cette attribution de paramètres aux points de C^2 est aussi d'une importance capitale pour notre représentation des homographies binaires. On peut en effet supposer dès lors que toute relation bilinéaire:

$$A_{xy} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = 0$$

définit une correspondance homographique entre deux points x et y de la conique C^2. Grâce à ces circonstances la représentation des homographies binaires par des points de l'espace se trouve complétement déterminée aussitôt que l'on attache à chaque point de la conique C^2, considéré comme x ou comme y, la génératrice ou la directrice de S^2 qui y passe.

Du reste en procédant de cette manière on ne fait qu'utiliser implicitement le procédé qui sert à étudier, d'après Chasles, les courbes tracées sur une surface du second ordre S^2. Pour cela on considère, comme on sait, comme coordonnées d'un point P de S^2 les paramètres x et y des points suivant lesquels les deux droites de S^2 issues de P vont rencontrer une section plane C^2 de cette surface. Maintenant, on sait bien que, dans le cas ou l'on a entre x et y une relation bilinéaire $A_{xy} = 0$, le point P reste toujours dans un plan. C'est précisement le pôle de ce plan par rapport à la conique S^2 qui constitue le point représentatif de l'homographie $A_{xy} = 0$.

On voit combien les faits sur lesquels répose notre procédé de représentation sont simples. Quant à son utilité, elle consiste en ce qu'en rattachant les propriétés des homographies binaires à celles de certaines figures simples de l'espace, elle permet d'explorer dans tous les sens le domaine des homographies binaires et de se rendre compte de leurs

relations et de leurs actions mutuelles. De plus son étude nous devoile une série de propriétés remarquables des figures de l'espace dont l'enchaînement aurait passé autrement inaperçu.

Dans le Mémoire qui suit j'ai tâché de passer en revue les propriétés principales de cette représentation, considérée en elle-même.

Dans la première Partie de ce Mémoire j'examine les propriétés de cette représentation sons le point de vue purement projectif.

La seconde Partie est consacrée à l'étude d'une des applications les plus importantes de cette représentation, celle de la représentation des rotations sphériques par des points de l'espace. On sait que les diverses rotations de l'espace autour d'un point fixe établissent sur le cercle à l'infini C_∞ des homographies, dont chacune ne correspond à son tour qu'à une seule rotation. La représentation, par des points de l'espace, des homographies binaires établies sur le cercle C_∞ peut dès lors servir aussi à l'étude des rotations correspondantes. A cette fin il est fort avantageux d'admettre pour conique C^2 le cercle à l'infini C_∞ et pour surface S^2 une sphère de rayon i ayant son centre au point qui reste fixe dans toutes les rotations considérées*). La représentation des homographies binaires par des points de l'espace présente dans ce cas des propriétés métriques fort intéressantes et qui sont d'autant plus remarquables qu'elles correspondent aux propriétés des rotations sphériques qui accompagnent ces homographies.

Le Mémoire actuel sera suivi par deux autres, l'un sur la théorie des quaternions de Hamilton, l'autre sur le mouvement géométrique d'un corps solide autour d'un point fixe, dont le sujet sera en connexion étroite avec celui du présent Mémoire**).

---

*) C'est un fait bien remarquable que le point qui représente ainsi une rotation, effectuée autour d'un point fixe O, a précisement pour coordonnées, par rapport à trois axes rectangulaires issus du point O, les trois paramètres λ, μ, ν qui servent à déterminer cette rotation, d'après Euler.

**) Les premières recherches de l'auteur sur le sujet actuel datent de trois ans. Ainsi les principaux résultats du Mémoire qui suit, avec d'autres relatifs à la théorie des quaternions, avaient déjà été communiquées à la Société Mathématique de France dans la séance du 21. Mai 1880. La première Partie de ce Mémoire se trouvait déjà rédigée, telle que je la présente ici, dès le mois de Septembre 1880. La seconde partie, quoique arrêtée dans ses parties essentielles dès le printemps de l'année dernière, n'a pu être mise sous la forme ici adoptée que dans le courant de Février passé.

Première Partie.

Sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace.

I.

Fondements de la représentation*).

1. A toute forme bilinéaire binaire

$$A_{xy} = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

on peut faire correspondre un point A de l'espace ayant pour coordonnées homogènes les quantités $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$.

Aux formes bilinéaires d'un *faisceau*

$$\lambda A_{xy} + \mu B_{xy}$$

correspondent ainsi des points situés sur une droite $\overline{AB}$; de même, aux formes bilinéaires d'un *réseau*

$$\lambda A_{xy} + \mu B_{xy} + \nu C_{xy}$$

correspondent des points situés dans un plan $\underline{ABC}$.

Réciproquement, tout point A de l'espace, ayant pour coordonnées $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, correspond à toutes les formes bilinéaires

$$\lambda(a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2)$$

qui, égalées à zéro, déterminent une même *homographie*.

De cette manière on arrive à représenter les homographies binaires $A_{xy} = 0$, qui sont en nombre triplement infini, par les divers points de l'espace.

Aux formes bilinéaires symétriques, satisfaisant à la condition invariante

$$I = a_{12} - a_{21} = 0,$$

et qui définissent des *homographies involutives* (involutions), correspondent les divers points d'un plan, que nous désignerons par π.

De même aux formes bilinéaires à déterminant nul

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0,$$

formes qui se décomposent en deux facteurs linéaires, tels que $(xx') = x_1 x_2' - x_2 x_1'$ et $(yy') = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, et définissent, par conséquent, des *homographies singulières*, correspondent les divers points A d'une surface du second ordre S^2 (qui est un hyperboloïde gauche dans le cas où le tétraèdre $a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} = 0$ est réel).

---

*) On trouvera dans les §§ I—V de la seconde partie de ce Mémoire des développements ultérieurs sur des questions qui touchent de près au sujet du présent paragraphe.

2. Il convient d'examiner tout d'abord comment se déplace sur la surface S^2 le point A qui représente une forme bilinéaire composée par les deux facteurs (xx') et (yy'), lorsqu'on fait varier l'un ou l'autre de ces deux facteurs.

Comme dans ce cas on a pour coordonnées de A

$$a_{11} = x_2' y_2', \quad a_{12} = -x_2' y_1', \quad a_{21} = -x_1' y_2', \quad a_{22} = x_1' y_1',$$

on voit que si $x'(x_1' : x_2')$ reste fixe le point A décrit une droite g', définie par les équations:

$$x_1' a_{11} + x_2' a_{21} = 0, \quad x_1' a_{12} + x_2' a_{22} = 0,$$

et appartenant à un système déterminé de génératrices de S^2, tandisque si y' reste fixe le point A décrit une droite h':

$$y_1' a_{11} + y_2' a_{12} = 0, \quad y_1' a_{21} + y_2' a_{22} = 0,$$

appartenant à l'autre système de génératrices de S^2.

Par distinguer entre les droites g et h de S^2, qui jouent, d'après ce que l'on voit déjà, des rôles différents, nous réserverons le nom de *génératrices* de S^2 aux droites g et nous désignerons les droites h sous le nom de *directrices*.

Cela étant, on peut dire que:

Les formes bilinéaires (xx') (yy') ayant en commun le premier facteur (xx') sont représentées par les points d'une même génératrice de S^2, tandisque celles qui ont en commun le second facteur (yy') sont représentées par les points d'une même directrice de S^2.

3. On voit, d'après cela, qu'à chaque valeur du paramètre $x(x_1 : x_2)$ correspond une génératrice g de S^2, et qu'à chaque valeur du paramètre $y(y_1 : y_2)$ correspond une directrice h, et réciproquement.

Les valeurs des paramètres x et y qui correspondent aux deux droites g et h passant par un point de S^2, peuvent être envisagées comme coordonnées de ce point.

La forme bilinéaire (xx') (yy') est ainsi représentée par le point de S^2 ayant pour coordonnées x' et y'.

Lieu des points de S^2 dont les deux coordonnées x' et y' sont égales (pour lesquels on a $x_1' y_2' - x_2' y_1' = 0$), est la conique C^2 suivant laquelle la surface est coupée par le plan π (n° 1).

Grâce à cette attribution de paramètres aux divers points de la conique C^2, on a le droit de considérer toute forme bilinéaire A_{xy} comme établissant une correspondance homographique $A_{xy} = 0$ entre les divers points de cette conique C^2.

Dans une homographie $A_{xy} = 0$, établie entre les points de la conique C^2, chaque point de C^2 peut être envisagé sous deux points de vue différents: soit comme *point auquel correspond un autre*, soit comme *point qui correspond à un autre:* Les paramètres x et y, par rapport auxquels la forme A_{xy} est en général diversement composée,

servent à désigner les points de C^2 envisagés respectivement sous l'un ou l'autre de ces deux points de vue.

Ces faits et surtout ce qu'à chaque point de C^2, considéré comme x ou comme y, se trouve attachée la droite g ou h de S^2 qui y passe, sont d'une importance capitale pour la représentation des homographies, établies sur C^2, par des points de l'espace.

4. Lorsque deux formes bilinéaires

$$A_{xy} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$
$$B_{xy} = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2,$$

sont *conjuguées* entre elles, c'est-à-dire liées par la relation invariante

$$0 = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22},$$

les points A et B qui les représentent sont *conjugués* par rapport à la surface S^2, c'est-à-dire que chacun est situé dans le plan polaire de l'autre par rapport à cette surface.

Il s'ensuit de là que

Lieu des points B qui représentent des formes B_{xy} conjuguées à une forme donnée A_{xy}, est le plan polaire du point A par rapport à la surface S^2.

5. Si x' et y' sont deux points correspondants dans l'homographie $A_{xy} = 0$, c'est-à-dire s'ils satisfont à la condition

$$A_{x'y'} = 0 = a_{11}x_1'y_1' + a_{12}x_1'y_2' + a_{21}x_2'y_1' + a_{22}x_2'y_2',$$

les deux formes A_{xy} et (xx') (yy') sont manifestement conjuguées entre elles.

La construction des divers couples de points x', y' qui sont correspondants dans l'homographie ($A_{xy} = 0$) de C^2 représentée par un point A, revient ainsi à la recherche des points B de S^2 qui représentent des formes (xx') (yy') conjuguées à A_{xy}. Les deux droites g' et h' de S^2 passant par un tel point iront, en effet, couper C^2 en deux points correspondants x', y'.

Or ces points B, comme représentant des formes conjuguées à une forme bilinéaire donnée A_{xy}, doivent se trouver sur la conique suivant laquelle le plan polaire de A coupe la surface S^2. De là il résulte que:

Pour que deux points x et y de la conique C^2 se correspondent dans une homographie représentée par un point A de l'espace, il faut et il suffit que les droites g et h attachées respectivement à ces deux points déterminent un plan tangent de S^2 passant par le point A.

D'après cela *le point qui représente une homographie de C^2 est le sommet d'un cône circonscrit à S^2 dont chaque plan tangent coupe S^2 suivant deux droites (g, h) attachées à des points (x, y) qui se correspondent dans l'homographie considérée.*

L'homographie identique de C^2, c'est-à-dire celle (définie par $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$) qui fait correspondre chaque point de C^2 à lui-même, *est ainsi représentée par le pôle du plan π par rapport à la surface S^2*. Ce point remarquable nous le désignerons par O.

6. Les deux points *fondamentaux* (c'est-à-dire correspondant à eux mêmes) d'une homographie de S^2, représentée par un point donné A, coincident avec les deux points de C^2 où la surface S^2 est touchée par des plans passant par A. Ces deux points de C^2 sont situés sur la droite polaire de $\overline{OA}$.

On aperçoit ainsi que *les points A qui représentent des homographies de C^2 ayant deux points fondamentaux donnés ont pour lieu la polaire, passant en O, de la droite qui joint ces points fondamentaux.*

En particulier, lieu des points A qui représentent des homographies ayant deux points fondamentaux qui se confondent en un même point z de C^2 est la droite $\overline{Oz}$. Ainsi donc *lieu des points A qui représentent des homographies ayant deux points fondamentaux qui se confondent, est le cône K^2 circonscrit à S^2 le long de la conique* C^2 (cône dont le sommet est au point O).

7. Soient maintenant P et P' les deux points où une droite issue du point O rencontre S^2, et soient g_1, h_2 et g_2, h_1 les droites de S^2 qui passent respectivement par ces deux points*).

Les points $z_1 = (g_1, h_1)$ et $z_2 = (g_2, h_2)$, situés sur la conique C^2 sont manifestement les deux points fondamentaux communs aux homographies représentées par les points de la droite $\overline{PP'}$ (n⁰ 6).

Dans l'homographie singulière $(xz_1)(yz_2) = 0$, représentée par P, à tout point x de C^2 autre que z_1 correspond le point z_2, tandisqu'au point z_1 correspond tout point y de C^2**). Des choses analogues ont lieu pour l'homographie singulière $(xz_2)(yz_1) = 0$, représentée par P'.

Lieu des points A qui représentent des homographies de C^2 dans lesquelles au point $z_1 = (g_1, h_1)$ correspond le point $z_2 = (g_2, h_2)$, est le plan $\underline{g_1 h_2}$ qui touche S^2 au point P(n⁰ 5). De même, lieu des points A qui représentent des homographies de C^2 dans lesquelles au point $z_2 = (g_2, h_2)$ correspond le point $z_1 = (g_1, h_1)$, est le plan $\underline{g_2 h_1}$ qui touche S^2 au point P'.

Les deux plans $\underline{g_1 h_2}$ et $\underline{g_2 h_1}$ sont séparés harmoniquement par le

---

*) Dans la première partie de ce Mémoire je désignerai toujours, comme ici, par g_i et h_i (ou par g_i' et h_i', etc.) deux droites de S^2 homologues par rapport au point O, c'est à-dire contenues dans un plan tangent de S^2 passant en O.

**) Les deux points fondamentaux x' et y' d'une homographie singulière $(xx')(yy') = 0$ seront appelés par la suite *premier et second* point fondamental de cette homographie.

plan π et le point O et se coupent suivant la droite qui joint les deux points $z_1 = (g_1, h_1)$ et $z_2 = (g_2, h_2)$. Tout point de cette dernière droite représente une homographie involutive dans laquelle les deux points $z_1 = (g_1, h_1)$ et $z_2 = (g_2, h_2)$ sont échangés entre aux.

Si les deux points P et P' se confondent en un seul point z de C^2, on voit que le lieu des points A qui représentent des homographies de C^2 ayant un point fondamental donné z, est le plan qui touche S^2 au point z, et que le lieu des points de π qui représentent des homographies involutives admettant le point z comme point fondamental est la tangente de C^2 en ce point z.

8. Considérons la conique Γ^2 enveloppée par les droites qui joignent les points correspondants de C^2 dans une homographie $A_{xy} = 0$. Cette conique Γ^2 touche C^2 aux deux points fondamentaux de l'homographie A_{xy} et constitue la section du plan π par le cône K^2 circonscrit à S^2 et ayant pour sommet le point A qui représente l'homographie A_{xy}.

Cette conique Γ^2 se confond avec C^2 dans le cas où A coïncide avec le point O; elle se décompose en deux points, situés sur C^2, dans le cas où le point A est situé sur S^2; enfin, dans le cas où le point A est situé dans le plan π, elle est formée par deux tangentes de S^2, celles qui passent au point A.

Une même conique Γ^2, doublement tangente à C^2, détermine par ses tangentes, sur la conique C^2, deux homographies $A_{xy} = 0$ et $A_{yx} = 0$ *inverses* l'une de l'autre. Si dans la première de ces homographies à un point $z_1 = (g_1, h_1)$ de C^2 correspond un point $z_2 = (g_2, h_2)$, dans la seconde au point z_2 correspondra le point z_1. Or, comme les deux plans $\underline{g_1 h_2}$ et $\underline{g_2 h_1}$ sont séparés harmoniquement par le point O et le plan π, il faut que les points A et A' qui représentent les deux homographies $A_{xy} = 0$ et $A_{yx} = 0$ soient aussi séparés harmoniquement par le point O et le plan π. Les deux cônes K^2 et K'^2 circonscrits à S^2 et ayant pour sommets les points A et A' seront homologues dans l'homologie involutive ayant pour centre le point O et pour base le plan π.

Il est à remarquer que réciproquement:

Deux points A et A', séparés harmoniquement par le point O et le plan π, représentent deux homographies inverses l'une de l'autre.

9. Parmi les homographies représentées par les points A d'une droite d il y en a deux singulières, celles qui correspondent aux points (g_1', h_2') et (g_2'', h_1'') où la droite d rencontre S^2. Maintenant lieu des points B qui représentent des homographies conjuguées aux homographies précédentes sera la polaire e de la droite d (n⁰ 4), polaire qui rencontre S^2 aux deux points (g_1', h_1'') et (g_2'', h_2').

Dans toutes les homographies représentées par des points de d,

au point $z_1' = (g_1', h_1')$ correspond le point $z_1'' = (g_1'', h_1'')$ et au point $z_2'' = (g_2'', h_2'')$ correspond le point $z_2' = (g_2', h_2')$, (nº 5). Parmi ces homographies il n'y a qu'une seule dans laquelle à un point arbitraire x de C^2 correspond un point arbitraire y.

Les coniques Γ^2 qui correspondent aux homographies considérées touchent toutes les deux droites

$$\overline{z_1' z_1''} = \overline{(g', h_1')(g_1'', h_1'')} \quad \text{et} \quad \overline{z_2' z_2''} = \overline{(g_2', h_2')(g_2'', h_2'')}.$$

Parmi ces coniques il y en a deux qui touchent une droite arbitraire de π; ce sont celles qui correspondent à des homographies qui font correspondre entre eux les deux points de C^2 situés sur cette droite.

On voit aisement qu'on arrive au même système de coniques Γ^2 en considérant les homographies inverses des précédentes, homographies représentées par les points de la droite d', qui joint les deux points (g_2', h_1') et (g_1'', h_2'') et qui est l'homologue de d dans l'homologie involutive ayant pour base le plan π et pour centre le point O.

D'ailleurs il y a encore un autre système de coniques Γ^2 touchant les deux mêmes droites que les coniques du système considéré. Les coniques de ce second système correspondent aux divers points de la droite $\overline{(g_1', h_2'')(g_2', h_1'')}$, ou encore aux points de la droite homologue $\overline{(g_1'', h_2')(g_2'', h_1')}$. On remarquera que les quatre droites que nous avons eu à considérer constituent deux couples d'arêtes du tétraèdre (particulier) formé par les plans tangents de S^2 qui passent par les deux droites $\overline{z_1' z_1''}$ et $\overline{z_2' z_2''}$.

Ces propriétés font voir comment il y a quatre coniques Γ^2 doublement tangentes à C^2 qui touchent trois droites données de π. Chacune de ces coniques correspond à deux homographies, inverses l'une de l'autre, et dans lesquelles les points de C^2 situés respectivement sur les droites données se correspondent. Les huits points qui représentent ces homographies sont communs à une double infinité de surfaces du second ordre, lesquelles sont conjuguées par rapport au tétraèdre formé par le plan π et par les trois plans qui projettent du point O les trois droites données dans le plan π. Parmi ces surfaces se rangent celles formées par les deux plans tangents de S^2 qui passent par chacune des trois droites données de π.

10. Lorsqu'on a quatre formes bilinéaires

$$\lambda_1 A_{xy} + \mu_1 B_{xy}, \quad \lambda_2 A_{xy} + \mu_2 B_{xy}, \quad \lambda_3 A_{xy} + \mu_3 B_{xy}, \quad \lambda_4 A_{xy} + \mu_4 B_{xy}$$

appartenant à un même faisceau

$$\lambda A_{xy} + \mu B_{xy}$$

on doit entendre par rapport anharmonique du système de ces quatre formes le rapport anharmonique des quatre paramètres

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \quad \frac{\lambda_3}{\mu_3}, \quad \frac{\lambda_4}{\mu_4},$$

qui est évidemment égal à celui des quatre points de la droite $\overline{AB}$ qui représentent les quatre formes données.

Le rapport anharmonique des quatre points y qui correspondent à un même point x dans les quatre homographies déterminées par les quatre formes données, est le même quel que soit le point x et égal au rapport anharmonique de ces formes.

Ce fait résulte, sous le point de vue algébrique, de la dépendance linéaire qui a lieu entre $y(y_1 : y_2)$ et $\frac{\lambda}{\mu}$ par suite de l'équation:

$$\lambda A_{xy} + \mu B_{xy} = 0.$$

Mais on peut aussi s'en rendre compte géométriquement d'une manière fort simple: il suffit pour cela de remarquer que les quatre plans qui projettent d'une génératrice g_0 de S^2 les quatre points y qui correspondent au point (g_0, h_0) dans les quatre homographies considerées, coupent précisement la droite $\overline{AB}$ suivant les quatre points qui représentent ces homographies (n⁰ 5).

Puisque deux formes bilinéaires A_{xy} et B_{xy}, *conjuguées* entre elles, sont représentées par des points qui sont conjugués harmoniques par rapport aux points (g_1', h_2') et (g_2'', h_1'') de S^2 situés sur $\overline{AB}$ (n⁰ 4), il s'ensuit que, dans ce cas, le rapport anharmonique des formes

$$A_{xy}, \quad (xz_1')(xz_2'), \quad B_{xy}, \quad (xz_2'')(xz_1'')$$

est égal à -1.

11. Considérons les diverses homographies $A_{xy} = 0$ représentées par les points A d'une droite issue du point O et coupant S^2 suivant les deux points $P = (g_1, h_2)$ et $P' = (g_2, h_1)$, homographies qui auront pour points fondamentaux communs les $z_1 = (g_1, h_1)$ et $z_2 = (g_2, h_2)$.

A un point x de C^2 correspondent dans les homographies

$$(xz_2)(yz_1) = 0, \quad (xy) = 0, \quad (xz_1)(xz_2) = 0, \quad A_{xy} = 0$$

respectivement les points

$$z_1, \quad x, \quad z_2, \quad y,$$

dont le rapport anharmonique est constant, quels que soient les points correspondants x et y, et égal au rapport anharmonique des quatre points

$$P', \quad O, \quad P, \quad A.$$

On arrive ainsi à ce résultat important que:

Le rapport anharmonique constant $(z_1 x z_2 y)$ déterminé par les deux points fondamentaux z_1 et z_2 d'une homographie $A_{xy} = 0$ et deux points correspondants quelconques x et y de cette homographie est égal au rapport anharmonique déterminé sur la droite $\overline{OA}$ par les deux points $P' = (g_2, h_1)$

et $P = (g_1, h_2)$, *où cette droite rencontre* S^2, *et les deux points* O *et* A *de la même droite.*

Le rapport anharmonique $(z_1 x z_2 y)$ d'une homographie $A_{xy} = 0$ ayant ses deux points fondamentaux z_1 et z_2 distincts, admet, comme on sait, deux déterminations

$$r = \frac{I - \sqrt{I^2 - 4\Delta}}{I + \sqrt{I^2 - 4\Delta}} \quad \text{et} \quad r' = \frac{I + \sqrt{I^2 - 4\Delta}}{I - \sqrt{I^2 - 4\Delta}}, \quad (rr' = 1),$$

tant qu'on ne précise point quelles sont les racines de $A_{zz} = 0$ qu'on désigne respectivement par z_1 et z_2. Autrement une des valeurs précédentes doit correspondre à $(z_1 x z_2 y)$ et l'autre à $(z_2 x z_1 y)$.

Lieu des points A qui représentent des homographies ayant un rapport anharmonique r $\left(\text{ou } \frac{1}{r}\right)$ constant est une surface du second ordre circonscrite à S^2 le long de la conique C^2, surface ayant pour équation:

$$rI^2 - (1 + r)^2 \Delta = 0.$$

Deux points représentant deux homographies inverses l'une de l'autre se trouvent sur une même de ces surfaces.

L'équation précédente, si l'on y fait successivement

$$r = -1, \ 0 \ (\text{ou } \infty) \ \text{ et } \ 1,$$

représente le plan π pris deux fois, la surface S^2 et le cône K^2 circonscrit à S^2 suivant la conique C^2.

12. C'est un théorème fondamental dans la géométrie projective que lorsqu'on a deux séries homographiques de points x et y, et que l'on suppose que le point x décrit la première de ces séries dans un sens déterminé, le point correspondant y décrit la seconde série dans un sens aussi déterminé. De là cette classification bien importante des homographies binaires réelles (établies p. e. sur une même conique réelle C^2) en deux catégories: 1° de celles pour lesquelles les deux sens dont il s'agit coïncident et 2° de celles pour lesquelles ces deux sens sont opposés.

Entre les homographies de ces deux catégories viennent se placer les homographies singulières, pour les quelles la distinction précédente est irréalisable. Or, comme ces dernières homographies sont charactérisées par l'évanouissement du déterminant $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ de la forme bilinéaire correspondante, on voit bien que c'est par le signe de ce déterminant que doivent se distinguer entre elles les homographies des deux catégories précédentes. Du reste, l'exemple de l'homographie identique $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ peut servir à décider à laquelle de ces deux catégories correspond le signe $+$ ou $-$ du déterminant Δ. On arrive ainsi à ce résultat important:

Les deux sens attachés à deux séries homographiques superposées

sont identiques ou opposés suivant que le déterminant $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *de la forme bilinéaire correspondante est positif ou négatif*).*

Si l'on considère maintenant le point A qui représente une homographie réelle, établie sur la conique C^2, on voit que ce point sera séparè ou non du point O par la surface S^2, suivant que l'homographie dont il s'agit appartiendra à la seconde ou à la première catégorie, et réciproquement. A cette proprieté se rattache une proposition remarquable due à v. Staudt (*Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg*, 1856, p. 42), sur la concordance ou non des sens déterminés sur les deux systèmes de droites d'un hyperboloïde gauche par deux points de l'espace. Voici en quoi consiste cette proposition:

Etant donné un hyperboloïde gauche S^2 et un point O en dehors de cette surface, supposons qu'un plan tangent de S^2 passant par O tourne dans un sens direct arbitraire; de cette manière on détermine sur chacun des systèmes de droites de S^2 un sens direct correspondant. Supposons maintenant que l'on projette les diverses génératrices et directrices de S^2 par des plans passant par un point A et enveloppant un cône K^2 circonscrit à S^2. Aux sens directs attachés aux deux systèmes de droites de S^2 correspondent alors sur le cône K^2 deux sens qui seront contraires ou identiques, suivant que les points O et A sont separés entre aux par la surface S^2 ou non.

II.

Composition des homographies binaires.

13. Lorsqu'on a deux homographies binaires A et B on est conduit à considérer l'homographie dans laquelle deux points x et y sont correspondants lorsque le point y', qui correspond à x dans l'homographie A, coïncide avec le point x', auquel correspond le point y dans l'homographie B.

L'homographie à laquelle on arrive ainsi est appelée *résultante* ou *produit* des deux homographies A et B, prises dans cet ordre, et designée par le symbole AB. *L'opération* correspondante est appelée *composition* ou *multiplication* (quelquefois aussi *superposition*) des homographies.

Si les homographies A et B sont données par les équations

$$A_{xy} = \Sigma a_{ij}x_iy_j = 0, \quad B_{xy} = \Sigma b_{ij}x_iy_j = 0,$$

l'homographie AB sera représentée par l'équation

$$[AB]_{xy} = \Sigma(-a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j})\,x_iy_j = 0,$$

*) Cette proposition est fort utile pour la définition géométrique des éléments imaginaires d'après Staudt. *Voir* là dessus une Note de l'auteur inserée dans le cahier de Juillet du *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2e Sér., tom. VII, p. 204).

qui résulte de l'élimination de t entre les deux équations:

$$A_{xt} = 0 \quad \text{et} \quad B_{ty} = 0.$$

14. Tant que la forme $[AB]_{xy}$ n'est point identiquement nulle, on voit que le produit AB est nécessairement une homographie déterminée. Pourtant, comme une forme identiquement nulle est capable de représenter toute homographie, par la raison qu'elle peut être considérée comme la limite d'une forme bilinéaire quelconque multipliée par une quantité infiniment petite, on conçoit que, lorsque la forme $[AB]_{xy}$ s'annulle identiquement, le produit de deux homographies A', B' ne différant qu'infiniment peu de A, B sera une homographie dont la limite dependra du chemin suivant lequel les homographies A' et B' s'approchent respectivement des homographies A et B. Chacune de ces homographies limites pourra dès lors être envisagée comme produit AB.

Considérons, par exemple, deux homographies singulières:

$$A_{xy} = (a'x)\,(a''y) = 0, \qquad B_{xy} = (b'x)\,(b''y) = 0.$$

Nous aurons

$$[AB]_{xy} = -\,(a''b')\,(a'x)\,(b''y) = 0.$$

Le produit AB sera déterminé si $(a''b')$ est différent de zéro; mais il n'en sera plus de même si $(a''b') = 0$, c'est-à-dire si le second point fondamental de A coïncide avec le premier point fondamental de B.

En considérant alors deux formes

$$A'_{xy} = A_{xy} + \varepsilon D_{xy}, \qquad B'_{xy} = B_{xy} + \varepsilon E_{xy},$$

infiniment voisines de A_{xy} et B_{xy} (pour ε infiniment petit), on aura

$$[A'B']_{xy} = [AB]_{xy} + \varepsilon[AE]_{xy} + \varepsilon[DB]_{xy} + \varepsilon^2[DE]_{xy}.$$

L'homographie $A'B'$ sera donc représentée à la limite par l'équation

$$[AE]_{xy} + [DB]_{xy} = 0,$$

ou bien

$$(a'x)\,E_{a''y} - (b''y)\,D_{xb'} = 0.$$

On voit par là que:

Dans le cas où l'on a deux homographies singulières A et B telles que le second point fondamental a'' de A coïncide avec le premier point fondamental b' de B, on peut considérer comme produit AB toute homographie C dans laquelle au premier point fondamental a' de A correspond le second point b'' fondamental de B.

On se rend aisement compte de ce que chacune de ces homographies C répond à la définition que nous avons donnée du produit de deux homographies A et B. Et d'abord on voit que dans l'homographie

AB au point a' doit correspondre le point b'', puisque le point b'' correspond dans l'homographie B à tout point t différent de $b' = a''$, tandisque le point t correspond à son tour dans A au point a'. En second lieu on remarque que dans AB à tout point x, autre que a', peut correspondre un point arbitraire y, puisque dans l'homographie A au point x correspond le point $a'' = b'$, tandisque dans l'homographie B le point y correspond à ce même point $a'' = b'$.

Il est facile de voir que la forme $[AB]_{xy}$ ne peut être identiquement nulle, et que par conséquent le produit de deux homographies ne peut être indéterminé, que dans le cas seulement que nous venons de considérer*).

15. De la notion du produit de deux homographies on passe à celle du produit de plusieurs homographies. Ainsi l'on entend par *produit de plusieurs homographies* $A_1, A_2, \cdots, A_m$, prises dans cet ordre, une homographie dans laquelle deux points x et y sont correspondants s'ils sont le premier et le dernier d'une suite de $m+1$ points $t_1, t_2, \cdots, t_{m+1}$, qui se correspondent les uns (t_{i+1}) aux autres (t_i) dans les homographies successives (A_i).

Il résulte de cette définition que *lorsqu'on a à multiplier plusieurs homographies entre elles, on peut remplacer un nombre quelconque de facteurs consécutifs par leur produit, sans que le résultat final soit changé.*

La composition des homographies est donc soumise *à la loi de l'association*, exprimée par cette relation

$$ABC = (AB)\,C = A(BC).$$

Cette propriété subsiste quelle que soit la nature des homographies à multiplier. Cependant dans le cas où le produit d'un certain nombre de facteurs consécutifs est indéterminé, on doit entendre par la propriété précédente, *qu'en remplaçant un groupe de facteurs consécutifs par une valeur de leur produit on obtient pour résultat final une des valeurs du produit total.*

16. Les deux produits AB et BA qu'on peut former avec deux facteurs A et B, pris dans deux ordres différents, sont en général distincts. Dans certains cas, cependant, ils peuvent être les mêmes; on dit alors que les homographies A et B sont *permutables* ou *échangeables* entre elles.

On sait que deux homographies binaires ne peuvent être échangeables entre elles que dans deux cas seulement:

1° Lorsque les deux homographies ont les mêmes points fondamentaux.

---

*) Pour que la forme $[AB]_{xy}$ soit identiquement nulle on doit, en effet, avoir $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{b_{12}}{b_{22}}$.

L'homographie résultante a les même points fondamentaux que les composantes et son rapport anharmonique dans le cas où ces points fondamentaux sont distincts est égal au produit des rapports anharmoniques des composantes. Par contre si les deux points fondamentaux dont il s'agit se confondent en un seul z, il arrive que si l'on considère les points y_A, y_B, y_{AB} qui correspondent à un point arbitraire x dans les trois homographies A, B, AB respectivement, et que l'on designe par z' un autre point également arbitraire, *le rapport anharmonique* $(xzz'y_{AB})$ *est égal à la somme des rapports anharmoniques* $(xzz'y_A)$ et $(xzz'y_B)$*).

2⁰ Lorsque chacune des deux homographies, étant involutive, échange les deux points fondamentaux de l'autre. L'homographie involutive, qui en résulte, échange alors les points fondamentaux de chacune des composantes.

Lorsqu'une des composantes A, B est l'homographie identique, le produit AB coïncide évidemment avec l'autre composante. L'homographie identique est donc permutable avec toute homographie. Ce cas de permutabilité rentre du reste dans le cas 1⁰, puisque l'homographie identique peut être considérée comme admettant pour points fondamentaux ceux d'une homographie quelconque.

III.

Multiplication des points de l'espace correspondant à la composition des homographies binaires.

17. L'étude de la composition des homographies binaires peut être avantageusement secondée par la représentation des homographies par des points de l'espace, à laquelle nous revenons maintenant.

A la composition des homographies binaires correspond, entre les points qui représentent ces homographies, une opération que nous appellerons *multiplication* des points de l'espace. Nous considérerons ainsi le point C qui représente le produit AB de deux homographies A et B, comme *produit* AB des points A et B qui représentent ces homographies.

---

*) C'est en utilisant ces propriétés des homographies binaires ayant les mêmes points fondamentaux que von Staudt est parvenu à établir sa théorie des *homozygies* (*Würfen*). Cette théorie n'est en effet autre chose que celle des opérations sur les rapports anharmoniques, mise en accord avec l'esprit de la Geométrie de situation. (Il est seulement à remarquer que l'ordre des quatre éléments adopté par Staudt, pour la notation du rapport anharmonique, diffère de celui généralement en usage.)

De même, en partant de propositions analogues relatives à des homographies du plan ou de l'espace, on peut arriver à une généralisation de la théorie de Staudt relative à des homozygies formées par cinq points du plan ou par six points de l'espace.

Le produit de deux points A et B sera ainsi en général un point déterminé C, dépendant de la situation respective de ces points par rapport à la surface S^2 et à la conique C^2 sur laquelle sont supposées établies les homographies représentées par les points A et B.

Le produit des deux points A et B sera cependant indéterminé (d'après le n° 14) *lorsque, les points A et B étant situés sur la surface S^2, la directrice de S^2 passant par A et la génératrice de S^2 passant par B déterminent un plan tangent de S^2 contenant le point O. On peut alors considérer comme produit AB tout point C situé dans le plan qui contient la génératrice de S^2 passant par A et la directrice de S^2 passant par B* (n^{os} 14, 5).

Ainsi, par exemple, le produit des deux points A, B de S^2 situés sur une droite contenant le point O est indéterminé et coïncide avec tout point de l'un des plans tangents de S^2 passant par cette droite.

La multiplication des points, de même que celle des homographies, ne remplit pas en général la loi de la *commutation*, exprimée par la rélation $AB = BA$. Le produit de deux points A, B n'est indépendant de l'ordre des facteurs que 1° dans le cas où les points A et B sont en ligne droite avec le point O*), lorsque le produit AB est un point C de la même droite, et 2° dans le cas où les points A et B, étant situés sur le plan π, sont conjugués par rapport à la conique C^2, lorsque leur produit coïncide avec le pôle de la droite $\overline{AB}$ pris par rapport à cette conique (*Voir* n° 16).

De même que la multiplication des homographies, la multiplication des points de l'espace est une opération *associative* (n° 15).

18. Étant donnés deux points A et B examinons de quelle manière peut-on construire leur produit $AB = C$.

Puisque dans l'homographie $C = AB$ aux points fondamentaux de A correspondent les mêmes points y que dans l'homographie B, il faut bien que les deux plans tangents de S^2 qui passent par la droite $\overline{BC}$ contiennent respectivement les deux génératrices de S^2 qui passent par les points fondamentaux de S^2 (n° 5), c'est-à-dire il faut que la droite $\overline{BC}$ s'appuie sur ces deux génératrices (*Comparez* n° 9). De même, puisque dans l'homographie AB les points fondamentaux de B correspondent aux mêmes points x que dans l'homographie A, il faut bien que la droite $\overline{AC}$ s'appuie sur les deux directrices de S^2 qui passent par les points fondamentaux de B.

Il resulte de là que *le produit C de deux points A et B se trouve sur une droite passant par B et appuyée sur les génératrices de S^2 ren-*

*) Pourvu toutefois que le produit ne soit pas indéterminé, comme cela arrive lorsque les points A et B constituent les intersections de S^2 avec une droite issue de O.

contrées par la droite $\overline{OA}$, ainsi que sur une droite passant par A et appuyée sur les directrices de S^2 rencontrées par la droite $\overline{OB}$.

Cette propriété fournit le moyen de construire le point AB toutes les fois que la droite AB ne passe point par O. Mais si les points A et B sont sur une droite issue de O, leur produit, s'il est déterminé, ne peut plus être construit par le procédé précédent, puisque les deux droites $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ coïncident avec $\overline{AB}$. Le point $C = AB$ sera alors sur la droite $\overline{AB}$ à une position telle, que si l'on considère sur cette droite les homographies (A), (B), (C) ayant pour points fondamentaux les points où $\overline{AB}$ rencontre S^2 et dans lesquelles au point O correspondent respectivement les points A, B, C, l'homographie (C) sera le *produit* des deux homographies (A) et (B). On est conduit à cette propriété du produit AB, pour ce cas, en étudiant (voir n⁰ 22) de quelle manière varie le produit AB lorsqu' on fait varier l'un ou l'autre de ses facteurs. Dans le cas où la droite $\overline{AB}$ coupe S^2 en deux points distincts on peut rattacher la propiété précédente, par suite de ce qui a été dit au n⁰ 16, à ce fait que le rapport anharmonique des homographies (A), (B), (C) est le même avec celui des homographies A, B, C respectivement (n⁰ 11).

Le produit de deux points dont l'un est le point O coïncide naturellement avec le second de ces points.

19. La construction du point AB, que nous venons de considérer, laisse voir que *si dans le produit AB le point A tombe sur la surface S^2, le point $C = AB$ doit être sur la génératrice de S^2 passant par A; si au contraire c'est le point B qui tombe sur la surface S^2, le point C doit être sur la directrice de S^2 passant par B.*

A la proposition précédente correspond cette propriété des homographies binaires:

Le produit AB de deux homographies A, B, dont la première (ou la seconde) est singulière, est une homographie singulière ayant son premier (ou son second) point fondamental commun avec A (ou B).

Si les points A et B tombent sur la surface S^2, leur produit est déterminé et coïncide avec un point de S^2, point situé à l'intersection de la génératrice de S^2 passant par A avec la directrice passant par B, tant que le plan des deux autres droites de cette surface qui passent respectivement par les points A et B ne contient pas le point O (n⁰ 17).

20. Il y a deux opérations inverses de la multiplication des points, designées toutes les deux sous le nom de *division*. Ce sont les opérations qui donnent les facteurs X et Y propres à satisfaire aux relations:

$$XB = C, \quad AY = C.$$

Le cas le plus simple de division est celui où le produit C coïncide avec le point O, point qui représente l'homographie identique. Il est manifeste que dans ce cas les équations $XB = O$ et $AY = O$ ne peuvent être satisfaites que si l'on prend pour X le point B' qui représente l'homographie inverse de celle représentée par le point B, et aussi pour Y le point A' qui représente l'homographie inverse de celle représentée par le point A.

On voit ainsi que la correspondance entre deux points A et B dont le produit coïncide avec le point O, est *l'homologie involutive* ayant pour centre le point O et pour base le plan π (n° 8).

Comme deux points correspondants dans cette homologie représentent toujours deux homographies binaires inverses l'une de l'autre, nous désignerons toujours par A^{-1} le point homologue de A, et nous l'appellerons *inverse* du point A. — Il n'y a evidemment que le point O et les points du plan π qui coïncident avec leurs inverses.

Les équations $AX = O$ et $XA = O$ admettent donc pour solution $X = A^{-1}$. Mais il est à remarquer que dans le cas où A se trouve sur S^2, et où A^{-1} constitue le second point d'intersection de la droite $\overline{OA}$ avec S^2, une seule valeur de AA^{-1} ou de $A^{-1}A$ coïncide avec O. Ainsi dans ce cas on ne saurait point dire que l'équation $AX = O$ ou $XA = O$ est *identifiée* pour $X = A^{-1}$, mais simplement qu'elle est *satisfaite* par cette valeur de X.

Il résulte de la définition donnée au n° 15 pour le produit de plusieurs homographies, que l'inverse du produit de plusieurs points $A_1, A_2, \ldots A_m$ est le produit des points $A_m^{-1}, \ldots A_2^{-1}, A_1^{-1}$; de sorte qu'à chaque valeur de $A_1 A_2 \ldots A_m$ correspond une valeur de $A_m^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$ qui en est l'inverse.

Lorsque les points A_i sont tous sur le plan π, l'inverse du produit $A_1 A_2 \ldots A_m$ sera $A_m \ldots A_2 A_1$.

21. Les propriétés de la division des points se trouvent compliquées à celles de la multiplication. Ainsi, en étudiant de quelle manière les points X et Y, satisfaisant aux équations $XB = C$ et $AY = C$, varient lorsque C varie, on ne fait qu'étudier comment le produit AB varie lorsque l'un ou l'autre de ses facteurs varie.

C'est cette étude que nous allons précisement aborder dans le paragraphe qui suit. Cependant il convient de signaler dès à présent cette propriété fondamentale de la division des points:

Les équations $XB = C$ et $AY = C$ sont satisfaites pour $X = CB^{-1}$ et $Y = A^{-1}C$, c'est-à-dire qu'elles admettent respectivement pour solutions toutes les valeurs de CB^{-1} et de $A^{-1}C$ (voir n° 23).

Ainsi, par exemple, on sera sûr qu'en prenant pour X une valeur quelconque de CB^{-1} on obtiendra inévitablement pour XB une valeur

égale à C, quoiqu'il pourra se faire, dans certains cas, que XB admette une infinité de valeurs.

IV.

Comment varie le produit de deux points lorsqu'un de ces points varie.

22. Nous avons vu (nº 18) que pour la construction du produit C de deux points A et B il y a lieu de considérer les génératrices g_A, g'_A de S^2 appuyées sur $a = \overline{OA}$ et les directrices h_B, h'_B appuyées sur $b = \overline{OB}$. Le point $C = AB$ constitue l'intersection d'une droite a' passant par B et appuyée sur g_A, g'_A et d'une droite b' passant par A et appuyée sur h_B, h'_B.

De cette manière si l'on considère une surface du second degré T^2 coupant S^2 suivant les quatre droites g_A, g_A', h_B, h_B' et passant par O, contenant par conséquent les droites $a = \overline{OA}$ et $b = \overline{OB}$, le point C doit être sur cette surface T^2 à l'intersection de la droite a' de cette surface, autre que b, passant par B, et de la droite b', autre que a, passant par le point A.

On voit par là que le groupe des quatre points

$$O,\ (a,\ g_A),\ A,\ (a,\ g'_A)$$

(où la droite a rencontre les droites b, g_A, b', g'_A) est projectif à celui des quatre points

$$B,\ (a',\ g_A),\ C,\ (a',\ g'_A)$$

(où la droite a' rencontre les droites b, g_A, b', g_A'); et que, de même, le groupe des quatre points O, (b, h_B), B, (b, h'_B), situés sur b, est projectif à celui des quatre points A, (b', h_B), C, (b', h'_B) situés sur b'.

Si l'on suppose maintenant que dans le produit AB le facteur B varie, la correspondance entre les points B et $C = AB$ sera telle qu'aux points B de toute droite a' appuyée sur les droites g_A et g'_A de S^2, rencontrées par $\overline{OA}$, correspondront des points C de la même droite et cela suivant une homographie ayant pour points fondamentaux les points (a', g_A) et (a', g'_A) et dont le rapport anharmonique $B(a', g_A)\ C(a', g'_A)$ sera le même quelle que soit la droite a' et égal au rapport anharmonique $O(a, g_A)\ A(a, g'_A)$. Aux points B d'une droite quelconque b'' correspondront les points C d'une droite c'' rencontrant toutes les droites qui s'appuient simultanement sur g_A, g'_A et b''. De même aux points B d'un plan β correspondront les points C d'un autre plan γ coupant β suivant une droite appuyée sur g_A et g'_A.

Cette correspondance entre les points B et C est donc une homographie, qu'on peut appeler une *homologie gauche,* caractérisée simplement par ce fait, que les droites a' appuyées sur deux axes fixes (g_A et g'_A) correspondent à elles-mêmes, et dont la détermination s'achève en fixant

deux points correspondants (ces points sont $B = O$ et $C = A$ dans notre cas) sur une droite appuyée sur les deux axes.*)

Dans cette homographie tous les points des axes g_A et g'_A correspondent à eux-mêmes, ainsi que tous les plans passant par ces axes. De même qu'entre les points B, C de toute droite a' rencontrant les deux axes est établie une homographie ayant un rapport anharmonique constant, de même, entre les plans passant par une telle droite est établie une homographie ayant le même rapport anharmonique.

La surface S^2, de même que toute surface du second ordre passant par les axes g_A et g'_A, est transformée en elle-même par cette homologie. De cette manière les directrices de S^2 se correspondent à elles-mêmes, tandisque ses génératrices se correspondent homographiquement de manière à déterminer sur la conique C^2 une homographie qui coïncide avec l'homographie représentée par le point A^{-1}. Cette propriété remarquable de la correspondance établie entre les génératrices de S^2, résulte de ce fait que le rapport anharmonique $x'(\pi, g_A)\ y'(\pi, g'_A)$ de l'homographie établie sur C^2 par les génératrices homologues de S^2 est égal au rapport anharmonique $O(a, g_A)\ A(a, g'_A)$, tandisque le rapport anharmonique $x(\pi, g_A)\ y(\pi, g'_A)$ de l'homographie de C^2 représentée par le point A est égal au rapport anharmonique $O(a, g'_A)\ A(a, g_A)$, d'après le n⁰ 11.

Si la droite $\overline{OA}$ touche la surface S^2, les deux droites g_A et g'_A déviennent infiniment voisines, et l'homologie gauche revêt des caractères spéciaux. Dans ce cas sur toute droite touchant S^2 en un point de l'axe double est établie une homographie ayant ses deux points fondamentaux confondus avec le point de contact. Étant donnée la correspondance homographique qui existe entre les points del'axe double et les plans qui touchent S^2 en ces points, la détermination de l'homologie gauche s'achève en donnant deux points correspondants ($B = O$, $C = A$) sur une droite touchant S^2 en un point de l'axe double.

Le point A peut d'autre part tomber sur la surface S^2. L'homologie gauche devient alors singulière; g_A étant la génératrice de S^2 qui contient le point A, à tout point A de l'espace non situé sur la droite g'_A correspond un point C de g_A situé dans le plan $\overline{Bg'_A}$, tandisqu'à tout point B de la droite g'_A correspond tout point C du plan $\overline{Bg_A}$.

En supposant en second lieu que dans le produit AB c'est le point A qui varie, la correspondance entre le point A et le point $C = AB$ sera une homologie gauche ayant pour axes les directrices h_B et h'_B de S^2 rencontrées par la droite $\overline{OB}$, et dans la quelle au point $A = O$ correspond le point $C = B$. Dans cette homologie les génératrices de

*) Les propriétés de cette sorte d'homographies furent étudiées d'abord par v. Staudt, dans sa *Geometrie der Lage* (n⁰ 230 etc.).

S^2 correspondent à elles-mêmes, tandisque les directrices de S^2 se correspondent homographiquement de manière à déterminer sur la conique C^2 une homographie qui coïncide avec celle représentée par le point B.

Cette homologie devient singulière lorsque le point B tombe sur la surface S^2. Alors, h_B étant la directrice de S^2 passant par B, à tout point A de l'espace non situé sur h'_B, correspond le point C de h_B situé dans le plan $\overline{Ah'_B}$; mais si le point A appartient à la droite h'_B, le point C correspondant devient indéterminé et coïncide avec tout point du plan $\overline{Ah_B}$*).

23. Nous sommes maintenant à même de résoudre une question importante relative à la division des homographies ou bien des points qui les représentent.

Étant données les équations

$$XB = C \quad \text{et} \quad AY = C,$$

on voit que lorsque A et B ne sont pas situés sur la surface S^2, on aura

$$XBB^{-1} = X = CB^{-1} \quad \text{et} \quad A^{-1}AY = Y = A^{-1}C,$$

puisque dans ce cas $A^{-1}A$ et $B^{-1}B$ ne doivent avoir qu'une seule valeur égale à O (n° 20). Il reste donc à voir si les formules

$$Y = CB^{-1} \quad \text{et} \quad Y = A^{-1}C$$

fournissent dans tous les cas les solutions des équations proposées.

Pour cela nous remarquons que la correspondance homologique entre les points B et C est la même lorsque ces points sont liés entre eux soit par la relation $AB = C$, soit par la relation $B = A^{-1}C$, quel que soit A. Cela résulte de ce que, dans les deux cas, la correspondance établie entre les génératrices de S^2 détermine sur la conique C^2 une même homographie, celle représentée par le point A^{-1}.

De même: la correspondance homologique entre les points A et C est la même lorsque ces points sont liés entre eux par la relation $AB = C$ ou par la relation $A = CB^{-1}$, et cela quel que soit B.

De cette manière on est précisement conduit à la proposition que nous avons énoncée au n° 21.

24. Puisque la correspondance homologique entre les points B et $C = AB$ transforme la surface S^2 en elle-même, il faut que les plans polaires, par rapport à S^2, de deux points B et C homologues soient aussi homologues. Or, dans cette homologie au point O correspond le point A, il faut par conséquent qu'au plan π corresponde le plan polaire de A. On voit par là que: *Lieu des produits d'un point A par les divers points du plan π est le plan polaire de A par rapport à S^2.*

---

*) D'après ce qu'on sait (*cf.* F. Klein *in Math. Ann.* t. IX, p. 188), toute homographie de l'espace qui transforme chaque système de droites de la surface S^2 enlui-même, est le produit de deux homologies gauches des deux espèces considérées ($AX = Y$ et $XB = Y$). Deux points X et Y qui se correspondent dans une pareille homographie doivent être liés entre eux par la relation $AXB = Y$.

On demontrerait de même que: *Lieu des produits des divers points de π par le point B est aussi le plan polaire de B.*

De cette manière étant donnés deux points A_1 et A_2 *conjugués* par rapport à S^2, on pourra toujours trouver deux points R_1 et R_2 de π tels que l'on ait:

$$R_1 A_1 = A_2 \quad \text{et} \quad A_1 = A_2 R_2,$$

ou bien

$$A_1 = R_1 A_2 \quad \text{et} \quad A_1 R_2 = A_2.$$

On aura, en effet,

$$R_1 = A_1 A_2^{-1} = A_2 A_1^{-1} \quad \text{et} \quad R_2 = A_1^{-1} A_2 = A_2^{-1} A_1.$$

On voit par là que *deux points A_1 et A_2, conjugués par rapport à S^2, sont liés entre eux par les relations:*

$$A_1 A_2^{-1} = A_2 A_1^{-1}, \quad A_1^{-1} A_2 = A_2^{-1} A_1,$$

dont chacune est une conséquence de l'autre.

En nous rappelant maintenant que deux points conjugués par rapport à S^2 représentent deux homographies binaires conjuguées entre elles (n^0 4), nous arrivons à cette propriété remarquable des homographies conjuguées:

On obtient toutes les homographies conjuguées à une homographie donnée soit en multipliant cette homographie par les diverses homographies involutives, soit en multipliant les diverses homographies involutives par l'homographie considérée.

Dans le cas où l'homographie considérée est singulière, cette proposition n'a lieu qu'avec certaines restrictions, relatives au cas d'indétermination du produit.

25. Les propriétés précédentes de la multiplication des points conduisent à certaines notions dont la considération pourrait faciliter l'examen ultérieur de ces propriétés.

Ainsi, comme les produits d'un point A par les divers points d'une droite b ou d'un plan β forment encore une droite c ou un plan γ, on pourrait appeler la droite c *produit Ab du point A par la droite b*, et de même le plan γ *produit $A\beta$ du point A par le plan β*. On pourrait considérer également le produit d'un plan ou d'une droite par un point, lequel produit serait aussi un plan ou une droite.

Supposons que dans le produit d'un point A par un plan β le point A varie, et considérons la correspondance qui a lieu entre le point A et le plan $\gamma = A\beta$.

Si le plan β coïncide avec π, à chaque point A correspondra, d'après la proposition du n^0 précédent, un plan γ coïncidant avec le plan polaire de A par rapport à la surface S^2.

Si maintenant le plan β est le pôle d'un point arbitraire B, le plan $\gamma = A\beta$, correspondant à un point A, sera le plan polaire du

point AB par rapport à la surface S^2, puisqu'on a $\beta = B\pi$, $\gamma = AB\pi$. La correspondance A, $\gamma = A\beta$ peut donc être obtenue en combinant l'homologie gauche A, $C = AB$ avec la correlation polaire C, $\gamma = C\pi$ (par rapport à la surface S^2). Elle consiste donc en une corrélation dans laquelle les droites de S^2 se correspondent de la même manière que dans l'homologie gauche A, $C = AB$.

La corrélation A, $\gamma = A\beta$ devient *focale*, c'est-à-dire que chaque point A est situé dans le plan correspondant γ, dans le cas où le plan β passe par le point O. Au point O correspond alors le plan β.

Les plans qui constituent les produits des divers points d'un plan α par un autre plan β passent par un même point C, le quel coïncide avec le produit des pôles des deux plans α et β, et qu'on peut appeler aussi *produit de ces deux plans*. On peut considérer de même *le produit d'un plan par une droite* etc.

V.

Correspondance entre deux points A et B dont le produit AB est donné.

26. Considérons maintenant la correspondance entre deux points A et B tels que l'on ait $AB = C$.

Le point qui correspond de cette façon à un point A, est $B = A^{-1}C$; ce point coïncide par conséquent avec le point qui correspond à A^{-1} dans l'homologie gauche A', $B = A'C$, homologie ayant pour axes les directrices de S^2 appuyées sur $\overline{OC}$, et dans laquelle au point O correspond le point C (n⁰ 22). On voit par là que la correspondance dont il s'agit, entre les points A et B, est une homographie résultant de la combinaison de l'homologie involutive A, $A' = A^{-1}$ (n⁰ 20) avec l'homologie gauche A', $B = A'C$.

L'homographie A, $B = A^{-1}C$, homographie que je désignerai plus simplement par $(A, B)_C$, transforme en elle-même la surface S^2, de même que cela a lieu pour chacune des homologies dont elle est composée. Ainsi, tandisque l'homologie A, $A' = A^{-1}$ échange entre elles les droites de S^2 situées dans des plans passant en O, et que d'autre part l'homologie gauche A', $B = A'C$ transforme en elle même chaque génératrice de S^2 et établit une correspondance homographique entre les directrices de S^2 (n⁰ 22), *l'homographie $(A, B)_C$ échange entre eux les deux systèmes de droites de S^2 en faisant correspondre à toute directrice h de S^2 la génératrice située dans le plan $\overline{Oh}$, et à toute génératrice g de S^2 la directrice située dans le plan $\overline{Cg}$**).

*) Toute homographie de l'espace $[X, Y, XPY = Q]$ qui échange entre eux les deux systèmes de droites de la surface S^2, a cette même propriété par rapport à deux points P et Q déterminés, tenant la place ds O et de C.

L'homographie considérée échange entre elles les droites g_1 et h_1, g_2 et h_2 suivant lesquelles la surface S^2 est coupée par ses deux plans tangents passant par $\overline{OC}$.

La même homographie transforme aussi en elle-même toute surface du second degré passant par les droites g_1, h_1, g_2, h_2. Il est à remarquer qu'à toute droite d'une pareille surface appuyée sur les droites g_1, g_2 (ou bien sur les droites h_1, h_2), correspond une droite appuyée sur les droites h_1, h_2 (ou sur les droites g_1, g_2) et qui est l'homologue de la précédente dans l'homologie involutive ayant pour centre le point O et pour base le plan π.

Si deux points A et B sont correspondants dans cette homographie, leurs plans polaires α, β par rapport à S^2 (ainsi que leurs plans polaires par rapport à toute surface quadrique passant par g_1, h_1, g_2, h_2) seront aussi correspondants. Ainsi, R_0 étant un point du plan π, au point $A_0 = AR_0$ de α correspondra le point $B_0 = R_0B$ de β (n° 25).

Puisque les points situés sur une même droite issue de O sont échangeables entre eux (n° 17), l'homographie $(A, B)_C$ doit établir sur la droite $\overline{OC}$ une correspondance involutive, par laquelle les points O et C s'échangent entre eux de même que les points (g_1, h_2) et (g_2, h_1) de S^2 situés sur $\overline{OC}$. Elle établit aussi une involution entre les plans passant par la droite polaire de $\overline{OC}$ par rapport à S^2.

Cette homographie, en dehors des deux points doubles de l'involution établie sur $\overline{OC}$, a deux autres points fondamentaux (correspondant à eux-mêmes). Ce sont les points de contact (g_1, h_1) et (g_2, h_2) des deux plans tangents de S^2 passant par $\overline{OC}$. On voit ainsi que l'équation $A^2 = C$ est satisfaite, en général, par quatre valeurs de A, dont deux seulement donnent un carré déterminé.*)

Quelle est maintenant la correspondance entre les points de la droite polaire c de $\overline{OC}$? Nous savons que tout point R de π répresente une involution établie sur C^2, dans laquelle deux points de C^2 sont correspondants, s'ils sont situés sur une droite passant en R. De là il s'ensuit que les droites qui joignent un point quelconqe t de C^2 à deux points correspondants A et B de c, déterminent sur la conique C^2 deux points x et y qui se correspondent dans l'homographie binaire représentée par le point C. De là cette conséquence:

La correspondance établie par l'homographie $(A, B)_C$ entre les points de la polaire de $\overline{OC}$ peut être obtenue en projettant d'un point quelconque t de C^2 l'homographie de C^2 représentée par le point C.

---

*) Dans le cas où C coïncide avec O, l'équation $A^2 = O$ est satisfaite par une infinité de valeurs de A, c'est-à-dire par $A = O$ ainsi que par les divers points du plan π (n° 20).

Lorsque le point C tombe sur la surface S^2 la correspondance $(A, B)_C$ devient singulière. Dans ce cas si l'on désigne par g_C et h_C les deux droites de S^2 passant par le point C, à tout point A de l'espace non situé sur la droite g_C mais déterminant avec cette droite un plan $\overline{g_C h}$, correspond l'inverse du point de contact $(g_C h)$ du plan $\overline{g_C h}$, tandisqu'à un point A de g_C correspond tout point du plan tangent de S^2 en A^{-1}, plan qui passe ainsi par la droite g_C.

VI.

Multiplication des points qui représentent des homographies binaires ayant un point fondamental commun.

27. Les divers points d'un plan passant en O et touchant la surface S^2 en un point z de C^2 représentent, comme nous savons (n^{os} 5, 6), sur la conique C^2 des homographies ayant le point z pour point fondamental commun. Le produit de deux points d'un tel plan sera donc encore un point du même plan, toutes les fois qu'il sera déterminé.

Maintenant, comme un point situé hors de ce plan ne peut, évidemment, être considéré comme produit de deux points A, B de ce plan, que si ces deux points se présentent comme limites de points situés hors de ce plan, on a le droit, lorsqu'on ne veut s'occuper que de produits *de points situés dans ce plan*, de ne considérer pour chaque produit de tels points que celles seulement de ses valeurs qui sont situées dans ce plan.

On arrive ainsi à une multiplication de points d'un plan qui ne dépend que de certaines figures fondamentales situées dans ce plan, les quelles ne sont autre chose que les deux droites g, h et le point O.

Voici quelques propriétés de cette multiplication:

Si dans le produit $C = AB$ de deux points A, B du plan $\overline{gh}$ considéré on fait varier le point B, la correspondance entre les points B et C sera une homologie plane ayant pour axe la droite g et pour centre le point où la droite h est rencontrée par la droite $\overline{OA}$, et dans laquelle au point O correspondra le point A. De même, si l'on fait varier A, en laissant B fixe, la correspondance entre les points A et C sera une homologie ayant pour axe la droite h et pour centre le point de rencontre de g avec $\overline{OB}$, et dans laquelle au point O correspondra le point B (n^0 22).

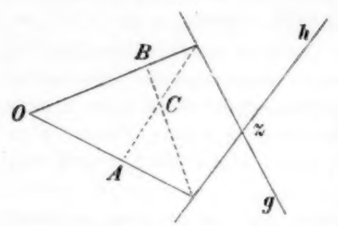
De là on déduit la construction suivante du produit de deux points A et B de $\overline{gh}$:

Le produit de deux points A, B du plan $\overline{gh}$ est un point situé sur la droite joignant B au point de rencontre de h avec $\overline{OA}$ et sur la droite joignant A au point de rencontre de g avec $\overline{OB}$.

Ce produit coïncide avec le point $(g, h) \equiv z$ toutes les fois que les points A et B tombent respectivement sur les droites g et h; en outre il peut être considéré comme coïncidant avec tout point de la droite $\overline{AB}$ lorsque les points A et B sont respectivement sur h et g. Enfin, dans le cas où les deux points A et B constituent les intersections des droites g et h par une droite issue de O, leur produit AB coïncide avec tout point du plan gh.

Il résulte de la construction du point $C = AB$, que nous venons d'indiquer, que les droites g, h; $\overline{zA}$, $\overline{zB}$; $\overline{zO}$, $\overline{zC}$ sont en involution, comme joignant le point z aux sommets du quadrilatère complet

$$(\overline{OA},\ \overline{AC},\ \overline{CB},\ \overline{BO}).$$



Si donc les points A et B se meuvent sur deux droites a et b passant en z, le point C se déplacera sur une droite c passant également en z. Cette droite c sera ainsi non seulement le lieu des produits des points A de a par les points B de b mais aussi le lieu des produits des points B de b par les points A de a.

La situation de la droite $c = \overline{zC}$ est telle que le rapport anharmonique $(gz\overline{O}hc)$ est égal au produit des rapports anharmoniques $(gz\overline{O}ha)$ et $(gz\overline{O}hb)$. Il est à remarquer que ces rapports anharmoniques, correspondant aux points A, B, C, sont respectivement égaux aux rapports anharmoniques des homographies binaires réprésentées par les points A, B, C.

La correspondance entre deux points A et B de gh tels que l'on ait $AB = C$, est une homographie dans laquelle les deux droites g et h s'échangent entre elles de manière qu'à chaque point A de g corresponde le point de h situé sur la droite $\overline{OA}$, et qu'à chaque point A de h corresponde le point de g situé sur la droite $\overline{CA}$.

Cette homographie établit ainsi une correspondance involutive entre les droites passant par z, de même qu'entre les points de la droite $\overline{OC}$, dont elle échange les points O et C ainsi que ses points situés sur les deux droites g et h.

D'après cela on voit bien de quelle manière se transforment en eux-mêmes dans l'homographie $(A, B)_C$ (n° 26) les deux plans tangents $\underline{g_1 h_1}$ et $\underline{g_2 h_2}$ de S^2 qui passent par la droite $\overline{OC}$.

VII.

Autres propriétés du produit de deux points.

28. Nous avous vu (n° 26) que dans l'homographie $(A, B)_C$ à toute droite d, appuyée sur les génératrices de S^2 rencontrées par $\overline{OC}$, correspond une droite d' appuyée sur les directrices de S^2 rencontrées par $\overline{OC}$, droite qui est l'homologue de la première dans l'homologie involutive ayant O pour centre et π pour base.

On voit d'après cela que *dans chaque plan passant en O il y a un couple de droites d, d' qui se correspondent dans toutes les homographies $(A, B)_C$ déterminées par les points C d'une droite issue du point O.* La première de ces deux droites est appuyée sur les génératrices de S^2 rencontrées par $\overline{OC}$, tandisque la seconde est également appuyée sur les directrices de S^2 rencontrées par $\overline{OC}$.

De là il résulte que *la droite $\overline{OC}$, sur laquelle se trouve le produit de deux points A et B, ne dépend que des droites d et d' du plan $\overline{AOB} = \mu$ qui passent respectivement par les points A et B et sont séparées harmoniquement par le point O et le plan π. La droite $\overline{OC}$ rencontre à la fois les génératrices de S^2 appuyées sur d et ses directrices appuyées sur d'.*

Il est aisé de construire les deux droites d et d' étant donnés les points A et B. En effet, si A_0 et B_0 sont les points de π situés sur les droites $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$, et que D soit l'intersection des droites $\overline{AB_0}$ et $\overline{BA_0}$, les deux droites d et d' joindront respectivement les points A et B au point D_0 de π situé sur la droite $\overline{OD}$.

29. Nous venons de voir comment on peut construire la droite passant en O et contenant le point $C = AB$. On pourra donc, dans le cas où le plan $\mu = \overline{AOB}$ ne touche pas S^2, achever la détermination du point C en construisant un plan passant par la droite $m = \overline{AB}$ et contenant ce point.

Ainsi supposons que le plan $\mu = \overline{AOB}$ ne touche point S^2.

En prenant pour A un point arbitraire de la droite m, on voit que si l'on fait mouvoir le point B sur cette droite, le point $C = AB$ doit décrire une droite c. De cette manière le plan γ qui passe par m et contient le point $C = AB$, correspond homographiquement au point B. Or, lorsque le point B coïncide avec A, le plan γ coïncide avec μ, et lorsque le point B coïncide avec un des points (h', m) ou (h'', m) de S^2 situés sur la droite m, le plan γ coïncide respectivement avec le plan $\overline{h'm}$ ou avec le plan $\overline{h''m}$. Si donc la droite m ne touche point S^2, la position du plan γ sera telle que le rapport anharmonique des

points A, (h', m), B, (h'', m) sera égal au rapport anharmonique des plans μ, $\overline{h'm}$, γ, $\overline{h''m}$.

De là on déduit que *dans l'homologie gauche ayant pour axes les deux directrices de S^2 appuyées sur la droite $\overline{AB}$ et dans laquelle au point A correspond le point B, au plan $\overline{AOB}$ doit correspondre un plan γ passant par AB et contenant le point $C = AB$.*

Cette propriété doit évidemment subsister même si la droite m touche la surface S^2.

Si les deux points A et B sont conjugués par rapport à S^2 on a cette proposition: *Le produit C de deux points A et B, conjugués par rapport à la surface S^2, est situé dans un plan γ passant par la droite $\overline{AB}$ et conjugué du plan $\overline{AOB}$ par rapport à la surface S^2.*

On peut utiliser ce théorème pour la construction du point suivant lequel le produti de deux points quelconques A et B est projetté sur le plan $\overline{AOB} = \mu$ par une droite issue du pôle M de ce plan (par rapport à la surface S^2).

Considérons, en effet, les points B_1 et A_1 où les deux droites $\overline{OB}$ et $\overline{OA}$ sont rencontrées respectivement par les plans polaires des points A et B, et qui constituent les points conjugués des A et B qui soient situés respectivement sur les droites $\overline{OB}$ et $\overline{OA}$. Comme le produit AB_1 est situé dans un plan γ_1 passant par $\overline{AB_1}$ et conjugué de μ, on voit que le lieu des produits du point A par les divers points de la droite $\overline{OB}$ (qui contient B_1) sera une droite passant par A et contenue dans ce plan γ_1; de mêmele lieu des produits des divers points de la droite $\overline{OA}$ par le point B sera une droite passant par B et contenue dans un plan γ_2 passant par $\overline{A_1B}$ et conjugué du plan μ.

Le produit AB sera donc situé à la fois sur les deux plans γ_1 et γ_2, passant par le pôle M du plan μ par rapport à la surface S^2. De cette façon la projection du point $C = AB$ sur le plan $\overline{AOB}$, par une droite issue de M coïncidera avec l'intersection des droites $\overline{AB_1}$ et $\overline{A_1B}$, suivant lesquelles le plan μ est coupé par les deux plans γ_1 et γ_2.

On arrive ainsi à ce résultat:

Le point C_0, suivant lequel le point $C = AB$ est projetté sur le plan μ du pôle M de ce plan, ne dépend que de la situation respective des points A et B par rapport au point O et à la section M^2 de la surface S^2 par le plan μ. Ce point C_0 est donné par l'intersection de deux droites joignant respectivement les points A et B aux points (B_1 et A_1) des droites $\overline{OB}$ et $\overline{OA}$, qui sont les conjugués des points A et B par rapport à la conique M^2.

Cette construction n'est plus applicable dans le cas où les deux points A et B sont conjugués par rapport à la conique M^2, puisque alors les deux droites $\overline{AB_1}$ et $\overline{A_1B}$ se confondent avec $\overline{AB}$. Toutefois,

il est aisé, dans tous les cas, de construire directement une nouvelle droite, contenant le point C_0: celle issue du point O. La droite $\overline{OC_0}$, en effet, qui n'est autre chose que la projection de la droite $\overline{OC}$ sur le plan $\overline{AOB}$, par un plan issu du point M, coïncide avec la polaire du point où la droite $\overline{AB}$ perce le plan π prise par rapport au couple de droites $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$.

30. Examinons maintenant la situation respective des deux points $C_1 = AB$ et $C_2 = BA$ par rapport à la surface S^2.

Puisque dans l'homologie involutive ayant pour base le plan $\mu = \overline{AOB}$ et pour centre le pôle M de ce plan, les directrices de S^2 rencontrées par $\overline{OB}$ et $\overline{AC_1}$ sont homologues aux génératrices rencontrées par $\overline{OB}$ et $\overline{AC_2}$, il suit que les droites $\overline{AC_1}$ et $\overline{AC_2}$ sont homologues; de même, les droites $\overline{BC_1}$ et $\overline{BC_2}$ sont homologues entre elles, puisque les génératrices de S^2 rencontrées par $\overline{OA}$ et $\overline{BC_1}$ sont homologues aux directrices de S^2 rencontrées par $\overline{OA}$ et $\overline{BC_2}$.

Il s'ensuit de là que:

Les deux points $C_1 = AB$ et $C_2 = BA$ sont séparés harmoniquement par le plan $\overline{AOB} = \mu$ et le pôle M de ce plan par rapport à S^2.

Le fait que les deux droites $\overline{MC_1}$ et $\overline{MC_2}$ coïncident, aurait pu être déduit de ce qu'elles rencontrent le plan $\overline{AOB}$ en un point C_0 ne dépendant pas de l'ordre des facteurs A et B (n° 29).

Comme maintenant chaque plan passant par O admet pour pôle, par rapport à toutes les surfaces du second degré circonscrites à S^2 le long de la conique C^2, un même point M du plan π, il faut que les deux points C_1 et C_2 soient situés sur une même des dites surfaces. De là il résulte *que les homographies représentées par les deux points AB et BA ont des rapports anharmoniques égaux* (voir le n° 11).

Lorsque le plan $\overline{AOB}$ touche la surface S^2 en un point z, les deux points AB et BA sont encore sur une même droite (de ce plan) passant par le point z (n° 27).

31. La construction, que nous avons donné au n° 18, pour la détermination du produit de deux points A et B, montre que le lieu des produits des divers points A d'une droite a issue de O par les divers points B d'une droite b issue également de O, est une surface du second degré T^2_{ab} contenant les droites a et b, et coupant S^2 suivant deux génératrices appuyées sur a et suivant deux directrices appuyées sur b*). Toute *génératrice* de cette surface T^2_{ab} (c'est-à-dire

*) En général, étant données deux droites arbitraires a et b dans l'espace, lieu du produit de deux points A et B, appartenant respectivement aux deux droites a et b, est une surface V^2 du second degré ayant quatre droites communes avec S^2. Les produits des divers points de a par la droite b (n° 25) constituent les génératrices de V^2, tandisque les produits de a par les divers points de b

une droite de T^2_{ab} appuyée sur les *directrices* que S^2 a en commun avec T^2_{ab}), rencontrant la droite a en un point A, est lieu des produits de ce point A par les divers points de b; de même toute directrice de T^2_{ab}, rencontrant la droite b en un point B, est lieu des produits des divers points de a par le point B. De cette manière le produit de deux points A et B, appartenant respectivement aux deux droites a et b, est donné par l'intersection de la génératrice de la surface T^2_{ab} passant par A avec la directrice de cette surface passant par B.

32. La surface T^2_{ab}, qui correspond ainsi à deux droites a et b issues de O, est coupée par le plan π suivant une conique Π^2 qui passe 1° par les traces A_0 et B_0 des droites a et b sur le plan π; 2° par les points de contact des tangentes menées des points A_0 et B_0 à la conique C^2, ces points n'étant autre chose que les traces, sur le plan π, des quatre droites communes aux deux surfaces S^2 et T^2_{ab}.

Il résulte de là que la conique Π^2, suivant laquelle le plan π est coupé par la surface T^2_{ab}, coïncide avec le lieu des intersections de deux droites du plan π passant respectivement par les points A_0 et B_0 et conjuguées par rapport à la conique C^2. Cette conique Π^2 est donc circonscrite à une infinité de *quadrilatères circonscrits à la conique* C^2*); les diagonales de ces quadrilatères passent par le pôle de la droite $\overline{A_0B_0}$ par rapport à C^2, tandisque les côtés opposés de ces mêmes quadrilatères se rencontrent sur la droite $\overline{A_0B_0}$.

Dans le cas où les deux points A_0 et B_0 sont conjugués par rapport à C^2, la conique Π^2 est formée par les deux droites polaires des points A_0 et B_0 par rapport à C^2; chacune des surfaces S^2 et T^2_{ab} est alors sa propre polaire reciproque par rapport à l'autre.

Enfin, dans le cas où les points A_0 et B_0 sont sur une même tangente de C^2, la conique Π^2 est formée par cette tangente de C^2 et par une autre droite coupant C^2 suivant les deux points où cette conique est touchée par des droites passant respectivement par A_0 et B_0. La surface T^2_{ab} est formée dans ce cas par deux plans tangents de S^2 dont l'un coïncide avec le plan $\overline{ab}$ et l'autre avec le plan qui porte les diverses déterminations du produit A_1B_1, A_1 étant le point où a est rencontrée par la directrice de S^2 située dans le plan $\underline{ab}$, et B_1 le

---

constituent ses directrices. Cette surface V^2 a en commun avec S^2 deux génératrices appuyées sur a, qui sont les produits des points de S^2 situés sur a par la droite b, et deux directrices appuyées sur b, etc. — Voir pour d'autres propriétés de ces surfaces V^2 les paragraphes de la seconde partie de ce Mémoire.

*) On voit par là qu'en général: *Lorsque deux surfaces S^2 et T^2 se coupent suivant quatre droites, le plan polaire de tout point de T^2 par rapport à S^2 coupe les surfaces S^2 et T^2 suivant deux coniques C^2 et Π^2 telles qu'il y ait une infinité de quadrilatères circonscrits à la première et inscrits dans la seconde.*

point où b est rencontrée par la génératrice de S^2 située dans le même plan.

Les deux surfaces T^2_{ab} et T^2_{ba}, sont homologues l'une de l'autre dans l'homologie involutive ayant pour base le plan $\overline{ab}$ et pour centre le pôle de ce plan par rapport à S^2, et cela dans le cas où le plan $\overline{ab}$ ne touche point S^2. En effet, dans ce cas, tout point AB de T^2_{ab} est homologue du point correspondant BA de T^2_{ba} (n° 30).

Les deux surfaces T^2_{ab} et T^2_{ba} se coupent toujours suivant les deux droites a et b et suivant une conique Π^2 située dans le plan π.

VIII.

Correspondances entre les points de l'espace résultant de la transformation des homographies binaires qu'ils représentent.

33. Au procédé algébrique qui consiste à effectuer sur les deux séries de variables x et y d'une forme bilinéaire

$$B_{xy} = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2$$

une même transformation linéaire, en remplaçant respectivement

$$x_1,\quad x_2 \quad \text{par} \quad a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2, \quad -a_{11}x'_1 - a_{12}x'_2$$

et

$$y_1,\quad y_2 \quad \text{par} \quad a_{21}y'_1 + a_{22}y'_2, \quad -a_{11}y'_1 - a_{12}y'_2,$$

correspond une opération également importante dans la composition des homographies. Si l'on pose, en effet,

$$A_{xy} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

on voit qu' on peut obtenir ce que devient $B_{xy} = 0$ par la substitution linéaire proposée, en éliminant x et y entre les équations:

$$A_{xx'} = 0,\ B_{xy} = 0,\ A_{yy'} = 0.$$

Ainsi l'homographie representée par l'équation déduite de $B_{xy} = 0$ par la transformation précédente, sera

$$A^{-1}BA.$$

On voit de cette manière que

Lorsqu' on a une homographie binaire A, on peut faire correspondre à toute homographie binaire B, une autre homographie $B_A = A^{-1}BA$, dans laquelle deux points x' et y' sont correspondants, s'ils sont les transformés, par l'homographie A, de deux points x et y correspondants dans l'homographie B.

Cette nouvelle homographie $B_A = A^{-1}BA$ est appelée *transformée de B par l'homographie A* *).

*) On sait que dans la théorie des substitutions on appelle *transformée d'une substitution B par une autre substitution A* la substitution représentée par ABA^{-1}.

Il est aisé de voir que l'homographie $A^{-1}BA$ a, pour points fondamentaux, les transformés, par l'homographie A, des points fondamentaux de B, et que son rapport anharmonique est égal à celui de l'homographie B.

D'après cela il est clair que: Toute homographie B ayant avec l'homographie A les mêmes points fondamentaux, est transformée en elle-même par l'homographie A; c'est-à-dire que l'on a dans ce cas $A^{-1}BA = B$. Cette propriété peut aussi être déduite de ce que, dans ce cas, les deux homographies A et B sont *échangeables* entre elles (n⁰ 14).

Il est à remarquer que si une homographie est la transformée B_A de B par l'homographie A, réciproquement l'homographie B est la transformée de B_A par l'homographie A^{-1}.

34. La correspondance (B, B_A) entre les points B et $B_A = A^{-1}BA$, qui représentent les diverses homographies binaires B et leurs transformées par une même homographie A, est des plus intéressantes.

Puisque la relation $B_A = A^{-1}BA$ peut être considérée comme provenant de l'élimination de C entre les équations

$$BA = C \quad \text{et} \quad C = AB_A,$$

on voit que la correspondance entre les points B et B_A doit coïncider avec *l'homographie de l'espace* qui résulte de la combinaison des deux homologies gauches (B, C) et (C, B_A), définies par les équations précédentes (d'après le n⁰ 22).

Maintenant, comme la surface S^2 est transformée en elle-même par chacune des homologies (B, C) et (C, B_A), elle doit l'être aussi par l'homographie (B, B_A). De plus, par suite des propriétés des correspondances établies par les homologies (B, C) et (C, B_A) entre les droites de la surface S^2 (n⁰ 22), il se trouve que l'homographie (B, B_A) transforme en lui-même chaque système de droites de S^2, en faisant correspondre à chaque point x de la conique C^2 le point y de la même conique qui correspond à x dans l'homographie binaire A.

L'homographie (B, B_A) fait correspondre à lui-même tout point de la droite $\overline{OA}$. Les points de cette droite représentent, en effet, des homographies qui se transforment en elles-mêmes par l'homographie A. De même tous les plans passant par la polaire de $\overline{OA}$, polaire qui contient les deux points fondamentaux z_1 et z_2 de l'homographie binaire A, se transforment en eux-mêmes. La correspondence entre les points d'un pareil plan est telle, que chaque conique de ce plan qui touche S^2 aux points z_1 et z_2 est transformée en elle-même. Les homographies ainsi établies sur ces diverses coniques ont toutes leur rapport anharmonique égal à celui de l'homographie binaire A, établie sur C^2. Quant au rapport anharmonique de l'homographie établie entre les

points de $\overline{z_1 z_2}$, ou bien entre les plans passant par la droite $\overline{OA}$, il est égal au carré du rapport anharmonique précédent.

L'homographie (B, B_A) transforme en elle-même toute surface du second degré touchant S^2 aux points z_1 et z_2. Le fait que toutes les homographies (B, B_A) transforment en elles-mêmes toutes les surfaces du second degré circonscrites à S^2 le long de la conique C^2, tient précisement à cette circonstance que les deux homographies binaires B et $B_A = A^{-1} B A$ ont le même rapport anharmonique (n^0 11).

La transformation de toutes ces surfaces en elles-mêmes se fait de manière que chaque système de droites de chacune de ces surfaces se transforme en lui-même. Pour s'en assurer il suffit de remarquer que les droites de ces surfaces qui touchent S^2 aux points z_1 et z_2 correspondent à elles-mêmes.

La correspondance (B, B_A) que nous venons d'examiner équivaut à une rotation, effectuée autour de la droite $\overline{OA}$, dans le cas où la conique C^2 coïncide avec le cercle à l'infini sur la sphère. Pour s'en rendre compte on n'a qu'à remarquer que dans cette homographie le cercle à l'infini est transformé en lui-même, ainsi que toutes les sphères ayant leur centre sur la droite $\overline{OA}$. Les propriétés projectives que nous venons d'examiner, de ces rotations, nous seront bien utiles par la suite.

Seconde Partie.

Sur la représentation des rotations sphériques par des points de l'espace.

35. Le procédé de la représentation des homographies binaires par des points de l'espace, procédé que nous venons d'étudier dans la première Partie de ce Mémoire, peut être avantageusement appliqué à la représentation, aussi par des points, des diverses rotations sphériques, c'est-à-dire des rotations de l'espace effectuées autour d'axes passant par un point fixe.

Nous avons déjà eu l'occasion de rappeler qu'une rotation de l'espace, effectuée autour d'un axe quelconque, transforme en lui-même le cercle à l'infini C_∞ sur la sphère en établissant entre ses points une correspondance homographique. Réciproquement on peut voir facilement qu'à toute homographie établie sur le cercle à l'infini C_∞ est liée une seule rotation de l'espace autour d'un point fixe. Cela étant, on peut représenter les diverses rotations qui ont lieu autour d'un point de l'espace par les points qui représentent les homographies du cercle à l'infini liées à ces rotations. On voit bien que la multiplication des points de l'espace qui correspond à la composition des homo-

graphies binaires sera la même avec celle qui correspond à la composition des rotations sphériques.

La représentation des homographies du cercle à l'infini C_∞, par des points de l'espace, peut être établie d'une manière bien plus directe et élégante que s'il s'agissait d'homographies entre les éléments d'une courbe unicursale autre qu'une conique. Cela tient à ce qu'on peut faire coïncider avec le cercle à l'infini C_∞ la conique C^2 qui sert à la représentation des homographies binaires par des points.

Mais il y a encore ici une autre circonstance heureuse dont on ne doit point négliger de profiter. C'est d'avoir un point qui s'offre de lui-même, le point autour duquel ont lieu les rotations à représenter, pouvant servir comme point O, c'est-à-dire comme représentatif de la *rotation nulle*.

La représentation la plus convenable, par des points de l'espace, des rotations effectuées autour d'un point fixe, ne diffère donc pas de la représentation, par des points, des homographies du cercle à l'infini C_∞, représentation établie en employant le cercle à l'infini C_∞ comme conique C^2 et en prenant comme point O le point qui reste fixe dans toutes les rotations considérées. Maintenant pour achever à déterminer cette dernière représentation il faudra encore donner la sphère, ayant son centre en O, qui doit servir comme surface S^2, et distinguer aussi entre les deux systèmes de droites de cette sphère, lesquels doivent jouer des rôles différents dans la représentation, comme cela été expliqué au n° 3.

I.

Sur quelques notions de la géométrie des rotations sphériques.

36. Avant de venir à l'étude de la représentation des rotations sphériques par des points de l'espace, il convient de passer en revue certaines propriétés des rotations de l'espace autour d'un point et de présenter quelques explications relatives aux notions de *sens* et d'*orientation*, si importantes dans la géométrie des rotations sphériques.

37. Dans l'étude des diverses rotations effectuées autour d'un point O de l'espace il y a lieu de considérer, en dehors de *l'axe* de chacune de ces rotations, qui est une droite issue de O, le *plan équatorial* de cette rotation, qui est le plan mené par le point O perpendiculairement à son axe. On voit aisément que les points où ce plan coupe le cercle à l'infini C_∞ coïncident précisement avec les points fondamentaux z_1 et z_2 de l'homographie A, établie par la rotation considerée sur le cercle C_∞.

Une pareille rotation établit également des correspondances homographiques sur tous les cercles dont l'axe coïncide avec l'axe de cette

rotation. Les points fondamentaux de toutes ces homographies coïncident naturellement avec ceux de l'homographie A établie sur le cercle à l'infini. Le rapport anharmonique de toutes ces homographies est égal à celui de l'homographie A (n° 34).

C'est précisement de ce rapport anharmonique r que dépend la grandeur de l'angle ϑ de la rotation considéré. D'après la définition projective de l'angle, due à M. Laguerre, on a en effet:

$$\vartheta = i \log r,$$

en supposant que l'angle ϑ soit mesuré dans un sens convenable, dépendant de la manière dont r a été évalué.

A ce propos il convient de remarquer que de même que dans la détermination du rapport anharmonique d'une homographie on a devant soi une ambiguïté, provenant des deux rôles différents que l'on peut attribuer à chacun des deux points fondamentaux de l'homographie, de même dans l'évaluation de l'angle d'une rotation, angle qu'on ne doit déterminer qu'à un multiple près de 2π, on rencontre une ambiguïté, dépendant du sens positif qu'on peut adopter pour la mesure des arcs sur un cercle.

On voit maintenant qu'en partant de l'une ou de l'autre des deux valeurs $\left(r \text{ et } \frac{1}{r}\right)$ du rapport anharmonique d'une homographie, on obtient, d'après la formule précédente, pour ϑ deux valeurs correspondantes qui, abstraction faite d'un multiple de 2π, ne diffèrent entre elles que par le signe. Cela montre clairement comment les deux sources d'ambiguïté dont il s'agit se ramènent l'une à l'autre.

On se rend ainsi bien compte comment on arrive à séparer les deux points à l'infini d'un cercle entre eux, en attachant respectivement à ces deux points l'un ou l'autre des sens de rotation qu'on peut considérer sur ce cercle. Ce procédé de séparation est du reste parfaitement conforme à la théorie géométrique des éléments imaginaires, due à von Staudt.

38. Étant donnée une rotation autour du point O, déterminée par l'homographie A du cercle à l'infini C_∞ qui l'accompagne, on voit bien que pour avoir le plan β qui correspond dans cette rotation à un plan α passant par O il faut envisager les points où ces deux plans coupent le cercle C_∞. Ainsi x', x'' étant les points de C_∞ situés sur α, les points de C_∞ situés sur β seront les points y', y'' de ce cercle qui correspondent respectivement aux points x', x'' par l'homographie considérée A.

Deux plans α et β passant en O peuvent donc se correspondre de deux manières différentes dans une rotation effectuée autour du point O, puisqu'on peut faire correspondre aux points x', x'' de C_∞ situés sur

α, pris dans cet ordre, les points y', y'' de C_∞ situés sur β, pris dans l'ordre y', y'' ou bien dans l'ordre y'', y'.

Lorsque les deux plans α et β sont réels, la distinction entre ces deux cas peut être facilement faite au moyen de propriétés réelles, et cela en considérant le sens de rotation qui correspond sur le plan β à un sens de rotation déterminé attaché au plan α.

Nous savons, en effet, d'après ce que nous avons vu au n^0 précédent, qu'à chacun des points cycliques à l'infini d'un plan réel correspond sur ce plan un sens de rotation déterminé. Maintenant si l'on a deux plans réels α et β passant en O qui se correspondent, dans une rotation effectuée autour du point O, de telle façon qu'aux points x', x'' de α situés sur C_∞ correspondent respectivement les points y', y'' de β situés sur C_∞, il faudra bien qu'au sens de rotation attaché sur le plan α au point x' (ou x'') corresponde, par la rotation considérée, sur le plan β le sens attaché sur ce plan au point y' (ou y''). C'est là un fait qui tient précisement aux circonstances qui permettent de faire la distinction entre deux éléments imaginaires conjugués, d'après Staudt.

Il serait hors de propos d'entrer ici dans plus de dévéloppements là dessus. Je me bornerai seulement à éclaircir le fait précédent par un exemple bien simple. Considérons les rotations dans lesquelles le plan α, passant en O, doit correspondre à lui-même. Ces rotations sont bien de deux espèces: 1^0 celles qui laissent immobiles les deux points cycliques à l'infini de ce plan, 2^0 celles qui échangent ces deux points entre eux. Les premières de ces rotations admettent toutes le plan α pour plan équatorial, tandisque les secondes constituent toutes des *renversements* (c'est-à-dire des rotations suivant un angle $= \pi$) autour de droites passant en O et contenues dans le plan α. Or, tandisque les premières laissent invariable le sens de rotation sur le plan α, les secondes échangent entre eux les sens de rotation direct et inverse du plan α.

Ce qui précède montre bien que lorsqu'il s'agit de la correspondance entre des plans passant en O, dans les rotations qui laissent immobile ce point, il faut considérer ces plans comme déterminés par les points cycliques à l'infini qu'ils contiennent, pris dans un ordre déterminé. Dans le cas où les plans considérés sont réels, cela revient à leur attribuer une *orientation*, c'est-à-dire à leur attacher un sens de rotation déterminé. Dans le cas où ces plans sont imaginaires on pourrait encore trouver, toujours d'après la théorie de Staudt, une signification réelle de la distinction dont il s'agit; mais c'est là une question sur laquelle je n'ai pas à insister ici.

39. Des faits analogues ont lieu pour ce qui concerne la correspondance entre droites issues du point O dans des rotations effectuées

autour du point O. Ici encore il faut considérer les droites dont il s'agit comme déterminées par les deux plans touchant le cercle C_∞ qui y passent, pris dans un ordre déterminé.

Il est maintenant à remarquer que de même que les deux sens de rotation, qu'on peut considérer sur un plan réel, correspondent aux deux points cycliques à l'infini contenus dans ce plan, de même les deux sens de rotation, qu'on peut considérer *autour* d'une droite réelle, correspondent aux deux plans passant par cette droite et touchant le cercle à l'infini.

Pourtant, dans la considération des droites qui se correspondent dans des rotations, il convient souvent d'envisager plutôt un sens de description *sur* ces droites qu'un sens de rotation autour d'elles.

Du reste on sait bien comment on peut lier entre eux, d'une manière constante et uniforme, deux pareils sens, l'un considéré *autour* d'une droite de l'espace et l'autre *sur* cette même droite. L'emploi d'un observateur pouvant servir à indiquer quel est le sens de rotation *dextrorsum* ou *sinistrorsum* autour d'un axe réel quelconque, sur lequel on donne la direction *de haut en bas*, repose précisement sur cette propriété du déplacement d'un corps solide: *de ne point changer le sens de ce corps*, c'est-à-dire de ne point changer la relation *droite* ou *gauche* qui peut exister entre le sens direct considéré sur une droite de ce corps et le sens direct considéré autour de cette même droite.

A cette propriété des déplacements, de ne point changer le sens des figures solides, se rattache ce fait que les rotations de l'espace qui ont lieu autour d'un point O laissent invariable les sphères ayants leur centre en O, et cela *en transformant homographiquement en lui-même chacun des systèmes de droites d'une pareille sphère.*

Il résulte, en effet, de la propriété dont il s'agit, qu' à chaque plan tangent réel d'une sphère on peut attacher un sens de rotation déterminé de même qu'on peut attribuer un sens direct déterminé à la normale correspondante (ce qu'on appelle souvent *attribuer un signe au rayon de la sphère*), ce qui se fait de telle manière que la relation entre ces deux sens soit constamment *droite* ou *gauche.* Mais nous savons déjà qu' attribuer un sens de rotation à un plan réel revient à attacher à ce plan l'un des points cycliques à l'infini situés dans ce plan. Dans le cas actuel, l'attribution d'un sens direct de rotation à tout plan tangent de la sphère revient à attacher à ce plan une des génératrices de la sphère contenues dans ce plan, ce qui du reste peut être fait d'une manière constante grâce à ce que les droites contenues dans chaque plan tangent appartiennent à deux systèmes bien distincts.

Tout cela montre bien que le fait que les rotations effectuées autour du point O transforment en lui-même chaque système de droites de toute sphère ayant son centre en O, tient précisement

à la propriété des déplacements de conserver le sens des figures solides.

Il convient d'ajouter ici que, d'un autre côté, les homographies qui laissent invariables les sphères considérées, mais qui changent le sens des figures solides, ont la propriété d'échanger entre eux les deux systèmes de droites des sphères dont il s'agit. On a un exemple d'une pareille homographie dans la *symétrie* ayant pour centre le point O; toutes les autres homographies de la même catégorie, homographies que j'appellerai dans ce qui suit des *anastrophies*, peuvent être obtenues en combinant cette symétrie avec les diverses rotations effectuées autour du point O.

40. Pour compléter ce qui précède je vais présenter un aperçu de quelques considérations que M. Darboux a exposé sur le même sujet, dans son cours de *géométrie supérieure* à la Sorbonne, en l'hiver de 1879-80.

Soit donnée dans l'espace une droite passant par un point O, et supposons que cette droite ait pour équations:

$$\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{c},$$

dans un système de coordonnées rectangulaires X, Y, Z dont l'origine soit en O. Considérer un sens sur cette droite revient à attribuer un signe déterminé au radical

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

qui figure dans l'expression des trois cosinus directeurs

$$\frac{a}{R},\quad \frac{b}{R},\quad \frac{c}{R}$$

de cette droite. Maintenant, le point qui a pour coordonnées X, Y, Z les valeurs de ces cosinus directeurs est précisément situé sur la droite considérée, et cela à une distance à l'origine égale à l'unité.

Ainsi donc *attacher une direction à une droite issue du point O revient à distinguer entre les deux points de cette droite situés sur une sphère de rayon unité et ayant son centre en O, ou bien à attacher à cette droite l'un des deux points dont il s'agit.*

D'autre part, si l'on considère le plan

$$aX+bY+cZ=0,$$

mené par le point O perpendiculairement à la droite précédente, on voit que donner un sens de rotation sur ce plan revient encore à attribuer un signe au radical $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. C'est ce radical qui figure dans les équations des droites qui joignent le point O aux deux points cycliques à l'infini du plan considéré. Ces équations sont en effet:

$$\frac{X}{-ac\pm ib\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{Y}{-bc\mp ia\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{Z}{a^2+b^2}.$$

De cette manière si l'on considère, à la fois, sur le plan

$$aX + bY + cZ = 0$$

la droite

$$\frac{X}{-ac + ibR} = \frac{Y}{-bc - iaR} = \frac{Z}{a^2 + b^2} \tag{1}$$

et, sur la perpendiculaire élevée en O sur ce plan, le point

$$X = \frac{a}{R}, \quad Y = \frac{b}{R}, \quad Z = \frac{c}{R}, \tag{2}$$

on fait d'une part attribuer au plan α un sens (de rotation) déterminé et d'autre part on attache à la perpendiculaire à ce plan un sens de description entièrement déterminé et lié au précédent par une relation constamment *droite* ou *gauche*, quels que soient les coefficients a, b, c. M. Darboux fait remarquer là dessus que la droite qui joint le point à l'infini de la droite (1) avec le point (2) dela perpendiculaire au plan considéré, *appartient constamment à un système de droites de la sphère* $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ *qui est le même quel que soit le plan considéré.*

41. Dans ce qui suit nous appellerons, pour abbréger, *plan orienté* un plan auquel on a attribué une *orientation*, c'est-à-dire un sens de rotation déterminé. Plus généralement on pourra appeler *plan orienté* tout plan auquel on a attaché l'un des points cycliques à l'infini qu'il contient. Chaque plan α peut ainsi donner lieu à deux plans *orientés opposés* $+\alpha$ et $-\alpha$. Il n'y a que les plans qui touchent le cercle C_∞ qui donnent lieu à deux plans orientés coïncidents*).

Nous appellerons de même *rayon* une droite à laquelle on a attaché un sens déterminé de description. Plus généralement on pourra

---

*) La considération du plan orienté comme élément générateur de l'espace conduit à une géométrie fort intéressante, qui serait comprise, sous un certain point de vue dans la géométrie des sphères de M. Lie (*Voir* le Mémoire de M. Lie *Ueber Liniencomplexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, Math. Annalen*, t. V, p. 164—188, 1872, ainsi que le travail de M. F. Klein *Vergleichende Betrachtungen über neuere geom. Forschungen*, Erlangen, 1872, § 7), cette dernière pouvant être envisagée comme la géométrie des *sphères orientées*, c'est-à-dire des sphères considérées comme lieux de l'un de leurs systèmes de droites. *Voir* à ce sujet ma Note *Sur la géométrie des sphères* (*Comptes Rendus*, 1881, t. 92, p. 1195). — Divers problèmes d'une géométrie analogue pour le plan ont été étudiées par M. Laguerre et exposées par lui, depuis quelque temps, dans plusieurs communications à la Société Mathém. de France (*Bulletin de la Soc. Math. de Fr.*, tom. VIII, p. 196—208, 1880), à l'Academie des Sciences de Paris (*Sur les hypercycles, Comptes Rendus*, 1882, tom. 94) et dernièrement dans les *Nouvelles Annales*. Le même géomètre a touché aussi à quelques points relatifs à l'espace (dans une Note *Sur la transformation par directions réciproques*, Comptes Rendus 1881, t. 92, p. 71—73). M. Laguerre appelle *semi-plan* et *semi-sphère* ce que nous avons appelé ici *plan orienté* et *sphère orientée*; de même il appelle *direction* ou bien *semi-droite* ce que nous appellons ici *rayon*.

appeler *rayon* toute droite à laquelle on a attaché un des plans tangents du cercle à l'infini qui passent par elle*). Chaque droite d de l'espace donne lieu à deux *rayons opposés* $+d$ et $-d$. Ce sont seulement les droites qui rencontrent le cercle à l'infini C_∞ qui donnent lieu à deux rayons opposés coïncidents.

L'appellerai dans ce qui suit *plan normal* d'un rayon issu de O le *plan orienté* mené par le point O perpendiculairement au rayon dont il s'agit, auquel se trouve attaché celui des points cycliques à l'infini qu'il contient qui est situé dans le plan tangent du cercle C_∞ attaché au rayon considéré. Réciproquement on pourra appeller *normale* d'un plan orienté passant en O le *rayon* dont le plan normal coïncide avec ce plan orienté.

42. *Semi-cônes, cônes orientés.* — Un cône ayant son sommet en O peut être considéré soit comme engendré par de droites issues de O, soit comme enveloppe de plans issus de O.

Ainsi, étant donné un tel cône, on peut considérer, d'une part, la correspondance $f(x', x'') = 0$ établie sur le cercle à l'infini C_∞ par les plans tangents (en x' et en x'') de ce cercle passant par les diverses génératrices du cône, et, d'autre part, la correspondance $\varphi(y', y'') = 0$ établie entre les points y' et y'' de ce cercle situés dans les divers plans tangents du cône considéré.

Dans le cas où la correspondance $f(x', x'') = 0$ n'est point symétrique par rapport aux deux points x' et x'', on voit que les deux plans tangents du cercle C_∞, qui passent par toute génératrice du cône considéré, jouissent des propriétés différentes, puisque leur rôle dans la correspondance dont il s'agit est différent. On voit bien que dans ce cas on peut attacher à chaque génératrice du cône considéré une direction déterminée, de manière à former ainsi un système algébrique de *rayons* issus de O, système qu'on pourrait désigner sous le nom de *semi-cône*, et qui serait accompagné par un autre, formé par les rayons opposés, lequel constituerait le *semi-cône opposé* du précédent. L'intersection d'un pareil cône avec une sphère ayant son centre en O serait formée par deux courbes distinctes, symétriques l'une de l'autre par rapport au point O. Comme les deux nappes d'un tel cône jouissent ainsi des propriétés différentes, il me paraît fort convenable de dire que le cône dont il s'agit se décompose dans ce cas en deux *semi-cônes* distincts**).

---

*) Cette définition suppose que la relation entre un sens direct sur un axe et un sens direct autour de cet axe doit être prise constamment *droite* ou *gauche*. Il faut bien ne pas oublier cette circonstance quand s'agira d'étudier les propriétés relatives à des *anastrophies*, lesquelles changent le sens des figures solides; autrement on serait exposé à des mécomptes.

**) Les semi-cônes, dont nous parlons ici, se distinguent bien des *semi-cônes* de M. Laguerre, lesquels ne sont autre chose que ce que nous appellons des cônes orientés.

De même, dans le cas où la seconde correspondance considérée $\varphi(y', y'') = 0$ n'est point symétrique par rapport aux deux points y', y'', on pourra attribuer à chaque plan tangent du cône considéré une *orientation* déterminée, de manière à avoir ainsi une série algébrique de *plans orientés*, qui envelopperaient un *cône orienté*, série qui devait être distinguée d'une autre formée par les plans orientés opposés et qui envelopperait un *cône orienté*, *l'opposé* du précédent. La développable circonscrite à la courbe suivant laquelle un pareil cône coupe le plan à l'infini et à une sphère quelconque, serait évidemment décomposée en deux surfaces, symétriques par rapport au centre de cette sphère*).

On voit bien que les deux notions de *semi-cône* et de *cône orienté* sont réciproques (corrélatives) l'une de l'autre. Ainsi étant donnés deux cônes, ayant O pour sommet commun et tels que chacun soit le lieu des axes des plans tangents de l'autre, si l'un d'eux est décomposable en deux *semi-cônes* distincts entre eux, le second sera aussi décomposable en deux *cônes orientés* distincts et réciproquement**).

43. Il y a des cônes dont on peut détacher deux *semi-cônes*

---

*) Étant donnée une surface développable quelconque, on peut dire de même que cette surface se décompose en deux *semi-surfaces* distinctes (ou bien en deux *surfaces orientées* distinctes), dans le cas où la correspondance entre les plans tangents de C_∞ passant par les génératrices de cette surface (ou bien la correspondance entre les points du cercle C_∞ situés dans les divers plans tangents de cette surface) n'est point symétrique.

**) On sait que le radical qui figure dans les formules qui servent à donner les deux points d'intersection d'une droite $U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 = 0$ avec une conique, ayant pour équation tangentielle $F(U) = 0$, est $\sqrt{F(U)}$. Il résulte de là que, dans le cas où les tangentes d'une courbe plane coupent la conique $F(U)$ en deux points qui jouissent des propriétés différentes (qu'elles déterminent par conséquent sur cette conique une correspondance $\varphi(y', y'') = 0$ non symétrique par rapport aux y', y''), il faut bien que le radical $\sqrt{F(U)}$, pris originairement avec un signe déterminé, continue à avoir pour toutes les tangentes de cette courbe une valeur déterminée. En d'autres termes, il faut que dans ce cas le radical $\sqrt{F(U)}$ ait, pour toutes les tangentes de la courbe proposée, une valeur égale à celle d'une fonction rationnelle $\frac{\psi(U)}{\omega(U)}$, homogène et de degré 1 en U_1, U_2, U_3. Je ferai remarquer à ce propos que si la relation $\varphi(y', y'') = 0$ est de degré m en y' et de degré n en y'', et que l'on suppose $m > n$, les deux formes entières ψ et ω devront être *au moins* de degrés égaux à m et $m - 1$ respectivement, quoique la courbe proposée soit de la classe $m + n$. — Des faits analogues ont lieu pour des courbes planes d'ordre $m + n$ dont les points déterminent entre les tangentes d'une conique C^2 qui y passent une correspondance non symétrique (m, n). J'ajouterai maintenant qu'une pareille courbe a la propriété d'avoir avec la conique C^2 un contact d'ordre impair (ou quelque chose d'équivalent) partout où elle la rencontre. Toutefois cette dernière propriété ne suffit point à caractériser une courbe ayant par rapport à C^2 la relation dont il s'agit, que dans le cas où cette courbe est unicursale.

On comprend aisément quelle application peut être faite de ces propriétés dans la question des *cônes orientés* et des *semi-cônes* (*Comparez* le n° 40).

distincts, aussi bien que deux *cônes-orientés* distincts. On peut dire d'un pareil cône qu'il peut être décomposé en quatre *semi-cônes orientés* distincts.

L'exemple le plus simple de tels cônes est celui des cônes de révolution.

Cette propriété des cônes de révolution provient précisement de ce que la conique Γ^2, suivant laquelle un pareil cône coupe le plan à l'infini, est doublement tangente au cercle à l'infini C_∞. Ainsi, tandisque d'une part les tangentes de cette conique Γ^2 coupent C_∞ suivant des points qui se correspondent *homographiquement*, d'autre part les tangentes menées à C_∞ par les divers points de la conique Γ^2 déterminent également sur C_∞ une correspondance *homographique*.

Un cône de révolution peut devenir un plan; dans ce cas les deux semi-cônes auxquels il doit donner lieu se confondent entre eux. Un cône de révolution peut aussi se réduire à une droite (ou plutôt à un couple de plans tangents du cercle C_∞); les deux cônes orientés auxquels ce cône doit donner lieu se confondent entre eux dans ce cas.

Parmi les quatre plans qui touchent à la fois deux cônes K_1^2 et K_2^2 issus du point O, deux sont communs (pris avec une orientation déterminée) aux cônes orientés $+K_1^2$ et $+K_2^2$ (ou bien $-K_1^2$ et $-K_2^2$) et les deux autres aux cônes orientés $+K_1^2$ et $-K_2^2$ (ou bien $-K_1^2$ et $+K_2^2$).

D'une manière analogue la considération des semi-cônes auxquels donnent lieu deux cônes de révolution issus du point O, permet de séparer en deux couples les quatre génératrices communes à ces cônes.

Ces propriétés et d'autres analogues, comme, par exemple, celles relatives à la séparation, en deux couples, des quatre cônes de révolution qui touchent trois plans donnés, ou qui passent par trois droites concourantes données, peuvent être considérées comme de simples conséquences de la double génération des coniques doublement tangentes à une conique C^2, soit comme enveloppes de droites soit comme lieux de points, par le moyen d'homographies considérées sur cette conique C^2 (*Comparez* le n° 9).

II.

Premières propriétés de la représentation des rotations sphériques par des points de l'espace.

44. Nous avons déjà remarqué que pour représenter par des points de l'espace les diverses homographies binaires qu'on peut établir sur le cercle à l'infini C_∞, et par conséquent les diverses rotations ayant lieu autour d'un point fixe O, il convient de supposer que la conique C^2, qui sert à cette représentation, coïncide avec le cercle C_∞ et que le point représentatif de l'homographie identique coïncide avec le point

O. Ainsi pour arriver au but proposé il faudra remplacer la surface S^2, servant à la représentation dont il s'agit, par une sphère ayant son centre en O, et substituer de même au plan π le plan à l'infini.

Le chemin que nous devons suivre à cet effet, est parfaitement indiqué par les propriétés de la représentation des homographies binaires par des points, propriétés que nous avons étudié au § I de la première Partie de ce Mémoire.

45. Soit

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - a^2 X_4^2 = 0$$

l'équation, en coordonnées rectangulaires homogènes, de la sphère qui doit servir comme surface S^2;

$$X_4 = 0$$

celle du plan à l'infini. Le point O sera ainsi à l'origine des coordonnées ($X_1 = X_2 = X_3 = 0$).

Attribuons aux divers points du cercle à l'infini C_∞ les diverses valeurs d'un paramètre x ($x_1 : x_2$). Les coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 du point de ce cercle qui correspond à une valeur donnée de x pourront être supposées égales à

$$X_1 = \frac{i}{2}(-x_1^2 + x_2^2), \quad X_2 = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad X_3 = -ix_1 x_2,$$
$$X_4 = 0.$$

Cela étant, considérons les deux systèmes de droites de la sphère S^2. La droite du premier système (génératrice) qui passe par le point x du cercle C_∞ aura pour équations:

$$x_1 X_1 - ix_1 X_2 + x_2 X_3 - a x_2 X_4 = 0,$$
$$x_2 X_1 + ix_2 X_2 - x_1 X_3 - a x_1 X_4 = 0.$$

De même, la droite du second système (directrice) qui passe par le point y de C_∞, aura pour équations:

$$y_1 X_1 - iy_1 X_2 + y_2 X_3 + a y_2 X_4 = 0,$$
$$y_2 X_1 + iy_2 X_2 - y_1 X_3 + a y_1 X_4 = 0.$$

De cette manière le plan tangent de la sphère S^2 qui contient la génératrice x et la directrice y, aura pour équation

$$(1) \quad (-x_1 y_1 + x_2 y_2) X_1 + i(x_1 y_1 + x_2 y_2) X_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) X_3 - a(x_1 y_2 - x_2 y_1) X_4 = 0.$$

Considérons maintenant sur le cercle C_∞ l'homographie

$$(2) \quad A_{xy} = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 = 0,$$

et cherchons le point A (X_1, X_2, X_3, X_4) qui doit la représenter. Nous savons que si l'on envisage deux points x, y, qui se correspondent dans cette homographie, et que l'on prenne la génératrice de S^2

passant en x et la directrice de S^2 passant en y, ces deux droites déterminent un plan qui passe constamment par le point A, et cela quel que soit le couple de points correspondants x, y, (nº 5). On trouve d'après cela, que le point qui doit représenter l'homographie considérée doit avoir pour coordonnées:

$$(3)\qquad \begin{aligned} X_1 &= \frac{i}{2}(a_{11}-a_{22}), & X_2 &= -\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}),\\ X_3 &= \frac{i}{2}(a_{12}+a_{21}), & X_4 &= \frac{i}{2a}(a_{12}-a_{21}). \end{aligned}$$

Ces valeurs des X_i sont, en effet, telles qu' en les introduisant dans l'équation (1) on obtient précisement l'équation (2) de l'homographie A_{xy}.

Réciproquement, étant donné un point X_1, X_2, X_3, X_4, l'homographie A_{xy} qu'il représente sera telle que

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{11}=-iX_1-X_2, & a_{12}=-i(X_3+aX_4),\\ & a_{21}=-i(X_3-aX_4), \quad a_{22}=iX_1-X_2. \end{cases}$$

Les deux invariants

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{et} \quad I = a_{12} - a_{21}$$

de la forme A_{xy} auront ainsi pour valeurs

$$(5)\qquad \Delta = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - a^2X_4^2 \quad \text{et} \quad I = -2aiX_4$$

46. La distance R au point O du point A qui représente une homographie A_{xy} sera, d'après ce qui précède,

$$R = \frac{1}{X_4}\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} = \frac{a}{I}\sqrt{I^2 - 4\Delta}.$$

Or nous savons (nº 11) que le rapport anharmonique de l'homographie considérée est égal à

$$r = \frac{I+\sqrt{I^2-4\Delta}}{I-\sqrt{I^2-4\Delta}} \quad \text{ou bien à} \quad \frac{1}{r},$$

suivant le rôle que l'on attribue aux deux points fondamentaux de cette homographie. La distance dont il s'agit sera donc

$$(6)\qquad R = +a\,\frac{r-1}{r+1} \quad \text{ou bien} \quad R = -a\,\frac{r-1}{r+1}$$

suivant le cas.

Pour éclairer ce fait, remarquons que les points fondamentaux de l'homographie considérée sont situés dans le plan α mené par le point O perpendiculairement à la droite $\overline{OA}$ (nº 6). Maintenant la détermination du rapport anharmonique de cette homographie exige que l'on distingue entre eux les deux points en question, que l'on attache par conséquent à ce plan une *orientation*, c'est-à-dire un sens de rotation déterminé. Dès lors la valeur de la longueur R, correspondant à cette

détermination du rapport anharmonique de A_{xy}, devra être mesurée sur l'axe du plan α suivant une direction positive qui soit liée à l'orientation du plan α par une relation constamment droite on gauche. Cela étant, de quelque manière que l'on détermine le rapport anharmonique de A_{xy} on obtient un même point A.

Il en sera autrement si l'on change la relation constante qui doit lier à l'orientation du plan α la direction positive de l'axe de ce plan. Un pareil changement n'est pourtant permis que si l'on change en même temps le signe du rayon a de la sphère S^2, c'est-à-dire si l'on intervertit le rôle des deux systèmes de droites de S^2. Dans ce cas on passe effectivement d'un système de représentation des homographies à un autre.

47. Envisageons maintenant la rotation autour du point O qui accompagne l'homographie A_{xy}. Le point A qui la représente sera situé sur l'axe de cette rotation, tandisque le plan mené par le point O perpendiculairement à $\overline{OA}$ sera le plan équatorial de cette rotation.

La distance R du point A au point O peut être exprimée d'une manière fort simple en fonction de l'angle de la rotation qu'il représente. Pour cela on n'a qu'à remplacer, dans la formule (6) qui donne cette distance, r par sa valeur

$$r = e^{-i\vartheta},$$

exprimée en fonction de l'angle dont il s'agit (n⁰ 37). On aura de cette manière pour la distance R:

$$R = a\,\frac{e^{-\frac{1}{2}\vartheta i} - e^{\frac{1}{2}\vartheta i}}{e^{-\frac{1}{2}\vartheta i} + e^{\frac{1}{2}\vartheta i}} = -ai \operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}\cdot$$

Cette distance doit être mesurée sur l'axe de la rotation considérée dans une direction positive déterminée, liée par une relation constante au sens de rotation positif qui a servi à la mesure de l'angle ϑ.

48. Nous n'avons fait jusqu' à présent aucune supposition sur la valeur du rayon a de la sphère S^2. Toutefois, comme il convient que les points qui représentent des rotations réelles soient réels, il est fort avantageux de prendre $a = i$.

Dans ce cas, qui sera le seul que nous aurons à considérer par la suite, les formules du n⁰ 45 deviennent:

$$(7)\qquad \begin{cases} X_1 = \frac{i}{2}(a_{11} - a_{22}), & X_2 = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \\ X_3 = \frac{i}{2}(a_{12} + a_{21}), & X_4 = \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}), \\ a_{11} = -iX_1 - X_2, & a_{12} = -iX_3 + X_4, \\ a_{21} = -iX_3 - X_4, & a_{22} = iX_1 - X_2, \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2, \\ I = 2X_4. \end{cases}$$

Le point A qui représente de cette manière une rotation, effectuée suivant un angle ϑ autour d'un axe passant en O, est situé sur l'axe de cette rotation à une distance du point O égale à

$$R = \operatorname{tang} \frac{\Theta}{2},$$

distance mesurée sur cet axe dans une direction liée par une relation constante (droite au gauche) au sens de rotation suivant lequel on a mesuré l'angle ϑ.

Si l'on considère les diverses rotations effectuées autour d'un même axe, issu de O, on voit que la rotation pour laguelle $\vartheta = 0$ sera représentée par le point O. L'angle ϑ croissant de 0 à π le point A s'éloigne de O dans le sens positif et tombe à l'infini pour $\vartheta = \pi$, c'est-à-dire lorsque la rotation dont il s'agit devient un *renversement* (une *symétrie*) autour de l'axe considéré. Lorsque ϑ varie de π à 2π, A revient du côté de l'infini négatif vers le point O. Pour $\vartheta = 2\pi$, le résultat de la rotation redevient nul, et le point A coïncide avec O.

Deux rotations *inverses* l'une de l'autre, c'est-à-dire effectuées autour du même axe suivant des angles égaux et de signes contraires, sont représentées par deux points symétriques par rappot à O.

49. Il est à remarquer que si l'on désigne par ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 les angles que fait la droite $\overline{OA}$ avec les trois axes OX_1, OX_2, OX_3, les coordonnées cartésiennes du point A seront

$$(9) \qquad \frac{X_1}{X_4} = \cos\vartheta_1 \cot\frac{\vartheta}{2}, \quad \frac{X_2}{X_4} = \cos\vartheta_2 \cot\frac{\vartheta}{2}, \quad \frac{X_3}{X_4} = \cos\vartheta_3 \cot\frac{\vartheta}{2}.$$

On voit par là que ces trois quantités $\frac{X_1}{X_4}$, $\frac{X_2}{X_4}$, $\frac{X_3}{X_4}$ ne sont autre chose que les paramètres λ, μ, ν qu' on emploie, depuis Euler (*Novi commentarii Petropolitani*, tom. 20, p. 217), pour définir une rotation de l'espace autour d'un point fixe.

Notons encore ici que M. Cayley, à l'occasion des recherches de M. Klein sur l'icosaèdre, avait fait remarquer*) que l'on pourrait attacher à chaque rotation de l'espace, effectuée autour d'un point fixe et déterminée par les trois paramètres λ, μ, ν (ou bien par X_1, X_2, X_3, X_4), une homographie binaire $\Sigma a_{ij}\, x_i y_j = 0$ et cela au moyen des relations (7). M. Cayley appuie simplement sa remarque sur la manière dont on peut déduire les formules de la composition des rotations de celles de la composition des homographies correspondantes

*) Cayley: *On the correspondence between homographies and rotations*, (*Math. Annalen*, tom. XV, p. 238—240, 1879).

(voir n⁰ 61), sans faire aucunement allusion à ce fait que l'homographie ainsi attachée à une rotation est précisement celle déterminée par cette rotation sur le cercle à l'infini.

III.

Rotations représentées par les points d'une droite ou d'un plan. Rotations conjuguées.

50. Les points A de l'espace qui représentent des homographies binaires dans lesquelles à deux points x', x'' correspondent respectivement deux points y', y'', ont pour lieu, comme nous savons (n⁰ 9), une droite d bien déterminée; cette droite constitue l'intersection du plan tangent de S^2 qui contient la génératrice x' et la directrice y' avec le plan tangent qui contient la génératrice x'' et la directrice y''. Nous savons de plus, que la droite dont les points représentent des homographies dans lesquelles aux points x', x'' correspondent respectivement les points y'', y', coïncide avec la droite polaire réciproque e par rapport à S^2 de la droite d précédente.

En ayant maintenant égard à ce qui a été dit au n⁰ 38 on déduit de la propriété précédente que

Étant donnés deux plans orientés σ et τ issus du point O, lieu des points qui représentent des rotations qui amènent σ à la place de τ est une droite d.

Si l'on considère plutôt les *normales* s et t des plans orientés σ et τ (n⁰ 41) on voit qu' *étant donnés deux rayons s et t issus du point O, lieu des points qui représentent des rotations qui amènent s à la place de t est une droite d.*

Nous savons déjà que cette droite d a la propriété de s'appuyer sur les génératrices de S^2 qui rencontrent s et sur les directrices qui rencontre t &c. Pourtant il importe d'avoir une construction de cette droite au moyen de propriétés métriques.

On voit tout d'abord que la droite d dont il s'agit contient le point qui représente la rotation qui fait tourner sur lui-même le plan $\underline{st}$ suivant un angle $\vartheta = \widehat{st}$. Cette droite rencontre par conséquent la perpendiculaire élevée au point O sur le plan $\underline{pq}$ à une distance du point O égale à $\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}$, distance mesurée sur cette droite dans un sens convenable (d'après le n⁰ 48). Cette droite doit de plus être parallèle à la bissectrice propre de l'angle $\widehat{st}$. Le point à l'infini de cette droite doit, en effet, représenter le *renversement* (*symétrie*) ayant lieu autour de cette bissectrice, renversement qui fait échanger mutuellement les deux rayons s et t. On peut remarquer également que la distance d'un point quelconque A de cette droite au point O

est égale à la tangente de la moitié de l'angle compris entre les deux plans $\underline{As}$ et $\underline{At}$. Cela résulte de ce que dans la rotation représentée par le point A au plan $\underline{As}$ correspond le plan $\underline{At}$.

Quant à la droite e, dont les points représentent des rotations qui amènent en coïncidence le rayon s avec le rayon $-t$ (l'opposé de t), elle est la polaire réciproqne de la droite d par rapport à la sphère S^2. Cette droite rencontre par conséquent la perpendiculaire élevée au point O sur le plan st à une distance du point O égale à $-\cot\frac{\vartheta}{2}$ (ϑ étant $=\widehat{st}$). Cette droite est de plus parallèle à la bissectrice impropre de l'angle $\widehat{st}$, c'est-à-dire à la bissectrice propre de l'angle compris entre le rayon s et le rayon $-t$.

On pourrait aussi considérer le lieu des points qui représentent des rotations amenant le rayon t à la place de s. Ce lieu serait évidemment une droite d' symétrique de la droite d par rapport au point O.

Il est à remarquer qu'en partant de la droite d (ou de la droite d'), on peut construire les deux rayons s et t d'une manière unique, et cela en suivant une marche inverse à celle qui conduit à la construction de la droite d (ou d') étant donnés s et t.

Cela tient à ce que réciproquement:

Les rotations représentées par les points d'une droite arbitraire de l'espace ont la propriété d'amener un certain rayon s issu de O à coïncider avec un autre rayon t issu de même de O.

51. La figure formée par les deux rayons s, t et les deux droites d, d', déterminées, d'après ce qui précédé, par ces deux rayons pris dans l'ordre s, t ou bien dans l'ordre t, s, joue un rôle important dans la théorie qui nous occupe. Ainsi nous aurons souvent à envisager cette figure dans ce qui suit.

Voici un exemple de son utilité.

Étant données deux rotations A et B on peut se demander quels sont les rayons s, t issus de O qui soient tels que le rayon t corresponde à s dans la rotation A, tandisque dans la rotation B au rayon t corresponde le rayon s.

Pour cela il faut évidemment chercher les couples de droites d, d' passant respectivement par les points A et B et qui soient symétriques par rapport à O. On voit aisément que les droites ayant cette propriété doivent être parallèles à la diagonale passant en O du parallélogramme construit sur les côtés $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$. Les deux rayons s et t attachés, d'après ce qui précède, aux deux droites d, d' ainsi déterminées seront les seuls jouissant de la propriété réquise.

52. *Rotations conjuguées.* — A la notion de deux *homographies binaires conjuguées*, représentées par deux points conjugués par rapport

à la surface S^2 correspond la notion importante de deux *rotations sphériques conjuguées.*

Les rotations représentées par les points d'un plan α ont la propriété d'être toutes conjuguées par rapport à une même rotation, celle représentée par le pôle A du plan α pris par rapport à S^2.

Lorsque deux points A et B sont conjugués par rapport à la sphère S^2, le plan polaire α de A passe en B et le plan polaire β de B passe en A. En d'autres termes, la polaire de toute droite d passant en A et contenue dans le plan β est une droite e passant en B et contenue dans le plan α. Or nous savons que deux pareilles droites d et e, polaires réciproques par rapport à S^2, sont telles que si les rotations représentées par les points de la première font correspondre à un rayon s issu de O un rayon t issu également de O, les rotations représentées par les points de la seconde feront correspondre au rayon s le rayon $-t$.

On voit par là *qu'étant données deux rotations conjuguées A et B il y a une infinité de rayons s issus du point O dont chacun a la propriété que les rayons qui lui correspondent dans les deux rotations A et B soient opposés entre eux.*

Par contre étant donnés deux points arbitraires A et B, qui ne soient pas conjugués par rapport à S^2, il n'y aura aucune droite d passant en A dont la polaire passe en B. D'où il suit que

Étant données deux rotations arbitraires A et B, qui ne soient pas conjuguées entre elles, il n'existe aucun rayon issu de O auquel correspondent dans ces deux rotations des rayons opposés entre eux.

53. D'après la définition projective des rayons s et t attachés à une droite d de l'espace, la droite s doit s'appuyer sur les deux génératrices de S^2 qui rencontrent d, tandisque la droite t doit s'appuyer sur les deux directrices de S^2 qui rencontrent d. On voit par là que dans le cas où l'on a un faisceau de droites passant par un point A et situées dans un plan β, les rayons s et t attachés à ces droites doivent se trouver respectivement dans deux plans σ et τ passant en O. Cela provient de ce que la correspondance déterminée entre les génératrices (ou les directrices) de S^2 qui rencontrent les rayons s (ou t) considérés, doit être la même avec l'involution déterminée d'une manière analogue par les droites d.

Si l'on envisage maintenant de nouveau le point B qui est le pôle du plan β, point par lequel passent les polaires e des droites d considérées, il est visible que dans la rotation B au plan σ (qui contient les rayons s) correspondra le plan τ (qui contient les rayons t) de même que cela arrive dans la rotation A.

Les deux plans σ et τ doivent donc être respectivement perpendiculaires aux deux rayons s et t attachés à la droite $\overline{AB}$, rayons

qui se correspondent dans toutes les rotations représentées par des points de cette droite.

Ainsi *étant données deux rotations* A *et* B *conjuguées entre elles et dans lesquelles à un rayon* s *issu de* O *correspond un même rayon* t *issu de* O, *à tout rayon issu de* O *et perpendiculaire à* s *correspondront dans les deux rotations* A *et* B *deux rayons perpendiculaires à* t *et opposés entre eux.*

De cette proposition il résulte que la rotation B (ou A) peut être obtenue en combinant la rotation A (ou B) par le renversement ayant pour axe t (ou s), ou bien en combinant le renversement ayant s (ou t) pour axe avec la rotation A (ou B). C'est là une propriété importante de deux rotations conjuguées à laquelle nous arriverons encore par la suite d'une autre manière (n° 65).

IV.

Sur les rotations qui superposent un cube à lui-même.

54. Comme application de ce qui précède je vais envisager la représentation, par des points, des rotations qui superposent à lui-même un cube, ou plus généralement les rotations qui font coïncider trois droites rectangulaires a_1, a_2, a_3 issues du point O avec trois autres droites rectangulaires b_1, b_2, b_3 issues du même point. Ces dernières rotations ont, comme on voit, la propriété d'amener un cube ayant pour axes les droites a_1, a_2, a_3 à coïncider avec un autre cube ayant pour axes les droites b_1, b_2, b_3.

55. Et d'abord considérons les rotations qui amènent les droites a_1, a_2, a_3 à coïncider *respectivement* avec les droites b_1, b_2, b_3. Supposons que dans une de ces rotations à trois rayons p_1, p_2, p_3 dirigés suivant les droites a_1, a_2, a_3, correspondent respectivement les rayons q_1, q_2, q_3 dirigés suivant les droites b_1, b_2, b_3. Il y aura encore trois autres rotations faisant coïncider les droites a_1, a_2, a_3 avec les droites b_1, b_2, b_3 respectivement. Ce sont les rotations qui amènent les trois rayons

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3$$

respectivement à la place de

$$\begin{array}{rrr} q_1, & -q_2, & -q_3, \\ -q_1, & q_2, & -q_3, \\ -q_1, & -q_2, & q_3. \end{array}$$

On voit par là que chacune de ces quatre rotations doit être conjuguée aux trois autres (nos 52, 53). Les quatre points qui représentent ces rotations constituent par conséquent les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère S^2.

Les points de deux arêtes opposées de ce tetraèdre représentent des rotations qui amènent une des droites a_i à la place de la droite b_i correspondante (n⁰ 50).

56. Passons aux rotations qui font superposer un cube à lui-même. Ces rotations peuvent être classées d'après les substitutions qu'elles opèrent entre les axes a_1, a_2, a_3 de ce cube. Nous avons ainsi 1⁰ les rotations qui mènent les axes a_1, a_2, a_3 à la place de

$$a_1,\ a_2,\ a_3;\quad a_2,\ a_3,\ a_1;\quad a_3,\ a_1,\ a_2$$

respectivement; 2⁰ les rotations qui mènent a_1, a_2, a_3 respectivement à la place de

$$a_1,\ a_3,\ a_2;\quad a_3,\ a_2,\ a_1;\quad a_2,\ a_1,\ a_3.$$

A chacune de ces six substitutions correspondent quatre rotations représentées par les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère S^2.

Et d'abord les rotations qui font correspondre chaque axe à lui-même conduisent à un tétraèdre T_0 dont un sommet coïncide avec le point O, tandisque ses trois autres sommets sont situés à l'infini sur les axes a_1, a_2, a_3.

Quant aux rotations qui font correspondre aux axes a_1, a_2, a_3 les axes a_2, a_3, a_1, ou bien les axes a_3, a_1, a_2, respectivement, elles sont représentées par les sommets de deux tétraèdres réguliers T_1, T_2 ayant leur centre en O. Ces huits points constituent aussi les sommets d'un cube (T_1, T_2) ayant pour axes les droites a_1, a_2, a_3 et circonscrit à une sphère de rayon unité. Les douze arêtes des tétraèdres T_1, T_2 coïncident avec les diagonales des six faces carrées du cube.

Les trois tétraèdres T_0, T_1, T_2 forment un *système desmique,* c'est-à-dire qu'ils constituent trois surfaces du quatrième ordre appartenant à un même faisceau*). De même que les faces de ces tétraèdres se coupent par trois suivant seize droites e formant l'intersection commune des surfaces du faisceau dont nous venons de parler, de même les sommets de ces tétraèdres sont situés par trois sur seize droites d, qui sont naturellement les polaires réciproques des droites e précédentes par rapport à S^2. Parmi ces seize droites d quatre passent par le point O; les douze autres coïncident avec les douze arêtes du cube (T_1, T_2). On remarquera que les points de chacune de ces seize

*) Les propriétés d'un pareil système de trois tétraèdres ont été étudiées simultanement par l'auteur (*Bulletin des Sciences Mathém.* 2ᵉ série, t. III, 1879) et par M. Veronese (*Reale Accad. dei Lincei; Transunti* 1880, *Memorie* 1881). Depuis s'en sont particulièrement occupés M. Reye (*Acta Math.*, tom. I, 1883) et M. Vietor (*Berichte über die Verh. der naturf. Ges. zu Freiburg i. Br.* VIII, 2, 1882).

PS. On trouvera dans une récente Note de M. H. Schroeter, insérée dans la *Zeitschrift für Math. und Physik* (vol. XXVIII, p. 178—182; 1883) l'indication de diverses questions dans lesquelles on retrouve la figure en question.

droites représentent des rotations dans lesquelles à un sommet de chacun des tétraèdres T_1, T_2 correspond un sommet du même tétraèdre.

Il est aisé de voir que les douze rotations représentées par les sommets des trois tétraèdres T_0, T_1, T_2 superposent à lui-même chacun de ces tétraèdres. Du reste il n'y a que douze rotations qui superposent à lui-même un tétraèdre régulier.

Considérons maintenant les rotations qui superposent à lui-même le cube considéré, ou bien le cube (T_1, T_2), en échangeant entre eux les deux tétraèdres T_1, T_2. Ces rotations sont celles qui font correspondre aux trois axes a_1, a_2, a_3 respectivement les axes

$$a_1,\ a_3,\ a_2;\quad a_3,\ a_2,\ a_1;\quad a_2,\ a_1,\ a_3.$$

Ces rotations sont représentées par les sommets de trois nouveaux tétraèdres dont chacun est formé par les centres de deux faces opposées du cube (T_1, T_2) ainsi que par les points à l'infini des diagonales de ces mêmes faces. De cette manière les sommets de ces tétraèdres qui sont à distance finie forment les sommets d'un octaèdre régulier inscrit dans le cube (T_1, T_2), tandisque leurs six sommets situés sur le plan à l'infini forment les intersections avec ce plan des six couples d'arêtes opposées de cet octaèdre.

Les tétraèdres qu'on obtient de cette manière constituent également un système desmique qui est le conjugué du système desmique formé par les tétraèdres T_0, T_1, T_2.

Les droites suivant lesquelles se coupent par trois les faces de ces nouveaux tétraèdres coïncident avec les seize droites d déjà considérées, tandisque les seize droites dont chacune contient un sommet de chacun de ces tétraèdres coïncident avec les droites e. Les points de ces droites e représentent des rotations dans lesquelles à un sommet du tétraèdre T_1 correspondent les divers sommets du tétraèdre T_2.

Plus généralement on pourrait considérer les points qui représentent les rotations qui amènent un cube ayant son centre en O à coïncider avec un autre cube égal ayant aussi son centre en O. Ces points, au nombre de 24, forment les sommets de six tétraèdres conjugués par rapport à S^2, tétraèdres qui constituent deux *systèmes desmiques* conjugués entre eux.

Il y a, comme on sait, 576 homographies et 576 corrélations de l'espace qui transforment un système desmique de trois tétraèdres en lui-même, et autant de transformations linéaires qui échangent un système desmique avec son conjugué*). L'étude de ces transformations linéaires peut être faite avec une grande facilité au moyen de considérations de la théorie qui nous occupe.

*) Dans son travail cité plus haut, M. Reye a examiné certaines catégories intéressantes de transformations comprises dans ce groupe.

Il en est de même de l'étude des 3600 homographies et des 3600 corrélations qui transforment en lui-même le système des 60 points qui représentent les rotations qui superposent à lui-même un dodécaèdre régulier*).

V.

Rotations représentées par des points de surfaces U^2 coupant S^2 suivant quatre droites.

57. Les points de l'espace qui représentent des rotations sphériques assujetties à *une* certaine condition doivent naturellement avoir pour lieu une surface. De même les rotations assujetties à *deux* conditions seront représentées par les points d'une courbe de l'espace.

Ainsi donc on pourra faire la classification des divers systèmes doublement ou simplement infinis de rotations, ayant lieu autour d'un point fixe O, d'après les propriétés des surfaces ou des courbes qui représentent ces systèmes.

Les plus simples systèmes de rotations sont évidemment ceux représentés par un plan ou par une droite (§ III).

Après les systèmes doublement infinis de rotations représentés par des plans, les plus intéressants sont ceux représentés par des surfaces du second ordre U^2 coupant la sphère S^2 suivant quatre droites.

C'est de ces systèmes que nous allons maintenant nous occuper. Quant à l'étude de plusieurs questions relatives à des systèmes de rotations quelconques, nous nous réservons d'y revenir dans un autre Mémoire relatif au mouvement d'un corps solide autour d'un point de l'espace.

58. Soit une surface U^2 coupant S^2 suivant deux génératrices g', g'' et deux directrices h', h''.

Considérons les deux rayons s_1 et t_1 issus de O et attachés (d'après le n° 50) à une droite d_1 de U^2 appuyée sur g', g'', ainsi que les deux rayons s_2 et t_2 attachés à une droite d_2 de U^2 appuyée sur h', h''.

D'après ce que nous savons le rayon s_1 doit s'appuyer sur les deux droites g', g'' et de même le rayon t_2 doit s'appuyer sur les droites h', h''. Ces deux rayons s_1 et t_2 doivent ainsi être fixes de quelque manière

*) Les soixante points qui représentent les rotations qui superposent à lui-même un dodécaèdre régulier constituent un ensemble fort remarquable. Ces points sont situés par groupes de cinq sur 72 droites et par groupes de quinze sur 60 plans, dont chacun contient six des droites précédentes. Par chacun des 60 points passent cinq de ces droites et quinze de ces plans. Les soixante points sont de plus situés par groupes de trois sur 200 nouvelles droites, par chacune desquelles passent aussi trois des soixante plans précédents. Il serait trop long d'aborder ici l'étude de cette configuration. Il est pourtant à noter que cette configuration est sa propre polaire réciproque par rapport à la surface S^2.

que l'on choisisse d_1 et d_2; il reste donc à chercher le lieu des rayons t_1 et s_2. Pour cela remarquons d'abord que puisque la rotation représentée par le point commun aux droites d_1 et d_2 fait correspondre aux rayons s_1 et s_2 les rayons t_1 et t_2 respectivement il faut bien que l'angle des deux rayons s_1, s_2 soit égal à celui des deux rayons t_1, t_2. On voit par là que lorsque la droite d_2 varie, le rayon t_1 tourne autour de t_2 en formant avec ce second rayon un angle constant égal à $\vartheta = \widehat{s_1 s_2}$, et que lorsque la droite d_1 varie le rayon s_2 tourne autour de s_1 en formant avec ce rayon un angle constant $\vartheta = \widehat{t_1 t_2}$.

On voit ainsi que les deux rayons s_2 et t_1 engendrent deux semi-cônes de révolution P_0 et Q_0, ayant respectivement pour axes les rayons s_1 et t_2 et ayant de plus la même ouverture.

Ainsi donc, *les rotations représentées par les points d'une surface U^2, coupant S^2 suivant quatre droites, ont la propriété d'amener un rayon s_1 issu de O à coïncider avec les diverses génératrices d'un semi-cône de révolution Q_0 issu de O, et de faire aussi qu'un semi-cône de révolution P_0 issu de O passe constamment par un rayon fixe t_2 issu de O. Les semi-cônes P_0 et Q_0 sont égaux et admettent respectivement pour axes les rayons s_1 et t_2.*

On voit bien que ces mêmes rotations font que le plan orienté *normal* au rayon s_1 vient à toucher constamment le cône orienté formé par les plans normaux des rayons du semi-cône Q_0 &c.

Il est aussi aisé de voir que tout semi-cône orienté (de révolution), ayant pour axe le rayon s_1, vient à toucher dans ces rotations un semi-cône orienté (de révolution) déterminé, ayant pour axe le rayon t_2.

59. Réciproquement les rotations dans lesquelles un rayon s_1 issu de O vient à coïncider avec les diverses génératrices d'un semi-cône de révolution Q_0 issu de O (et dans lesquelles un semi-cône de révolution P_0 issu de O et ayant s_1 pour axe vient à passer par un rayon t_2 dirigé suivant l'axe de Q_0) sont représentées par les points d'une surface U^2 passant par les génératrices de S^2 appuyées sur s_1 et par les directrices de S^2 appuyées sur t_2.

Lorsqu'on laisse fixes les axes des deux semi-cônes égaux P_0 et Q_0 et que l'on fait varier l'ouverture de ces cônes, on obtient un faisceau de surfaces U^2 passant par quatre droites fixes de S^2. Lorsque les cônes P_0 et Q_0 coïncident avec le cône K^2, qui projette du point O le cercle à l'infini, la surface U^2 correspondante coïncide avec la sphère S^2. D'autre part, lorsque les semi-cônes P_0 et Q_0 viennent à se confondre avec leurs plans équatoriaux, on obtient une surface U^2 qui est sa propre polaire réciproque par rapport à S^2.

Les deux surfaces correspondant à un même rayon s_1 et à deux

semi-cônes Q_0 opposés sont evidemment polaires réciproques par rapport à S^2. Il n'y a que les deux cas précédents dans lesquels ces deux surfaces viennent à coïncider.

Parmi les autres cas signalons celui où les cônes P_0 et Q_0 viennent à se confondre avec leurs axes (c'est-à-dire sont constitués par deux plans tangents de S^2 passant par leurs axes). On a alors deux surfaces U^2 formées par deux plans tangents de S^2 passant respectivement par deux droites d et e polaires réciproques par rapport à S^2. Les points de ces deux droites représentent des rotations dans lesquelles à l'axe de P_0 correspond l'axe de Q_0.

Parmi les surfaces U^2 qui correspondent à des semi-cônes P_0, Q_0 ayant leurs axes fixes, une seule passe par un point arbitraire de de l'espace, de même qu'une seule touche un plan arbitraire de l'espace. Celle de ces surfaces qui passe par le point O, et qui contient par conséquent les axes des deux semi-cônes P_0 et Q_0, correspond au cas où les rayons s_1 et t_2 constituent respectivement les génératrices des deux cônes Q_0 et P_0. De même celle de ces surfaces qui touche le plan à l'infini, et qui est la polaire réciproque de la surface précédente par rapport à S^2, correspond au cas où les semi-cônes Q_0 et P_0 admettent respectivement pour génératrices les rayons $-s_1$ et $-t_2$.

60. Considérons maintenant le lieu des points qui représentent des rotations dans lesquelles à un cône de révolution P_1 issu de O correspond un cône Q_1 touchant un cône de révolution fixe Q_2 issu de O.

Il est aisé de voir que ce lieu est composé par quatre surfaces U^2 distinctes. Les points de chacune de ces quatre surfaces représenteront des rotations qui amènent un *semi-cône orienté* déterminé, détaché du cône P_1, à toucher un des quatre *semi-cônes orientés* auxquels donne lieu le cône Q_2.

Considérons, par exemple, les rotations qui amènent le cône P_1 à toucher le cône Q_2, de manière que le contact ait lieu le long d'une génératrice déterminée a_1 de P_1 qui vienne à coïncider avec une directrice déterminée b_1 de Q_2. Comme ces rotations doivent amener trois droites rectangulaires a_1, a_2, a_3 issues de O (a_2 étant située dans le plan qui touche P_1 le long de a_1, et a_3 étant la normale à ce plan) à coïncider respectivement avec trois droites rectangulaires b_1, b_2, b_3 issues de O, elles doivent être au nombre de quatre, tandisque les points qui les représentent doivent former les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à S^2 (d'après le n° 55). Ce sont ces quatre points qui engendrent quatre surfaces U^2 différentes lorsqu'on fait varier a_1 et b_1.

VI.

Formules relatives à la composition des rotations sphériques et à la multiplication des points qui les représentent.

61. Lorsqu'on a deux rotations A et B autour du point O et que l'on considère la rotation $C = AB$, qui résulte de leur combinaison, il est évident que l'homographie établie par la rotation C sur le cercle à l'infini C_∞ est la résultante des homographies établies sur le même cercle par les deux rotations A et B.

Soient

$$A_{xy} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = 0$$

et

$$B_{xy} = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2 = 0$$

les deux homographies du cercle à l'infini qui accompagnent les rotations A et B; nous aurons pour l'homographie qui accompagne la rotation C

$$C_{xy} = c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2 = 0,$$

où (d'après le n° 13)

$$\begin{aligned} c_{11} &= -a_{11}b_{21} + a_{12}b_{11}, \\ c_{12} &= -a_{11}b_{22} + a_{12}b_{12}, \\ c_{21} &= -a_{21}b_{21} + a_{22}b_{11}, \\ c_{22} &= -a_{21}b_{22} + a_{22}b_{12}. \end{aligned}$$

Maintenant comme les points X et Y qui représentent les deux rotations A et B sont tels que (n° 48):

$$a_{11} = -iX_1 - X_2,\quad a_{12} = -iX_3 + X_4,\quad a_{21} = -iX_3 - X_4,\quad a_{22} = iX_1 - X_2,$$
$$b_{11} = -iY_1 - Y_2,\quad b_{12} = -iY_3 + Y_4,\quad b_{21} = -iY_3 - Y_4,\quad b_{22} = iY_1 - Y_2,$$

on aura pour le point Z, qui représente la rotation C:

$$Z_1 = \frac{i}{2}(c_{11} - c_{22}),\qquad Z_2 = -\frac{1}{2}(c_{11} + c_{22}),$$
$$Z_3 = \frac{i}{2}(c_{12} + c_{21}),\qquad Z_4 = \frac{1}{2}(c_{12} - c_{21}),$$

c'est-à-dire:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} Z_1 &= X_1Y_4 + X_2Y_3 - X_3Y_2 + X_4Y_1, \\ Z_2 &= -X_1Y_3 + X_2Y_4 + X_3Y_1 + X_4Y_2, \\ Z_3 &= X_1Y_2 - X_2Y_1 + X_3Y_4 + X_4Y_3, \\ Z_4 &= -X_1Y_1 - X_2Y_2 - X_3Y_3 + X_4Y_4 \end{aligned}\right.$$ *).

*) Ces formules, pour la composition de deux rotations sphériques déterminées par leurs paramètres eulériens

$$\lambda, \mu, \nu = \frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4} \quad \text{et} \quad \frac{Y_1}{Y_4}, \frac{Y_2}{Y_4}, \frac{Y_3}{Y_4},$$

sont dues à Olinde Rodrigues (*Journal de Liouville*, 1ère serie, tom. V) et à M. Cayley (*Cambridge Mathem. Journal*, t. III, 1843).

Il est bien à remarquer que dans la théorie des quaternions de Hamilton le produit de deux quaternions

$$X_1 I_1 + X_2 I_2 + X_3 I_3 + X_4$$

et

$$Y_1 I_1 + Y_2 I_2 + Y_3 I_3 + Y_4$$

est égal à un quaternion

$$Z_1 I_1 + Z_2 I_2 + Z_3 I_3 + Z_4,$$

où les Z_i ont précisement les valeurs fournies par les relations précédentes. On se fait ainsi une première idée de la relation qui existe entre le calcul des quaternions et la composition des homographies binaires*).

62. Le fait que la somme des quatre carrés

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2$$

est égale au produit des deux sommes analogues

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \quad \text{et} \quad Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2$$

se présente ici comme conséquence de ce que le déterminant $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ de la forme bilinéaire $C_{xy} = [AB]_{xy}$ est égal au produit des déterminants des deux formes A_{xy} et B_{xy}.

La signification géométrique du fait dont il s'agit, consiste, d'après une remarque que je dois à M. Darboux, en ce que la surface S^2 est transformée en elle-même par la correspondance homographique qui existe entre deux points X et Z, ou Y et Z, liés entre eux par les relations (1). Les propriétés de ces correspondances (homologies gauches), dont les unes laissent immobiles toutes les génératrices de S^2, tandisque les autres laissent immobiles toutes les directrices de S^2, ont été étudiées au n⁰ 22.

Quant à la transformation homographique la plus générale qui transforme en elle-même la surface S^2 en laissant invariable chacun de ses systèmes de droites, elle consiste (*Voir* n⁰ 22, Note) dans la correspondance entre un point variable X et le point Y qui est le produit des points A', X, A'', pour A' et A'' fixes.

63. Dans le cas où les deux points A' et A'' coïncident avec deux points A^{-1} et A symétriques par rapport à O, la correspondance entre le point X et le point $Y = A^{-1}XA$ est (d'après le n⁰ 34) une

*) La première indication, que je sache, sur la relation du *calcul* des quaternions avec le calcul des substitutions linéaires binaires, se trouve dans un Mémoire de M. Laguerre *Sur le calcul des systèmes linéaires* (*Journal de l'Ecole Polyt.*, cah. 42, 1867; p. 230, *passim*). — Quant aux formules du texte, elles se trouvent déjà dans la Note de M. Cayley mentionnée au n⁰ 49, quoique M. Cayley n'y prononce pas le mot quaternion.

P. S. Je dois à M. Walther Dyck le renseignement que M. le professeur F. Klein avait consacré, il y a trois ans, une ou deux conférences, sur le même sujet, dans le Séminaire mathématique de l'Ecole Polytechnique de Munich.

rotation autour du point O, rotation qui transforme en elles-mêmes toutes les sphères

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - a^2 X_4^2 = 0,$$

quel que soit A.

Les équations qui lient dans ce cas les coordonnées de deux points X et Y correspondants, c'est-à-dire tels que $AY = XA$, sont:

$$\begin{aligned} A_1 Y_4 + A_2 Y_3 - A_3 Y_2 + A_4 Y_1 &= X_1 A_4 + X_2 A_3 - X_3 A_2 + X_4 A_1, \\ -A_1 Y_3 + A_2 Y_4 + A_3 Y_1 + A_4 Y_2 &= -X_1 A_3 + X_2 A_4 + X_3 A_1 + X_4 A_2, \\ A_1 Y_2 - A_2 Y_1 + A_3 Y_4 + A_4 Y_3 &= X_1 A_2 - X_2 A_1 + X_3 A_4 + X_4 A_3, \\ -A_1 Y_1 - A_2 Y_2 - A_3 Y_3 + A_4 Y_4 &= -X_1 A_1 - X_2 A_2 - X_3 A_3 + X_4 A_4, \end{aligned}$$

(en supprimant le facteur de proportionnalité qui devait figurer devant les premiers membres de toutes ces relations). Ces équations, dans le cas où $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \gtrless 0$, peuvent être remplacées par les suivantes:

$$\begin{aligned} A_4 Y_1 - A_3 Y_2 + A_2 Y_3 &= A_4 X_1 + A_3 X_2 - A_2 X_3, \\ A_3 Y_1 + A_4 Y_2 - A_1 Y_3 &= -A_3 X_1 + A_4 X_2 + A_1 X_3, \\ -A_2 Y_1 + A_1 Y_2 + A_4 Y_3 &= A_2 X_1 - A_1 X_2 + A_4 X_3, \\ Y_4 &= X_4. \end{aligned}$$

Dans les trois premières de ces équations on reconnaît les formules de M. Hermite relatives aux transformations linéaires de la forme $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ en elle-même. La résolution de ces trois équations par rapport à Y_1, Y_2, Y_3 conduit aux fameuses formules d'Euler qui donnent les expressions des neuf coefficients d'une substitution orthogonale ternaire, en fonction de trois paramètres correspondants

$$\lambda, \mu, \nu = \frac{A_1}{A_4}, \frac{A_2}{A_4}, \frac{A_3}{A_4}.$$

Les points A dont les coordonnées annullent les numérateurs des neuf expressions dont il s'agit, représentent des rotations qui amènent les diverses arêtes du trièdre des coordonnées rectangulaires à tomber sur les trois faces de ce même trièdre. Lieux de ces points sont neuf surfaces du second degré U^2, dont chacune coupe S^2 suivant quatre droites, et qui sont toutes leurs propres polaires réciproques par rapport à la surface S^2 (d'après le n° 59).

On doit à M. Darboux*) la remarque importante que ces neuf surfaces U^2 forment avec S^2 (surface qui constitue précisement le lieu des points A dont les coordonnées annulent le dénominateur commun

*) *Darboux: Sur la surface à seize points singuliers et sur les fonctions Θ à deux variables* (*Comptes Rendus*, 1881, tom. 92, p. 685).

$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2$ des neuf expressions considérées) un système de *dix surfaces fondamentales*, pareil à celui qu'on rencontre dans l'étude de *six complexes fondamentaux* de M. Klein*).

On sait qu'à un tel système sont attachés *quinze tétraèdres fondamentaux*. Parmi ces tétraèdres il y en a six qui sont conjugués par rapport à chacune des dix surfaces fondamentales; ces six tétraèdres forment toujours *deux systèmes desmiques* conjugués l'un à l'autre. Dans le cas actuel, les six tétraèdres fondamentaux conjugués à la sphère S^2 ne sont autre chose que les six tétraèdres, dont les sommets représentent les rotations qui superposent à lui-même un cube ayant pour axes les trois droites $\overline{OX_1}$, $\overline{OX_2}$, $\overline{OX_3}$, tétraèdres que nous avons déjà eu à considérer (n⁰ 56).

VII.

Sur quelques propriétés de la composition des rotations sphériques.

64. Deux rotations sphériques sont échangeables entre elles, lorsque les homographies du cercle à l'infini qui les accompagnent le sont aussi. Ainsi donc, conformement à ce que nous savons (n⁰ 16), deux rotations sphériques seront échangeables entre elles 1⁰ dans le cas où leurs axes coïncident; 2⁰ dans le cas où elles constituent des renversements (symétries) autour d'axes rectangulaires entre eux; leur résultante équivaut alors à un renversement autour d'un axe perpendiculaire aux deux premiers.

Une homographie A, établie sur le cercle C_∞, peut être considérée d'une infinité de manières comme produit de deux homographies involutives (*Voir* n⁰ 26). Il en est naturellement de même pour les homographies déterminées, par la rotation sphérique A correspondante, sur les divers cercles dont l'axe coïncide avec l'axe de cette rotation. A cette propriété correspond le théorème bien connu qu'*une rotation effectuée autour d'un point O de l'espace peut être décomposée d'une infinité de manières en deux renversements autour de deux droites a et b issues de O et situées dans le plan équatorial de cette rotation.* L'angle de deux pareilles droites a, b est constant et égal à la moitié de l'angle ϑ de la rotation considérée.

On sait bien qu'en partant de cette décomposition des rotations sphériques en renversements on peut obtenir aisément la construction du produit de deux pareilles rotations, déterminées par leurs plans équatoriaux et leurs angles.

65. D'après une propriété démontrée au n⁰ 24 à propos des

*) F. Klein: *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades* (*Math. Annalen*, t. II).

homographies binaires conjuguées, le lieu des points qui représentent les produits d'une même rotation A par les divers renversements effectués autour de O est le plan polaire de A par rapport à la sphère S^2. Le même plan est aussi le lieu des points qui représentent les produits des divers renversements effectués autour de O par la rotation A. Il suit de là que:

Lorsqu'on a deux rotations A_1 et A_2, conjuguées entre elles, on peut déterminer deux renversements R_1 et R_2 tels que l'on ait

$$R_1 A_1 = A_2 \quad \text{et} \quad A_1 = A_2 R_2,$$

ou bien

$$A_1 = R_1 A_2 \quad \text{et} \quad A_1 R_2 = A_2.$$

Ainsi donc *deux rotations A_1, A_2 conjuguées entre elles sont caractérisées par les relations*

$$A_1 A_2^{-1} = A_2 A_1^{-1} \quad \text{et} \quad A_1^{-1} A_2 = A_2^{-1} A_1,$$

dont chacune est une conséquence de l'autre.

Les deux renversements

$$R_1 = A_1 A_2^{-1} = A_2 A_1^{-1} \quad \text{et} \quad R_2 = A_1^{-1} A_2 = A_2^{-1} A_1,$$

doivent avoir respectivement pour axes les deux rayons s et t, qui se correspondent aussi bien dans la rotation A que dans la rotation B (voir n° 53).

66. Soient deux rotations A_1 et A_2 autour du point O et considérons les deux positions Σ_1 et Σ_2 que prend un corps solide Σ, lorsqu'on lui applique ces deux rotations. Il est visible que pour passer de la position Σ_1 à la position Σ_2, il faudra amener d'abord Σ_1 à la position Σ au moyen de la rotation A_1^{-1} et puis passer de là à la position Σ_2 au moyen de la rotation A_2. Ainsi donc la rotation autour du point O qui mène de la position Σ_1 à la position Σ_2 est représentée par le produit $A_1^{-1} A_2$. Quant à la rotation inverse de la précédente, c'est-à-dire celle qui mène de la position Σ_2 à la position Σ_1, elle sera de même $A_2^{-1} A_1$. Si au rayon s correspond dans les deux rotations A_1 et A_2 un même rayon t, on voit que la rotation $A_1^{-1} A_2$, ainsi que la rotation $A_2^{-1} A_1$, aura pour axe la droite t.

Dans le cas où les deux rotations A_1 et A_2 sont conjuguées entre elles, on a, comme nous venons de voir, $A_1^{-1} A_2 = A_2^{-1} A_1$. Dans ce cas la rotation qui mène de la position Σ_1 à la position Σ_2 équivaut à un renversement, c'est-à-dire que les deux corps Σ_1 et Σ_2 sont symétriques par rapport à un certain axe t issu de O.

Considérons maintenant trois rotations quelconques A_1, A_2, A_3, effectuées autour du point O. Ces trois rotations sont, en général, conjuguées par rapport à une seule rotation A_0, représentée par le pôle du plan qui contient les points A_1, A_2, A_3.

Soient Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_0 les positions que prend un corps Σ par suite des rotations A_1, A_2, A_3, A_0. On voit que l'on pourra passer de la position Σ_0 aux trois positions Σ_1, Σ_2, Σ_3 par trois renversements:

$$R_1 = A_0^{-1}A_1, \quad R_2 = A_0^{-1}A_2, \quad R_3 = A_0^{-1}A_3$$

effectués autour de trois droites a_1, a_2, a_3 issues du point O. Puisque maintenant les trois rotations A_1, A_2, A_3 sont arbitraires, on voit que l'on a cette proposition:

*Trois corps égaux Σ_1, Σ_2, Σ_3, ayant en commun un point O de l'espace, sont les symétriques d'un même corps Σ_0 par rapport à trois axes a_1, a_2, a_3 issus du point O**).

Il est visible que la rotation qui mène de la position Σ_1 à la position Σ_2 sera égale au produit des deux renversements R_1, R_2. Le plan de cette rotation sera par conséquent celui qui contient les axes a_1 et a_2; de plus l'angle de cette rotation sera égale au double de l'angle compris entre les deux droites a_1 et a_2 (n⁰ 64).

La proposition précédente, qui résume toutes les propriétés de trois corps égaux ayant un point en commun, aurait pu être établie directement d'une manière assez simple. Elle pourrait ainsi conduire à la construction bien connue de la résultante de deux rotations sphériques, lorsqu'on suppose donnés les plans équatoriaux et les angles de ces rotations.

67. Il est aussi aisé de démontrer directement cette autre proposition:

*Trois corps égaux Σ_1, Σ_2, Σ_3 ayant en commun un point O de l'espace sont les symétriques d'un même corps Σ_0' par rapport à trois plans α_1, α_2, α_3 passant par le point O***). La rotation qui mène de la position Σ_1 à la position Σ_2 a pour axe l'intersection des deux plans α_1 et α_2 et son angle est égal au double de l'angle compris entre les deux plans α_1 et α_2.

En remarquant maintenant que les rotations A_1, A_2, A_3, qui mènent de Σ_2 à Σ_3, de Σ_3 à Σ_1 et de Σ_1 à Σ_2, constituent trois

---

*) Cette proposition, a été étendue pour l'espace par M. Halphen dans une note *Sur la théorie du déplacement* (*Nouvelles Annales de Math.*, 3ième série, tom. I, 1882). La proposition de M. Halphen consiste en ce que trois corps égaux, situés d'une manière quelconque dans l'espace, sont les symétriques d'un même corps par rapport à trois droites déterminées de l'espace.

**) A cette proposition correspond dans le plan cette autre, contenue aussi comme cas particulier dans le théorème mentionné de M. Halphen, que trois figures égales situées dans un même plan sont les symétriques d'une même figure par rapport à trois droites de ce plan. *Voir* ma note *Sur quelques propriétés de trois figures égales situées dans un même plan* (*Bulletin de la Soc. Philomath. de Paris*, 7ième série, tom. VI, p. 12; 1881).

rotations quelconques telles que $A_1 A_2 A_3 = O$, on déduit de la proposition précédente que:

Si l'on a trois rotations A_1, A_2, A_3 telles que l'on ait $A_1 A_2 A_3 = O$, l'angle d'une quelconque A_j de ces rotations sera égal au double de l'angle compris entre le plan $\underline{A_i O A_j}$ et le plan $\underline{A_j O A_k}$ (i, j, k étant une permutation circulaire de 1, 2, 3).

De là on déduit aussi la construction bien connue de la résultante de deux rotations sphériques lorsqu'on donne les axes et les angles de ces rotations.

VIII.

Construction du produit de deux points.

68. Etant donnés deux points arbitraires A et B et que l'on considère les deux rayons s et t issus de O, qui soient tels que dans la rotation A au rayon s corresponde le rayon t tandisque dans la rotation B au rayon t corresponde le rayon s, on voit que les deux rotations AB et BA ont respectivement pour axes les rayons t et s. Comme maintenant (d'après le n⁰ 51) les rayons s et t sont précisement ceux attachés à la droite d qui joint le point A au point B^{-1}, on voit que:

La droite $\overline{OC}$, sur laquelle se trouve le produit $C = AB$ de deux points A et B de l'espace, coïncide avec le rayon t attaché (d'après le n⁰ 50) à la droite d qui joint le point A au point B^{-1}. (De même, la droite qui joint le point O au point BA doit coïncider avec le rayon s attaché à la droite d considérée).

Maintenant, comme la projection orthogonale de la droite $\overline{OC}$ sur le plan $\underline{AOB}$ est parallèle à d, c'est à-dire passe par le milieu du segment $\overline{AB}$, on voit bien que:

Etant donnés trois points A_1, A_2, A_3 tels que $A_1 A_2 A_3 = O$, les plans menés par les droites $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, $\overline{OA_3}$ perpendiculairement aux plans $\underline{A_2 O A_3}$, $\underline{A_3 O A_1}$, $\underline{A_1 O A_2}$ passent respectivement par les milieux des segments $\overline{A_2 A_3}$, $\overline{A_3 A_1}$, $\overline{A_1 A_2}$.

69. Pour achever la construction du point $C = AB$ lorsqu'on connait la droite $\overline{OC}$, on peut chercher la projection orthogonale C_0 de ce point C sur le plan $\underline{AOB}$, projection qui doit nécessairement se trouver sur la médiane passant en O du triangle AOB.

La construction de ce point C_0, qui n'est autre chose que la trace sur le plan $\underline{AOB}$ de la droite joignant C au pôle du plan $\underline{AOB}$ par rapport à la surface S^2, peut être effectuée, d'après le n⁰ 29, sans sortir du plan $\underline{AOB}$, de la manière suivante:

Sur les droites $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ on détermine deux points A' et B' tels que l'on ait entre les distances $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$, $\overline{OB}$ et $\overline{OB'}$ les relations

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = -1, \quad \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = -1.$$

On élève ensuite en ces points A' et B' des perpendiculaires sur les droites $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ respectivement (lesquelles perpendiculaires constituent les polaires des points A et B par rapport au cercle suivant lequel la sphère S^2 est coupée par le plan $\underline{AOB}$). Soient B_1 et A_1 les points où ces perpendiculaires vont rencontrer les droites $\overline{OB}$ et $\overline{OA}$. Le point d'intersection des droites $\overline{AB_1}$ et $\overline{BA_1}$ sera le point cherché C_0.

Comme cette construction emploie les deux points A et B d'une manière symétrique, il est visible que le point C_0 est aussi bien la projection du point AB que celle du point BA. Les deux points AB et BA sont donc symétriques par rapport au plan $\underline{AOB}$ (*Voir* n° 30).

Lorsque le point A ou le point B est à l'infini, le point C_0 coïncide avec le point B_1 ou avec le point A_1; si les deux points A et B sont à l'infini, C_0 coïncide avec O.

Dans le cas où les deux points A et B représentent des rotations conjuguées, le point C_0 coïncide avec le milieu du segment $\overline{A_1B_1}$.

70. Lorsqu'on considère les divers produits C de deux points A et B, appartenant respectivement à deux droites a et b issues de O, on voit que le lieu de ces points C est un hyperboloïde T^2_{ab}, complètement déterminé par les propriétés (métriques) du système des deux droites a, b (prises dans cet ordre) et de la sphère S^2.

Cet hyperboloïde T^2_{ab} contient les droites a, b ainsi que les génératrices de S^2 appuyées sur a et les directrices de S^2 appuyées sur b. Toute génératrice de cet hyperboloïde rencontrant la droite a en un point A est le lieu des produits du point A par les divers points de b. Le plan qui touche T^2_{ab} en ce point A fait avec le plan $\underline{ab}$ un angle égal à la moitié de l'angle de la rotation représentée par le point A (n° 67). — De même, toute directrice de T^2_{ab} rencontrant b en un point B est le lieu des produits des divers points de a par le point B. Le plan tangent de T^2_{ab} en B forme également avec le plan $\underline{ab}$ un angle qui, changé de signe, est égal à la moitié de l'angle de la rotation représentée par B.

Le produit de deux points A et B, appartenant respectivement aux droites a et b, sera donné par l'intersection de la génératrice de T^2_{ab} issue de A et de sa directrice issue de B.

Les deux droites de cette surface qui sont respectivement pa-

rellèles à a et à b se rencontrent en un point P qui représente le produit des deux renversements effectués autour des droites a et b. Ce point est situé sur la perpendiculaire élevée en O sur le plan $\underline{ab}$ et sa distance au point O est égale à la tangente de l'angle $\widehat{ab}$.

Il est visible que cette surface aura pour centre le milieu du segment $\overline{OP}$, et que les directions de ces axes seront celles de la droite $\overline{OP}$ et des bissectrices de l'angle $\widehat{ab}$.

D'après le n⁰ 32 cet hyperboloïde doit couper le plan à l'infini suivant une conique dans laquelle se trouvent inscrits une infinité de quadrilatères circonscrits au cercle C_∞. On voit par là que cet hyperboloïde ne diffère point de celui considéré d'abord par Steiner et Chasles et que M. H. Schroeter désigne sous le nom d'*hyperboloïde orthogonal**).

Dans le cas où les deux droites a et b sont orthogonales entre elles l'hyperboloïde dont il s'agit devient un paraboloïde coupant le plan à l'infini suivant des droites situées dans des plans perpendiculaires à a et à b.

L'hyperboloïde T^2_{ba} est naturellement le symétrique de T^2_{ab} par rapport au plan $\underline{ab}$.

IX.

Nouvelles propriétés des surfaces U^2 coupant S^2 suivant quatre droites.

71. A côté des surfaces T^2 que nous venons de considérer, comme lieux des produits de deux points appartenant respectivement à deux droites issues de O, il convient d'envisager plus généralement les surfaces du second ordre U^2 qui sont lieux des produits de deux points A et B appartenant respectivement à deux droites a et b quelconques de l'espace. Une pareille surface U^2, correspondant ainsi à deux droites a, b, passe par les génératrices g', g'' de S^2 appuyées sur a ainsi que par les directrices h', h'' de S^2 appuyées sur b (d'après la Note du n⁰ 31).

Les surfaces du second degré ayant cette propriété de couper S^2 suivant quatre droites, sont en nombre cinq fois infini. Mais comme un couple de droites de l'espace ne dépend que de huit paramètres, il faut bien qu'il y ait une triple infinité de couples de droites a, b conduisant à une même surface U^2. Et, en effet, si l'on a une surface U^2, correspondant à deux droites a et b, on pourra encore l'obtenir en remplaçant a par la droite lieu des produits des divers points de a

*) *H. Schroeter: Ueber ein einfaches Hyperboloid besonderer Art* (*Journal de Borchardt* t. 85, p. 26—79; 1877).

par un point M arbitraire, et en remplaçant aussi b par la droite lieu des produits du point M^{-1} par les divers points de b.

Nous savons déjà que les divers couples de droites a, b auxquelles peut correspondre une surface U^2, doivent être telles que a s'appuie sur les génératrices de S^2 situées sur U^2 et que b s'appuie sur les directrices de S^2 situées sur U^2. Reste donc encore une condition à laquelle doit satisfaire le couple des droites a, b.

Les conditions dont il s'agit se présentent sous une forme bien intéressante lorsqu'on considère les couples de rayons s_1 et t_1, s_2 et t_2, respectivement attachés aux deux droites a et b.

Toute rotation représentée par un point A de a amène s_1 à la place de t_1; de même toute rotation représentée par un point B de b amène s_2 à la place de t_2. On voit par là que dans les rotations B le rayon t_1 vient à coïncider successivement avec les génératrices d'un semi-cône de revolution Q_0 ayant pour axe le rayon t_2, semi-cône dont l'ouverture doit être égale au double de l'angle compris entre les deux rayons t_1 et s_2. Cela revient à dire que *dans les rotations AB, représentées par des points de la surface U^2_{ab}, le rayon s_1 attaché à la droite a vient à coïncider avec les diverses génératrices d'un semi-cône de révolution Q_0 déterminé.*

Ainsi donc *si l'on considère les rayons s_1, t_1 et s_2, t_2 attachés respectivement à deux droites a et b de l'espace, on remarque que pour tous les couples de droites a, b, qui conduisent à une même surface U^2, les deux rayons s_1 et t_2 doivent être fixes, tandisque les deux rayons t_2 et s_1 doivent former entre eux un angle constant.* Dans le cas où la surface U^2 est formée par deux plans tangents de S^2, les deux rayons s_1 et t_2 doivent se trouver dans un plan tangent de S^2.

Si les rayons attachés à une droite d sont s et t, les rayons attachés à la polaire reciproque de d pour rapport à S^2 seront s et $-t$ (n° 50). On voit par là aisement que *la surface U^2 qui correspond à deux droites a, b est la même avec celle qui correspond aux droites a' et b', polaires réciproques de a et de b par rapport à S^2.*

Il est également aisé de voir que

Si l'on a deux droites a, b dont les polaires réciproques par rapport à S^2 soient a', b', la surface U^2 qui correspond aux droites a, b', ou bien aux droites a', b, est la polaire réciproque par rapport à S^2 de la surface U^2 qui correspond aux droites a, b, on bien aux droites a', b'.

En se reportant à ce qui a été dit au n° 59 à propos des surfaces U^2 que nous considérons ici, on reconnaît aisément quelle est la condition à laquelle doivent satisfaire les rayons s_1, t_1 et s_2, t_2, attachés aux deux droites a et b, pour que la surface U^2 correspon-

dante passe par le point O ou touche le plan à l'infini. Ainsi l'on voit que pour que le premier cas ait lieu il faut que l'on ait $\widehat{t_1 s_2} = \widehat{s_1 t_2}$, tandisque pour que le second ait lieu il faut que l'on ait $\widehat{t_1 s_2} = \widehat{s_1 t_2} + \pi$.

Du reste, il est aisé de voir directement que, lorsque la surface U^2_{ab} passe par le point O, les points des droites a, b qui sont situés en ligne droite avec le point O sont symétriques par rapport à ce point, tandisque cette surface touche le plan à l'infini dans le cas où la droite polaire de a rencontre la symétrique de b par rapport à O (dans ce dernier cas la polaire de b rencontre aussi la symétrique de a par rapport à O).

La surface U^2 qui correspond à deux droites a, b qui se confondent passe par le point O. Cette même surface correspond à deux droites qui coïncident avec la polaire a' de a. Une pareille surface peut aussi être considerée comme surface T^2 (n⁰ 70), c'est-à-dire comme correspondant à deux droites issues de O et appuyées respectivement sur les génératrices et les directrices de S^2 qui rencontrent aussi bien la droite a que sa polaire a'. On déduit de là que: *Si l'on considère une droite d et les deux rayons s et t issus de O qui lui sont attachés, le produit de deux points quelconques A et B de cette droite coïncide avec le produit de deux points A' et B' convenablement choisis sur les rayons s et t**).

La surface U^2 qui correspond à deux droites a, b symétriques par rapport au point O est composée par les deux plans tangents de S^2 qui passent par le rayon t attaché à la droite a. Il est pourtant à remarquer que tant que le produit des deux points A, B, appartenant respectivement aux droites a, b, est déterminé, ce produit coïncide avec un point de la droite t (n⁰ 68).

La surface U^2 qui correspond à deux droites a, b, polaires réciproques par rapport à S^2, touche le plan à l'infini au point qui est le produit des points à l'infini A_0 et B_0 des droites a et b. Les deux droites de cette surface U^2 situées dans le plan à l'infini sont 1⁰ le lieu des produits des points de a par le point B_0, 2⁰ le lieu des produits du point A_0 par les points de b (n⁰ 24). La surface U^2 se compose de deux plans dans le cas où une des droites a, b rencontre le cercle C_∞ et où l'autre touche le cône K^2 qui projette du point O ce même cercle.

---

*) Si R_0 est le point à l'infini de la droite $d = \overline{AB}$, on aura $A' = AR_0$, $B' = R_0 B$. Les points A' et B' seront ainsi respectivement conjugués aux points A et B par rapport à S^2 (n⁰ 65, 66).

X.

Représentation des anastrophies sphériques par des plans de l'espace.

A côté des rotations effectuées autour du point O nous savons qu'il y a encore une autre catégorie d'homographies de l'espace qui transforment en elles-mêmes toutes les sphères ayant leur centre en O et qui établissent aussi des homographies sur le cercle à l'infini. Ces transformations jouissent pourtant de cette propriété distinctive de changer le *sens* des figures solides, et d'échanger par conséquent entre eux les deux systèmes de droites de toute sphère ayant son centre en O (voir le n° 39).

On pourrait désigner ces transformations sous le nom *d'anastrophies sphériques*, le nom d'*anastrophie**) pouvant servir en général à désigner les homographies du plan ou de l'espace qui laissent invariables les dimensions des figures mais qui changent leur sens en l'opposé.

Parmi les anastrophies sphériques ayant lieu autour du point O se distingue la *symétrie* ayant pour centre le point O. Cette correspondance a pour effet de faire correspondre à chaque rayon issu de O son opposé, tandisqu'elle transforme en lui-même tout plan orienté passant en O.

Toute autre anastrophie relative au même centre peut être considérée comme le produit d'une rotation A, effectuée autour de O, par la symétrie O. Dans une pareille anastrophie l'axe de la rotation A correspond à lui-même mais changé de direction. Par contre le plan équatorial de A correspond encore à lui-même, tout en conservant son orientation. J'appellerai ce plan *base* de l'anastrophie considérée.

On voit aisement que si une anastrophie est le produit d'une rotation A par la symétrie O, elle est aussi le produit de la symétrie O par la rotation A. Une anastrophie attachée de cette manière à une rotation A pourrait donc être représentée par le point representatif de cette rotation. Il vaut pourtant bien mieux de la représenter par le plan polaire de ce point par rapport à la surface S^2. La symétrie ayant pour centre le point O sera représentée de cette manière par le plan à l'infini.

Parmi les anastrophies sphériques effectuées autour du point O on a aussi à remarquer celles qui consistent en une symétrie ayant pour base un plan α passant par O. Une pareille anastrophie est représentée par sa base.

De même que les rotations représentées par des points d'une droite d font correspondre à un rayon s issu de O un autre rayon t

*) 'Αναστροφή, de ἀναστρέφω, signifie une opération de rétournement ou bien de changement d'ordre.

issu de O, de même les anastrophies représentées par des plans passant par cette même droite d font correspondre au rayon s le rayon t.

Une rotation A et une anastrophie β seront dites *conjuguées* si le point A se trouve dans le plan β. On voit ainsi que la symétrie ayant pour centre le point O est une anastrophie conjuguée à tous les renversements (symétries) ayant lieu autour d'axes passant en O. De même la rotation nulle O est conjuguée à toutes les anastrophies symétriques ayant pour bases des plans passant en O.

Etant données une rotation A et une anastrophie β, il n'y a en général aucun rayon s (qui ne rencontre point C_∞) issu de O auquel correspondent, dans la rotation A et dans l'anastrophie β, deux rayons qui coïncident entre eux. Cependant, dans le cas où la rotation A est conjuguée à l'anastrophie β, il y a une infinité de rayons s issus de O auxquels correspondent dans les deux transformations deux rayons t identiques (voir le n° 52). Il est aussi à remarquer que pour qu'une rotation A soit conjuguée à une anastrophie β il suffit qu'à un rayon s issu de O corresponde dans les deux transformations un même rayon t.

De même qu'on peut obtenir toutes les rotations conjuguées à une rotation donnée A en multipliant cette rotation A par les diverses rotations symétriques R, ou bien en multipliant les diverses rotations symétriques R par la rotation A, de même on peut obtenir les diverses anastrophies sphériques conjuguées à une rotation donnée A en combinant cette rotation dans l'un ou dans l'autre ordre avec les diverses anastrophies symétriques ayant pour bases les plans passant en O.

Etant données trois anastrophies sphériques arbitraires α_1, α_2, α_3 on peut trouver une rotation A_0 telle que les produits de cette rotation par trois anastrophies symétriques (par rapport à trois plans issus de O) coïncident précisement avec les anastrophies α_1, α_2, α_3. Cette rotation A_0, devant être conjuguée aux trois anastrophies α_1, α_2, α_3, devra être représentée par le point d'intersection des trois plans α_1, α_2, α_3. De là on déduit la proposition du n° 67 relative à trois corps égaux ayant le point O en commun.

La plupart de ces propriétés des anastrophies sphériques n'apparaissent que comme des corollaires immédiats des propriétés des rotations sphériques que nous avons étudiées dans ce qui précède. Nous avons tenu pourtant à ne point les passer sous silence puisque ce sont précisement certaines propriétés analogues aux précédentes qui permettent d'arriver à une représentation bien convenable des déplacements plans par des points de l'espace. Dans un occasion prochaine nous espérons pouvoir publier les résultats de nos recherches sur ce dernier sujet.

Table des matières.

Paris, le 18 Mars 1883.

Ueber die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst.

Von

A. Mayer in Leipzig.

In der 15ten Vorlesung der Leçons sur le calcul des fonctions (Ausgabe von 1806) beschäftigt sich Lagrange eingehend mit der Frage, in welcher Weise sich die singuläre Integralgleichung einer Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln aus der Differentialgleichung selbst ableiten lasse. Seitdem ist diese Frage hauptsächlich wohl nur in Betreff der Differentialgleichung 1. O. von Neuem untersucht worden und für diese hat namentlich Herr Darboux in dem Aufsatze „Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre"*) das Lagrange'sche Kriterium weiter verfolgt und zugleich die verschiedenen Fälle, die bei den Anwendungen des Satzes eintreten können, einer interessanten geometrischen Discussion unterzogen. Dagegen ist mir nicht bekannt, dass man bei der Differentialgleichung n. Ordnung wesentlich über die Lagrange'schen Resultate hinausgegangen wäre. Nach dem Bericht im 9ten Bande des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik hat allerdings Herr Zajączkowski die Frage allgemein für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen aufgenommen und den Darboux'schen Satz hierauf ausgedehnt. Aber seine Abhandlung ist polnisch geschrieben und, soweit ich weiss, bisher noch nicht übersetzt worden, zur Zeit also für die Mehrzahl der Mathematiker so gut wie verloren. Ueberdies kann man die Aufgabe, die singulären Lösungen aus den Differentialgleichungen selbst zu finden, von sehr verschiedenen Seiten aus in Angriff nehmen und es wäre daher ein eigener Zufall, wenn meine Ableitung mit der von Herrn Zajączkowski angewandten genau zusammenfiele. Diese Erwägungen lassen mich hoffen, dass der folgende Versuch, das Problem allgemein zu lösen, nicht ganz überflüssig

---

*) Bulletin des sciences mathématiques. t. IV, p. 158.

erscheinen werde, und insbesondere sollte es mich freuen, wenn er Herrn Zajączkowski bestimmte, seine Untersuchungen in Uebersetzung zu veröffentlichen.

Was nun die Eintheilung meiner Arbeit betrifft, so behandelt der erste Paragraph die Aufgabe für den allgemeinen Fall eines Systems von n Differentialgleichungen 1. O. zwischen $n+1$ Variabeln, im zweiten werden die gewonnenen Sätze an einigen einfachen Beispielen erläutert, der dritte Paragraph endlich bringt eine neue Ableitung für den speciellen Fall der Differentialgleichung n. O. Ich vermeide dabei absichtlich den sich zunächst darbietenden Lagrange'schen Weg, welcher von der Art ausgeht, wie die singuläre Integralgleichung aus einem Integrale entsteht. Einmal nämlich kann unter Umständen ein System von n Differentialgleichungen 1. O. nur solche singuläre Lösungen zulassen, die weniger als $n-1$ willkürliche Constanten enthalten, und dann existirt gar keine singuläre Integralgleichung dieser Art. Weiter aber gilt auch der Satz von Lagrange, wonach jedem Integrale dieselbe singuläre Integralgleichung zugehören soll, für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen jedenfalls nicht mehr ausnahmslos, wie sofort erhellt, wenn man an den Grenzfall denkt, in welchem das System aus n einzelnen Differentialgleichungen zwischen je zwei Variabeln besteht, die nur die unabhängige Variable gemein haben. Aus diesen Gründen benutze ich immer nur die Grunddefinition der singulären Lösungen, dass dieselben, solange man den Integrationsconstanten constante Werthe lässt, nicht in den vollständigen Lösungen enthalten sein dürfen. Die Resultate aber sind dieselben, die man auch auf dem erstgenannten Wege erhält, und in vollständiger Uebereinstimmung mit Lagrange*) erscheint für ein System von n Differentialgleichungen 1. O. zunächst das wenigstens theilweise Unbestimmtwerden der Werthe der zweiten Differentialquotienten, wie sie sich direct aus den ersten Ableitungen der vorgelegten Differentialgleichungen ergeben, als nothwendiges Kriterium der singulären Lösungen, ein Kriterium, das dann aber erst noch weiter entwickelt werden muss, wenn man einen brauchbaren Satz erhalten will. —

§ 1.

Das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. O.

Es seien:

$$F_i(x, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') = 0 \tag{1}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

n gegebene Differentialgleichungen 1. O., welche die n Differentialquotienten:

*) Leçons p. 225.

$$x_i' \equiv \frac{dx_i}{dx}$$

als Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$ definiren und eine solche Form besitzen, *dass sie für die Unbekannten $x_1', \ldots, x_n'$ keine vielfachen Wurzeln zulassen und dass überdies bei unbestimmtem x die ersten partiellen Differentialquotienten der Functionen F_i bestimmt und endlich bleiben für alle bestimmten endlichen Werthe von $x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$.*

Unter Umständen wird es möglich sein, die Gleichungen (1) etwa dadurch zu erfüllen, dass man bei unbestimmtem $x_1', \ldots, x_m'$ für $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}', \ldots, x_n'$ passende Functionen von $x, x_{m+1}, \ldots, x_n$ setzt. Von Lösungen der Gleichungen (1), die solchen Zufälligkeiten ihre Entstehung verdanken, sehe ich ab und beschränke, indem ich zugleich von vornherein x als die unabhängige Variable vorgeschrieben annehme, den Begriff der Lösungen für das Folgende dahin, dass unter einem System Lösungen der Gleichungen (1) immer nur n Gleichungen von der Form

$$x_1 = \varphi_1(x),\ x_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(x)$$

verstanden werden sollen, die nicht nur den Gleichungen (1) selbst, sondern zugleich auch irgend einem System Auflösungen dieser Gleichungen nach den Differentialquotienten $x_1', \ldots, x_n'$ identisch genügen.

Dies vorausgeschickt sei nun:

$$(2) \qquad x_i' = X_i(x, x_1, \ldots, x_n)$$

irgend ein Werthsystem der Differentialquotienten, welches die Gleichungen (1) identisch erfüllt, und:

$$(3) \qquad x_i = \varphi_i(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

das zugehörige System vollständiger Lösungen dieser Gleichungen. Ergiebt dann die Auflösung der n Gleichungen (3) nach den n Integrationsconstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$c_i = f_i(x, x_1, \ldots, x_n),$$

so ist identisch:

$$(4) \qquad x_i \equiv \varphi_i(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

und durch Substitution dieser Werthe der Constanten in die aus (3) folgenden Gleichungen:

$$(5) \qquad x_i' = \varphi_i' x \equiv \psi_i(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

entstehen die n Gleichungen:

$$(6) \qquad x_i' = \psi_i(x, f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

die mit den Gleichungen (2) zusammenfallen müssen.

Nach der obigen Festsetzung genügt daher jedes System Lösungen der Gleichungen (1) nothwendig einem System von der Form (6), das irgend einem System vollständiger Lösungen der Gleichungen (1) in der angegebenen Weise zugehört.

Mit Rücksicht auf die in (5) enthaltene Definition der Functionen ψ giebt aber die vollständige Differentiation der Identitäten (4):

$$(7) \qquad x_i' \equiv \psi_i(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) + \sum_{k=1}^{k=n} \varphi_i' f_k \frac{df_k}{dx},$$

also kann man die Gleichungen (6) so schreiben:

$$(8) \qquad M_i \equiv \sum_{k=1}^{k=n} \varphi_i' f_k \frac{df_k}{dx} = 0.$$

Jedes System Lösungen der Gleichungen (6) für welches nicht

$$(9) \qquad \sum \pm \varphi_1' f_1 \cdot \varphi_2' f_2 \ldots \varphi_n' f_n = 0$$

wird, ertheilt hiernach den Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ constante Werthe und ist daher in den vollständigen Lösungen (3) enthalten.

Besitzen also die Gleichungen (6) *singuläre* Lösungen, so müssen diese nothwendig der Bedingung (9) genügen und folglich die Eigenschaft besitzen, *dass nach Substitution der ihnen zugehörigen Werthe von* $x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$ *die* n *aus* (8) *hervorgehenden Gleichungen:*

$$(10) \qquad \frac{dM_i}{dx} \equiv \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{d\varphi_i' f_k}{dx} \frac{df_k}{dx} + \varphi_i' f_k \frac{d^2 f_k}{dx^2} \right) = 0$$

die zweiten Differentialquotienten $x_1'', \ldots, x_n''$ *nicht mehr vollständig bestimmen.*

Nun sind die Werthe (6) Auflösungen des Systems (1). Bezeichnet man also ihre Substitution durch ( ), so hat man für alle beliebigen Functionen $x_1, \ldots, x_n$ von x identisch:

$$(F_i) \equiv F_i(x, x_1, \ldots, x_n, \psi_1, \ldots, \psi_n) \equiv 0$$

und damit auch:

$$\frac{d(F_i)}{dx} \equiv (F_i' x) + \sum_{h=1}^{h=n} (F_i' x_h) x_h' + \sum_{h=1}^{h=n} (F_i' x_h') \frac{d\psi_h}{dx} \equiv 0.$$

Andrerseits ist nach (7) und (8)

$$\psi_h(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) \equiv x_h' - M_h$$

und folglich:

$$\frac{d\psi_h}{dx} \equiv x_h'' - \frac{dM_h}{dx};$$

daher gelten identisch die n Relationen:

$$\sum_{h=1}^{h=n} (F_i' x_h') \frac{dM_h}{dx} \equiv (F_i' x) + \sum_{h=1}^{h=n} x_h' (F_i' x_h) + \sum_{h=1}^{h=n} x_h'' (F_i' x_h').$$

Hierin sind die Coefficienten der $\frac{dM_h}{dx}$ und der x_h'' einander identisch gleich. Wenn daher für irgend ein System Functionen $x_1, \ldots, x_n$ von x die n linearen Gleichungen:

$$(11) \qquad (F_i'x) + \sum_{h=1}^{h=n} x_h'(F_i'x_h) + \sum_{h=1}^{h=n} x_h''(F_i'x_h') = 0$$

die n Unbekannten $x_1'', \ldots, x_n''$ bestimmen, so gilt für dasselbe Functionensystem das Gleiche immer auch von den n Gleichungen (10). Jedes System singulärer Lösungen der Gleichungen (6) muss also nothwendig die Eigenschaft haben, dass nach Substitution desselben die n linearen Gleichungen (11) nicht mehr die n Unbekannten $x_1'', \ldots, x_n''$ bestimmen.

Nach unsrer zweiten Annahme über die Form der gegebenen Gleichungen (1) bleiben nun bei unbestimmtem x die Coefficienten der Gleichungen (11) bestimmt und endlich für alle bestimmten endlichen Werthe von $x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$ und nach der ersten Voraussetzung ist die Determinante:

$$\left(\sum \pm F_1'x_1' \,.\, F_2'x_2' \ldots F_n'x_n'\right)$$

nicht an sich Null. Für jedes System Functionen $x_1, \ldots, x_n$ von x, welches diese Determinante von Null verschieden lässt, bestimmen somit die Gleichungen (11) stets alle n Unbekannten $x_1'', \ldots, x_n''$.

Nach dem Vorhergehenden hat man also den Satz:

I. *Jedes System singulärer Lösungen der Gleichungen* (1), d. h. jedes Lösungssystem, welches nicht dadurch aus irgend einem System vollständiger Lösungen dieser Gleichungen erhalten werden kann, dass man den n Integrationsconstanten constante Werthe beilegt, *muss nothwendig die Bedingung*

$$(12) \qquad \Delta \equiv \sum \pm F_1'x_1' \cdot F_2'x_2' \ldots F_n'x_n' = 0$$

erfüllen, oder also muss ein System gemeinsamer Lösungen der $n+1$ *Gleichungen* (1) *und* (12) *sein.**)

---

*) Auf die Gleichung (12) führt unmittelbar auch die Methode der Integration durch Differentiation.

Sind nämlich:

$$(\alpha) \qquad x_i'' = P_i(x, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')$$

die Auflösungen der n linearen Gleichungen

$$\frac{dF_i}{dx} = 0$$

nach den zweiten Differentialquotienten $x_1'', \ldots, x_n''$, so hat man identisch:

Es muss gleichzeitig auch die Bedingungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Delta}{\partial F'_i x'_k} \left[F'_i x + \sum_{h=1}^{h=n} x'_h F'_i x_h \right] = 0 \tag{13}$$

erfüllen. Denn was ursprünglich aus unserer Betrachtung folgt, ist das:

Für ein System singulärer Lösungen der Gleichungen (1) *dürfen die n linearen Gleichungen*

$$\frac{dF_i}{dx} \equiv \sum_{h=1}^{h=n} (x''_h - P_h) F'_i x'_h. \tag{β}$$

Jedes System Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ der gegebenen Gleichungen (1) genügt daher nothwendig entweder den n Differentialgleichungen 2. O. (α) oder aber der Gleichung (12).

Von den n Differentialgleichungen 2. O. (α), oder von den $2n$ Differentialgleichungen 1. O.

$$\frac{dx_i}{dx} = x'_i, \qquad \frac{dx'_i}{dx} = P_i$$

sind nun die Gleichungen $F_i = \text{const.}$ n unabhängige Integrale. Sind

$$\Phi_i = \text{const.} \equiv c_i$$

die n übrigen Integrale, so erhält man die vollständigen Lösungen der Gleichungen (1) durch Auflösung der $2n$ Gleichungen

$$F_i = 0, \qquad \Phi_i = c_i$$

nach $x'_1, \ldots, x'_n, x_1, \ldots, x_n$.

Diese vollständigen Lösungen und mit ihnen auch alle particulären Lösungen der Gleichungen (1) genügen daher den Gleichungen (α). Giebt es also (vergl. § 2 Beispiel 4) ein System Lösungen der Gleichungen (1), welches die Gleichungen (α) nicht erfüllt, so ist dasselbe sicher singulär und muss nothwendig der Bedingung (12) genügen.

Diese Betrachtung zeigt aber nicht, worauf es hier doch gerade ankommt, dass umgekehrt auch jedes System singulärer Lösungen der Gleichungen (1) nothwendig die Bedingung (12) erfüllen muss.

Dagegen kann man bemerken, dass, so oft es Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ der Gleichungen (1) giebt, die nicht zugleich einem System Auflösungen dieser Gleichungen nach den Differentialquotienten genügen, auch solche zufällige Lösungen stets die Bedingung (12) erfüllen. Denn kann bei unbestimmtem $x'_1, \ldots, x'_m$ den Gleichungen (1) dadurch genügt werden, dass man für $x_1, \ldots, x_m, x'_{m+1}, \ldots x'_n$ passende Functionen von $x, x_{m+1}, \ldots, x_n$ setzt, so macht die Substitution dieser Werthe mit den F_i selbst zugleich auch die $F'_i x'_1, \ldots, F'_i x'_m$ identisch Null und bringt also die Determinante Δ ebenfalls zum Verschwinden, *so dass alle Sorten von singulären Lösungen, welche die Gleichungen* (1) *bei unabhängigem x aufweisen können, stets der Bedingung* (12) *unterliegen.*

$$(14) \qquad \frac{dF_i}{dx} \equiv F'_i x + \sum_{h=1}^{h=n} x'_h F'_i x_h + \sum_{h=1}^{h=n} x''_h F'_i x'_h = 0$$

nicht mehr alle n Unbekannten $x_1'', \ldots, x_n''$ *bestimmen,*
und hierfür liefern eben bei unsern Voraussetzungen die Gleichungen (12) und (13) den analytischen Ausdruck. Aber die Bedingungen (13) stecken implicite schon im Satze I. Denn jedes System Lösungen der Gleichungen (1) genügt zugleich den n Gleichungen (14) und befriedigt daher, so oft es die Bedingung (12) erfüllt, von selbst die Gleichungen (13).

Trotzdem sind die Bedingungen (13) bei unserer Aufgabe wohl im Auge zu behalten, da sie im Sinne der Algebra natürlich von den Gleichungen (1) und (12) nicht abhängig zu sein brauchen. In dieser Hinsicht hat man zu beachten, dass von den n Gleichungen, die für $k = 1, 2, \ldots, n$ an sich in der Gleichung (13) enthalten sind, unter Umständen einige oder alle Identitäten, resp. blosse algebraische Folgen der Gleichung (12), oder der Gleichungen (1) oder endlich der Gleichungen (1) und (12) sein können. Jedenfalls aber reduciren sie sich sämmtlich auf höchstens eine einzige, von (12) unabhängige Gleichung, sodass das System Gleichungen (1), (12), (13) nie aus mehr als $n + 2$ von einander unabhängigen Gleichungen besteht. —

Da bei der eingeführten Bezeichnung identisch ist

$$\psi_i(x, f_1, \ldots, f_n) \equiv X_i$$

und

$$M_i \equiv x'_i - \psi_i(x, f_1, \ldots, f_n),$$

so hätte man direct aus den Eigenschaften der singulären Lösungen der Gleichungen (6) in Bezug auf die Gleichungen (10) schliessen können, *dass allgemein für jedes System singulärer Lösungen der n gegebenen Differentialgleichungen:*

$$x'_i = X_i(x, x_1, \ldots, x_n)$$

die Ausdrücke:

$$\frac{dX_i}{dx} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial x} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_i}{\partial x_h} x'_h$$

wenigstens theilweise unbestimmt werden müssen. Dies allgemeine Kriterium gestattet aber keine Weiterentwicklung, so lange man über die Art des Unbestimmtwerdens gar nichts weiss, und eben um letzteres sozusagen in eine bestimmte Bahn zu zwingen, muss man eine speciellere Form der gegebenen Differentialgleichungen zu Grunde legen. Bei unsern Gleichungen (1) kann dies Unbestimmtwerden der zweiten Differentialquotienten nur dadurch eintreten, dass von den n linearen Gleichungen (14) mit den n Unbekannten $x_1'', \ldots, x_n''$ wenigstens eine an sich identisch oder eine blosse algebraische Folge der übrigen

wird, und in dieser Form ist unser Kriterium für die Anwendungen in der Regel bequemer als der entwickelte Satz I. Auch der Umstand, dass in Folge der Bedingung (12) für jedes System singulärer Lösungen der Gleichungen (1) zwei Systeme von Wurzeln $x_1', \ldots, x_n'$ dieser Gleichungen zusammenfallen, kann von Nutzen sein, um nämlich unmittelbar das Fehlen von singulären Lösungen für ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu constatiren.

Satz I. behauptet selbstverständlich nicht umgekehrt, das jedes System Lösungen der Gleichungen (1), welches zugleich der Gleichung (12) genügt, deshalb allein schon singulär sei. Die Aufgabe, ohne vorhergehende vollständige Integration der Differentialgleichungen ein solches Kriterium der singulären Lösungen anzugeben, welches ebensowohl nothwendig als hinreichend sei, ist ja selbst für die Differentialgleichung 1. O. zwischen zwei Variabeln noch nicht endgültig gelöst und ich habe umsoweniger die Absicht, mich gar für ein System von Differentialgleichungen an diese schwierigste Frage zu wagen.*)

Für die Ziele dieses Aufsatzes genügt es vielmehr vollständig, dass unter den Lösungen der Gleichungen (1), welche die Bedingung (12) und damit auch die Bedingungen (13) erfüllen, alle etwaigen singulären

*) Es will mir überhaupt scheinen, als ob es viel richtiger wäre, statt nach einem, den singulären Lösungen ganz allein eigenthümlichen Kriterium zu suchen, die Frage anders zu stellen und zwar, wenn ich mich des einfacheren geometrischen Ausdrucks wegen auf die Differentialgleichung 1. O. zwischen x und y beschränke, so:

Wie lässt sich ohne Kenntniss der vollständigen Lösung entscheiden, ob eine gegebene Lösung y aus der vollständigen dadurch erhalten werden kann, dass man der Integrationsconstanten einen von x abhängigen Werth giebt?

Denn was uns an den singulären Lösungen interessirt, ist doch im Grunde nur ihre geometrische Eigenschaft, Enveloppen derjenigen Curvenschaar darzustellen, deren Gleichung die vollständige Lösung ist. Diese Eigenschaft ist aber den singulären Lösungen nicht ausschliesslich eigen, sie kann vielmehr auch particulären Lösungen zukommen. So hat z. B. die Parabelschaar:

$$y = c(x - c)^2$$

die beiden Enveloppen

$$y = \frac{4x^3}{27} \quad \text{und} \quad y = 0,$$

von denen die letzte eine Curve der gegebenen Schaar selbst ist. Man sieht aber leicht, dass solche ausgezeichnete particuläre Lösungen immer auch durch Substitution eines von x abhängigen Werthes der Integrationsconstanten aus der vollständigen Lösung entstehen müssen.

Hieraus erhellt zugleich, dass eine particuläre Lösung der Gleichung

$$F(x, y, y') = 0$$

von diesem Enveloppencharakter ebenfalls der Bedingung $F'y' = 0$ unterliegt und daher gleichzeitig mit den singulären Lösungen unter den gemeinsamen Lösungen dieser beiden Gleichungen enthalten sein muss.

Lösungen dieser Gleichungen enthalten sein und also nothwendig durch Aufsuchung der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (1) und (12) gefunden werden müssen.

Existiren keine solchen gemeinsamen Lösungen, so existiren auch keine singulären Lösungen der Gleichungen (1). Lässt sich daher aus den Gleichungen (1), (12), (13) eine von $x_1, \ldots, x_n$, $x_1', \ldots, x_n'$ freie Relation ableiten, so besitzen (bei unabhängigem x) die Gleichungen (1) keine singulären Lösungen. Vielmehr, wenn solche existiren sollen, so müssen die n Gleichungen (1) und die Gleichung (12), die nach unserer ersten Voraussetzung keine blosse Folge der ersteren ist, $x_1', \ldots, x_n'$ und irgend eine der Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ selbst — ich will diese Variable im Folgenden x_n nennen — als Functionen von x und von den übrigen Variablen bestimmen und durch Substitution dieser Werthe müssen die Gleichungen (13) (da sie sich auf höchstens eine von (12) unabhängige Gleichung reduciren) entweder identisch werden, oder aber selbst wieder eine weitere Variable, x_{n-1}, bestimmen.

Diese Bedingung ist aber natürlich wiederum nur nothwendig, nicht zugleich auch hinreichend: die Existenz gemeinsamer Lösungen der $n+1$ Gleichungen (1), (12) erheischt noch weitere Bedingungen.

Betrachten wir zunächst den letzten Fall, wo die Gleichungen (1), (12), (13) $x_1', \ldots, x_n'$, x_{n-1}, x_n bestimmen und nehmen an, dass man aus ihnen für diese Unbekannten die Werthe gewonnen habe:

$$x_1' = Y_1, \ldots, x_{n-2}' = Y_{n-2}, \tag{15}$$

$$x_{n-1}' = Y_{n-1}, \qquad x_n' = Y_n, \tag{16}$$

$$x_{n-1} = Z_{n-1}, \qquad x_n = Z_n, \tag{17}$$

wo die Y und Z also nur noch $x, x_1, \ldots, x_{n-2}$ enthalten.

Giebt es dann überhaupt Functionen $x_1, \ldots, x_n$ von x, welche den vorstehenden $n+2$ Gleichungen genügen, so müssen dieselben zugleich auch die Gleichungen erfüllen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Z_{n-1}}{\partial x} + \sum_{h=1}^{h=n-2} Y_h \frac{\partial Z_{n-1}}{\partial x_h} = Y_{n-1}, \\ &\frac{\partial Z_n}{\partial x} + \sum_{h=1}^{h=n-2} Y_h \frac{\partial Z_n}{\partial x_h} = Y_n, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

die man durch vollständige Differentiation der Gleichungen (17) und Substitution der Werthe (15) und (16) erhält, und diese beiden Gleichungen müssen also entweder Identitäten oder aber zusammengehörige Integralgleichungen der $n-2$ Differentialgleichungen 1. O. (15) sein, worunter ich auch den Fall mit einbegreife, dass eine der Gleichungen (18) identisch stattfindet und die andere eine Integralgleichung ist. Bestehen sie identisch, so liefert die vollständige Integration dieser

Differentialgleichungen und die Substitution ihrer Lösungen in die Gleichungen (17) ein System gemeinsamer Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ der Gleichungen (1), (12) mit $n-2$ willkürlichen Constanten. Sind dagegen, was sich durch fortgesetzte Elimination, Differentiation und Substitution der Differentialgleichungen nach einer bekannten Jacobi'schen Regel*) auf rein algebraischem Wege entscheiden lässt, die Gleichungen (18) nur zusammengehörige Integralgleichungen der Differentialgleichungen (15), so reducirt sich die Auffindung solcher gemeinsamer Lösungen auf die Integration eines Systems von weniger als $n-2$ Differentialgleichungen 1. O., unter Umständen sogar auf bloss algebraische Operationen.

Nehmen wir zweitens an, dass die Werthe

$$(19)\quad x_1' = Y_1(x, x_1, \ldots, x_{n-1}), \ldots, x_{n-1}' = Y_{n-1}(x, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

$$(20)\quad x_n' = Y_n(x, x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad x_n = Z_n(x, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

welche man aus (1) und (12) erhalten hat, die Gleichungen (13) identisch erfüllen. Soll es dann Functionen $x_1, \ldots, x_n$ von x geben, die ihnen genügen, so muss die Gleichung

$$(21)\qquad \frac{\partial Z_n}{\partial x} + \sum_{h=1}^{h=n-1} Y_h \frac{\partial Z_n}{\partial x_h} = Y_n$$

entweder identisch stattfinden, oder eine Integralgleichung der $n-1$ Differentialgleichungen 1. O. (19) sein. Tritt ersteres ein, so erhält man durch Integration dieser $n-1$ Differentialgleichungen ein System gemeinsamer Lösungen der Gleichungen (1), (12) mit $n-1$ willkürlichen Constanten. Im letzteren Falle dagegen verfährt man wieder nach der Jacobi'schen Regel und gelangt dann immer zu weniger als $n-1$ Differentialgleichungen 1. O., erhält also auch nur gemeinsame Lösungen der Gleichungen (1), (12) mit weniger als $n-1$ willkürlichen Constanten. Ist endlich die Gleichung (21) weder eine Identität, noch eine Integralgleichung des Systems (19), so giebt es ebenso, wie wenn im vorhergehenden Falle die Gleichungen (18) weder Identitäten, noch zusammengehörige Integralgleichungen des Systems (15) sind, überhaupt keine singulären Lösungen der Gleichungen (1), wobei jedoch zu beachten ist, dass es verschiedene Auflösungen der Gleichungen (1), (12), resp. der Gleichungen (1), (12) und (13) geben kann und dass man in einem solchen Falle die Nichtexistenz von singulären Lösungen nur dann mit Sicherheit behaupten darf, wenn das eben Gesagte für jedes dieser Systeme von Auflösungen eintritt.

Sollen daher singuläre Lösungen der Gleichungen (1) mit $n-1$ willkürlichen Constanten existiren, so muss (21) eine Identität sein.

---

*) Dilucidationes § 15, Crelle J. 23, p. 60.

Nun ist es, wie die Entstehungsart der singulären Lösungen aus den vollständigen lehrt, nur ein Ausnahmefall, wenn ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. O., das überhaupt singuläre Lösungen zulässt, keine singulären Lösungen mit $n-1$ willkürlichen Constanten besitzt. Daher ist der zuletzt betrachtete Fall entschieden der wichtigste und verdient wohl den Versuch, sein Kriterium auf eine für die Anwendungen bequemere Form zu bringen.

Zu diesem Ende bemerke ich, dass sich die Forderung der Identität (21) auch so aussprechen lässt: So oft:

$$\frac{dx_1}{dx} = x_1', \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx} = x_{n-1}' \tag{22}$$

genommen wird, müssen die Gleichungen (19) und (20) von selbst nach sich ziehen die Gleichung

$$\frac{dx_n}{dx} = x_n'.$$

Nun genügen die Werthe (19), (20), indem sie nach Voraussetzung die Gleichungen (1), (12), (13) identisch erfüllen, für alle beliebigen Functionen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ von x mit den Gleichungen (1) zugleich den Gleichungen:

$$F_i' x + \sum_{h=1}^{h=n} F_i' x_h \frac{dx_h}{dx} + \sum_{h=1}^{h=n} F_i' x_h' \frac{dx_h'}{dx} = 0$$

und folglich nach (12) auch den Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Delta}{\partial F_i' x_k'} \left[F_i' x + \sum_{h=1}^{h=n} F_i' x_h \frac{dx_h}{dx} \right] = 0.$$

Wegen (13) erfüllen sie also auch die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Delta}{\partial F_i' x_k'} \sum_{h=1}^{h=n} F_i' x_h \left(\frac{dx_h}{dx} - x_h' \right) = 0,$$

welche man erhält, wenn man die Gleichungen (13) von den vorstehenden abzieht.

Macht man aber hierin die Substitutionen (22), so reduciren sich diese Gleichungen auf:

$$\left(\frac{dx_n}{dx} - x_n' \right) \sum_{i=1}^{i=n} F_i' x_n \frac{\partial \Delta}{\partial F_i' x_k'} = 0$$

und ergeben daher sicher:

$$\frac{dx_n}{dx} = x_n',$$

so oft für die Werthe (19) und (20) nicht jede der Summen

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i' x_n \frac{\partial \Delta}{\partial F_i' x_k'}$$

verschwindet (die allerdings unter Umständen auch an sich Null sein können).

Man hat demnach den Satz:

II. *Sollen bei unabhängigem x die n gegebenen Differentialgleichungen* (1) *ein System singulärer Lösungen mit $n-1$ willkürlichen Constanten besitzen, so müssen sich aus den $n+1$ Gleichungen* (1) *und* (12) $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ *und eine der Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_n$ selbst, etwa x_n, bestimmen lassen und für irgend ein System* (19), (20) *solcher Auflösungen muss von den n linearen Gleichungen* (14), *in denen $x_1'', \cdots, x_n''$ als Unbekannte anzusehen sind, wenigstens eine an sich identisch oder eine blosse algebraische Folge der übrigen werden. Wird überdies durch Substitution der Werthe* (19), (20) *nicht jede der n Determinanten Null, die aus der Determinante Δ entstehen, wenn man irgend eine Elementenreihe*

$$F_1' x_k', \quad F_2' x_k', \cdots, F_n' x_k'$$

durch die Reihe

$$F_1' x_n, \quad F_2' x_n, \cdots, F_n' x_n$$

ersetzt, oder, was dasselbe ist, lässt sich nach Substitution dieser Werthe den n linearen Gleichungen:

$$F_i' x_n + \sum_{h=1}^{h=n} F_i' x_h' \frac{\partial x_h'}{\partial x_n} = 0, \tag{23}$$

welche die partiellen Differentialquotienten nach x_n der durch (1) *definirten Functionen $x_1', \cdots, x_n'$ bestimmen, nicht mehr genügen durch endliche Werthe aller n Unbekannten $\frac{\partial x_h'}{\partial x_n}$, so liefert die vollständige Integration der $n-1$ Differentialgleichungen* 1. *O.* (19) *in Verbindung mit der zweiten Gleichung* (20) *ein im Allgemeinen singuläres System Lösungen der gegebenen Gleichungen* (1) *mit $n-1$ willkürlichen Constanten.*

Werden dagegen in einem gegebenen Falle jene n Determinanten sämmtlich Null und will man ohne Integration entscheiden, ob die Gleichungen (1) und (12) Lösungen mit $n-1$ willkürlichen Constanten gemein haben oder nicht, so muss man sich auf andere Art zu überzeugen suchen, ob die Bedingung (21) identisch erfüllt ist oder nicht. Dies lässt sich direct probiren, wenn man bereits die Auflösungen (19), (20) der Gleichungen (1), (12) gefunden hat. Aber man braucht diese Auflösungen gar nicht erst zu berechnen, sondern kann weit bequemer auf folgende Weise verfahren.

Man löst die gegebenen Gleichungen (1) nach $x_1', \cdots, x_n'$ auf, wobei man gleich die Bedingung (12) zur Vereinfachung der Auflösung benutzen wird (und als Bedingung für das Zusammenfallen zweier Wurzelsysteme der Gleichungen (1) zieht die Gleichung (12) immer solche Vereinfachungen nach sich). Es sei:

$$(24) \qquad x_i' = X_i(x, x_1, \cdots, x_n)$$

irgend ein auf diese Art erhaltenes System Auflösungen der Gleichungen (1). Durch Substitution derselben geht (12) über in eine Gleichung zwischen $x, x_1, \cdots, x_n$ allein, die bei den Voraussetzungen unseres Satzes jedenfalls x_n enthält und immer auf eine solche Form:

$$(25) \qquad \Phi(x, x_1, \cdots, x_n) = 0$$

gebracht werden kann, in der sie keine vielfachen Wurzeln besitzt. Ist dies geschehen, so hat man nur durch Differentiation der Gleichung (25) und Substitution der Differentialgleichungen (24) die Gleichung zu bilden:

$$N \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{i=n} X_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0,$$

und zuzusehen, ob dieselbe eine algebraische Folge der Gleichung (25) (resp. eine Identität) ist oder nicht. *Im ersten Falle giebt es ein System Lösungen* $x_1, \cdots, x_n$ *der Gleichung* (24) *mit* $n-1$ *willkürlichen Constanten, welches zugleich die Gleichung* (25) *und somit auch die Gleichungen* (1) *und* (12) *identisch erfüllt;* im zweiten Falle dagegen existiren keine solchen Lösungen der Gleichungen (24) (daher denn der erste Fall immer nur dann eintreten kann, wenn durch die Gleichungen (24) und (25) wenigstens eine der Gleichungen (14) an sich identisch oder eine blosse Folge der übrigen wird).

In der That bezeichnet man durch [ ] die Substitution irgend eines Werthes von x_n, der der Gleichung (25) identisch genügt, so folgt aus der Identität $[\Phi] \equiv 0$ für $x_h = x, x_1, \cdots, x_{n-1}$:

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_h}\right] \equiv -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right] \frac{\partial [x_n]}{\partial x_h},$$

also hat man:

$$[N] \equiv \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right] \left\{[X_n] - \frac{\partial [x_n]}{\partial x} - \sum_{h=1}^{h=n-1} [X_h] \frac{\partial [x_n]}{\partial x_h}\right\}$$

und hierin ist der erste Factor nicht Null, woraus durch dieselben Schlüsse wie bei (18) die Richtigkeit der obigen Behauptung hervorgeht. Man sieht unmittelbar, dass dasselbe auch dann noch gilt, wenn die Gleichung (25) überhaupt nur irgend eine einfache Wurzel $x_n = [x_n]$ zulässt.

In derselben Art lässt sich auch das allgemeine Jacobi'sche Kriterium der Integralgleichung auf eine für die Anwendungen be-

quemere Form bringen, und da nach dem Früheren dies Kriterium in dem Falle eine Rolle spielen kann, wo nur singuläre Lösungen mit weniger als $n-1$ willkürlichen Constanten existiren, so dürfte es am Platze sein, diesen Satz hier einzuschalten:

III. *Soll die gegebene Gleichung*

$$\mu_1(x, x_1, \cdots, x_n) = 0$$

eine Integralgleichung der n gegebenen Differentialgleichungen 1. *O. sein:*

$$(\alpha) \qquad \frac{dx_i}{dx} = X_i(x, x_1, \cdots, x_n),$$

so müssen sich aus ihr durch fortgesetzte Anwendung der Operation:

$$A(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

im Ganzen $m \leq n$ solche in Bezug auf m von den n Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_n$, in Bezug etwa auf $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-m+1}$, von einander unabhängige Gleichungen:

$$(\beta) \qquad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 \equiv A(\mu_1) = 0, \cdots, \mu_m \equiv A(\mu_{m-1}) = 0$$

ergeben, welche die Gleichung

$$\mu_{m+1} \equiv A(\mu_m) = 0$$

zur Folge haben. Lassen überdies diese m Gleichungen ein System einfacher Wurzeln

$$(\gamma) \qquad x_n = Y_n, \quad x_{n-1} = Y_{n-1}, \cdots, x_{n-m+1} = Y_{n-m+1}$$

zu, so gehören diese Wurzeln und damit auch die ursprünglichen Gleichungen (β) selbst sicher einem System Integralgleichungen der gegebenen Gleichungen (α) an und zwar erhält man das allgemeinste System Lösungen der Gleichungen (α), welches den Gleichungen (γ) genügt, durch vollständige Integration der $n-m$ Differentialgleichungen 1. *O.*

$$\frac{dx_1}{dx} = Z_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = Z_2, \cdots, \frac{dx_{n-m}}{dx} = Z_{n-m},$$

die aus den $n-m$ ersten Gleichungen (α) durch die Substitutionen (γ) entstehen und deren Lösungen schliesslich in die Gleichungen (γ) einzusetzen sind. —

Im Vorhergehenden ist immer angenommen worden, dass die Variable x, wie in den dynamischen Differentialgleichungen die Zeit, von vornherein als unabhängige Variable vorgeschrieben sei. Lässt man diese Fixirung der unabhängigen Variabeln fallen, so kann man sich noch fragen, ob die Gleichung $x = \text{const.}$ einem System singulärer Lösungen der gegebenen Differentialgleichungen angehören könne. Um dies zu beurtheilen, hat man nur, nachdem man durch Einführung einer der Grössen $x_1, \cdots, x_n$ an Stelle von x die gegebenen Gleichungen (1) auf die neue unabhängige Variable transformirt hat,

die frühere Untersuchung für die transformirten Gleichungen wieder aufzunehmen, wobei man sich aber natürlich nur auf die specielle Annahme $x = \text{const.}$ zu beschränken braucht.

§ 2.

Beispiele.

Zur Erläuterung der verschiedenen Fälle, welche sich bei den Anwendungen des Satzes II. darbieten können, mögen hier einige Beispiele folgen.

1. Beispiel.

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} F_1 \equiv (x+y')\,y' + z' - y = 0, \\ F_2 \equiv (x+y')\,z' - z = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen:

$$\frac{dF_1}{dx} \equiv (x+2y')\,y'' + z'' = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dx} \equiv z'y'' + (x+y')\,z'' = 0$$

bestimmen nur dann nicht mehr die Unbekannten y'', z'', wenn:

$$\text{(B)} \qquad (x+2y')(x+y') = z'$$

wird. (Die Gleichungen (13) sind hier an sich identisch). Die Gleichung (B) verbunden mit der ersten Gleichung (A) giebt:

$$\text{(C)} \qquad (x+y')(x+3y') = y$$

und hieraus, aus (B) und aus der zweiten Gleichung (A) bestimmen sich y', z' und z als Functionen von x und y. Ueberdies ist

$$\begin{vmatrix} F_1'z, & F_1'z' \\ F_2'z, & F_2'z' \end{vmatrix} \equiv 1$$

und kann also niemals $\equiv 0$ werden. Jede Lösung y der Gleichung (C) liefert daher Lösungen der Gleichungen (A). Die Differentiation von (C) giebt nun:

$$(2x+3y')(1+2y'') = 0,$$

also entweder $y'' = -\frac{1}{2}$ oder $y' = -\frac{2x}{3}$.

Aus der ersten Annahme folgt mit Rücksicht auf (B), (C) und (A) successive:

$$y' = -\frac{x+a}{2}, \qquad z' = -a\,\frac{x-a}{2}$$

und:

$$\text{(D)} \qquad y = -\frac{(x-a)(x+3a)}{2}, \qquad z = -\frac{a(x-a)^2}{4},$$

während der Werth $y' = -\frac{2x}{3}$ auf die Gleichungen führt:

(E) $$y = -\frac{x^2}{3}, \qquad z = -\frac{x^3}{27},$$

welche die Enveloppe der Curven (D) darstellen.

Keins der beiden Werthsysteme (D) und (E) genügt den Gleichungen $y'' = 0$, $z'' = 0$, welche sich für die vollständigen Lösungen der Gleichungen (A) ergeben; beide sind also singuläre Lösungen der Gleichungen (A).

2. Beispiel.

(F) $$\begin{cases} F_1 \equiv \frac{y'^3}{3} + \frac{y'^2 x}{2} - (y' + 1)\, y - z = 0, \\ F_2 \equiv y' + \frac{y'^2}{2} + z' = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen:

$$\frac{dF_1}{dx} \equiv (y'^2 + y'x - y)\, y'' - y' - \frac{y'^2}{2} - z' = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dx} \equiv (1 + y')\, y'' + z'' = 0$$

lassen nur dann y'' und z'' unbestimmt, wenn gleichzeitig

$$y'^2 + y'x - y = 0 \quad \text{und} \quad y' + \frac{y'^2}{2} + z' = 0$$

wird. Die letzte Gleichung fällt zusammen mit der zweiten Gleichung (F) (die Gleichungen (13) werden blosse Folgen der gegebenen Differentialgleichungen) und die etwaigen singulären Lösungen müssen den Gleichungen genügen:

(H) $$\begin{cases} y'^2 + y'x - y = 0, \\ z' = -y' - \frac{y'^2}{2}, \\ z = (y' + 1)\, y - \frac{y'^3}{2} - \frac{y'^2 x}{2}, \end{cases}$$

die y', z', z bestimmen als Functionen von x, y; wieder kann

$$\begin{vmatrix} F_1{}'z, & F_1{}'z' \\ F_2{}'z, & F_2{}'z' \end{vmatrix} \equiv -1$$

nie $\equiv 0$ werden. Jede Lösung y der ersten Gleichung (H) führt also zu einem Systeme Lösungen der gegebenen Gleichungen (F). Aus der ersten Gleichung (H) folgt nun

$$(2y' + x)\, y'' = 0,$$

also $y'' = 0$ oder $y' = -\frac{x}{2}$.

Der erste Werth giebt:

(I) $$y = ax + a^2, \quad z = \frac{a^3}{3} + \frac{a^2 x}{2} - (a + 1)(ax + a^2),$$

der zweite

(K) $$y = -\frac{x^2}{4}, \quad z = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}.$$

Wieder ist die letzte Curve die Enveloppe der ersteren Curven. Aber nur die Lösungen (K) erfüllen nicht zugleich die beiden Gleichungen $y'' = 0$, $z'' = 0$, die sich durch Differentiation und Substitution der Gleichungen (F) ergeben. In der That sind:

$$y = c_1 x + c_2, \quad z = \frac{c_1^3}{3} + \frac{c_1^2}{2} x - (c_1 + 1)(c_1 x + c_2)$$

die vollständigen Lösungen von (F) und daher nur die Lösungen (K) singulär, die Lösungen (I) aber bloss particulär.

3. Beispiel.

Die Differentialgleichungen der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt sind von Herrn Hess*) auf die Form gebracht worden:

$$(a)\quad \begin{cases} F_1 \equiv \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 - 4P^2H = 0, \\ F_2 \equiv \frac{d\varrho}{dt} - R = 0, \\ F_3 \equiv \left[(\nu\sigma - \varrho^2)\frac{d\mu}{dt} - (\lambda\sigma - \mu\varrho)R\right]^2 \\ \qquad\qquad - H[\sigma(2P\mu + h) - \varrho(\alpha p + \beta q + \gamma r)]^2 = 0, \end{cases}$$

worin:

$$(b)\quad \begin{cases} R = \alpha(B - C)qr + \beta(C - A)rp + \gamma(A - B)pq, \\ \mu = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - h}{P}, \\ \nu = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2, \\ \varrho = A\alpha p + B\beta q + C\gamma r, \\ H = \nu\sigma - \varrho^2 + 2\lambda\mu\varrho - \lambda^2\sigma - \nu\mu^2 \end{cases}$$

und $P, h, A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \lambda$ Constanten sind.

Die Bedingung

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} F_1'p', & F_1'q', & F_1'r' \\ F_2'p', & F_2'q', & F_2'r' \\ F_3'p', & F_3'q', & F_3'r' \end{vmatrix} = 0$$

wird nun erfüllt durch $\frac{d\nu}{dt} = 0$. Hierdurch reduciren sich die Gleichungen (a) auf:

(c) $$H = 0,$$

(d) $$\frac{d\nu}{dt} = 0, \quad \frac{d\varrho}{dt} = R, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\lambda\sigma - \mu\varrho}{\nu\sigma - \varrho^2} R$$

*) Diese Annalen Bd. XX, p. 464.

und diese Gleichungen bestimmen die Differentialquotienten p', q', r', sowie etwa r selbst als Functionen von p und q. (Die Gleichungen (13) werden Folgen der gegebenen Differentialgleichungen und der Gleichung $\Delta = 0$). Durch die Gleichungen (d) wird aber jedes Element der ersten und der letzten Horizontalreihe in der Determinante $\Delta = 0$. Diese Determinante verschwindet daher in Folge der Gleichungen (d) auch dann noch, wenn man in ihr die partiellen Differentialquotienten von F_1, F_2, F_3 nach p', q' oder r' durch die Differentialquotienten nach r ersetzt, und wir haben hier also einen solchen Fall vor uns, in welchem die Frage, ob die gegebenen Differentialgleichungen und die Gleichung $\Delta = 0$ Lösungen mit $n - 1$ willkürlichen Constanten gemein haben, nicht unmittelbar durch unsern Satz II., sondern erst durch die ihm zugefügten Bemerkungen entschieden werden kann.

Nach denselben haben wir zuzusehen, ob die durch Substitution der Differentialgleichungen (d) aus $\frac{dH}{dt} = 0$ entstehende Gleichung eine blosse Folge der Gleichung $H = 0$ ist, oder nicht.

Nun ist

$$\frac{dH}{dt} \equiv \frac{\partial H}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \varrho} \frac{d\varrho}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt}.$$

Durch die Substitutionen (d) wird also:

$$\frac{dH}{dt} = 2R\left[\lambda\mu - \varrho + \frac{\lambda\sigma - \mu\varrho}{\nu\sigma - \varrho^2}\,(\lambda\varrho - \nu\mu)\right] \equiv -\frac{2\varrho R}{\nu\sigma - \varrho^2}\,H$$

und die Gleichung $\frac{dH}{dt} = 0$ somit in der That eine blosse Folge der Gleichung $H = 0$. Die letztere zieht überdies nicht die Gleichung $\frac{\partial H}{\partial r} = 0$ nach sich und besitzt also einfache Wurzeln. Demnach wird durch die Gleichung (c) das System (d) auf zwei Differentialgleichungen 1. O. reducirt, deren vollständige Integration ein System Lösungen p, q, r der Gleichungen (a) mit zwei willkürlichen Constanten liefert, welches die für die singulären Lösungen nothwendige Bedingung $\Delta = 0$ erfüllt. Es ist daher wohl möglich, dass diese von Herrn Hess entdeckten Lösungen nicht particuläre, sondern die allgemeinen singulären Lösungen der Differentialgleichungen der Rotation sind.

4. Beispiel.

Es seien:

$$(\alpha) \qquad f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2, \cdots, f_{n+m} = c_{n+m}$$

gegebene unabhängige Integrale von n Differentialgleichungen 2. O.

$$(\beta) \qquad x_i'' = P_i(x, x_1, \cdots, x_n, \; x_1', \cdots, x_n')$$

und n von diesen Integralen unabhängig von einander in Bezug auf

$x_1', \cdots, x_n'$, sodass die Auflösungen (β) von n der $n+m$ linearen Gleichungen:

$$f_h' x + \sum_{i=1}^{i=n} x_i' f_h' x_i + \sum_{i=1}^{i=n} x_i'' f_h' x_i' = 0$$

zugleich auch den m übrigen Gleichungen genügen. Mit den Argumenten f bildet man willkürlich n in Betreff der x' von einander unabhängige Differentialgleichungen 1. O.

$$(\gamma) \qquad F_i \equiv \Phi_i(f_1, f_2, \cdots, f_{n+m}) = 0,$$

wobei jetzt natürlich die früher in Betreff der partiellen Differentialquotienten der F_i gemachte Voraussetzung in Wegfall kommt*).

Man hat dann auch:

$$\frac{dF_i}{dx} \equiv \sum_{h=1}^{h=n} (x_h'' - P_h) F_i' x_h'$$

und folglich:

$$(\delta) \qquad \Delta(x_h'' - P_h) \equiv \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Delta}{\partial F_i' x_h'} \frac{dF_i}{dx},$$

die P_h bleiben aber endlich, auch wenn man:

$$(\varepsilon) \qquad \Delta \equiv \sum \pm F_1' x_1' F_2' x_2' \cdots F_n' x_n' = 0$$

setzt (weshalb hier die Gleichungen (13) blosse Folgen der Gleichung (12) werden). Nach den Identitäten (δ) wird also für die vollständigen Lösungen der n Differentialgleichungen 1. O.

$$F_1 = 0, \cdots, F_{n-1} = 0, \quad \Delta = 0$$

zugleich $F_n = \text{const.}$ Die $n+1$ Gleichungen (γ) und (ε) haben daher Lösungen mit $n-1$ willkürlichen Constanten gemein, welche, ausser in ganz besonderen Ausnahmefällen, den Gleichungen (β) nicht genügen und folglich singuläre Lösungen der gegebenen Gleichungen (γ) sind. Man erhält dieselben durch vollständige Integration der $n-1$ Differentialgleichungen 1. O. zwischen $x, x_1, \cdots, x_{n-1}$, die durch Elimination von x_n' und x_n aus den $n+1$ Gleichungen (γ) und (ε) resultiren, während die vollständigen Lösungen

$$x_i = \varphi_i(x, c_1, \cdots, c_{n+m}, c_{n+m+1}, \cdots, c_{2n})$$

der Gleichungen (β), die sich mit Hülfe der $n+m$ bekannten Integrale (α) durch vollständige Integration von $n-m$ Differentialgleichungen 1. O. gewinnen lassen, zugleich auch die vollständigen Lösungen

*) Die Differentialgleichungen des ersten Beispiels gehören in diese Classe. Denn

$$y' = c_1, \quad z' = c_2, \quad xy' - y = c_3, \quad xz' - z = c_4$$

sind die 4 Integrale der beiden Gleichungen 2. O. $y'' = 0$, $z'' = 0$.

der vorgelegten Differentialgleichungen (γ) darstellen, sobald man nur die Constanten $c_1, \cdots, c_{n+m}$ den n Bedingungen unterwirft

$$\Phi_i(c_1, c_2, \cdots, c_{n+m}) = 0.$$

Auf die Aufgabe, die singulären Lösungen gegebener Differentialgleichungen von der Form (γ) zu finden, führen eine Menge von interessanten geometrischen Problemen. Die 16. Vorlesung der Leçons und das 4. Capitel im zweiten Theile der Théorie des fonctions, sowie auch ganz besonders die interessante Abhandlung von Herrn J. A. Serret, „Sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure"*), behandeln solche Probleme. Dabei ist zu bemerken, dass man die Differentialgleichungen der gesuchten singulären Lösungen fast immer in einer weit einfacheren und bequemeren Form erhält, wenn man sie nicht in der obigen Art direct aus den gegebenen Differentialgleichungen selbst, sondern indirect durch die Methode der Variation der Constanten ableitet. Diese letztere lässt sich, falls $m < n$ ist, in doppelter Weise anwenden, nämlich entweder nach vollständiger Integration der Gleichungen (β), oder ohne dieselbe. Das aber gehört nicht eigentlich hierher.

§ 3.

Die Differentialgleichung n. O. zwischen zwei Variabeln.

Um die Resultate von § 1 anzuwenden auf die Differentialgleichung n. O. zwischen x und y:

$$F(x, y, y', \cdots, y^n) = 0,$$

braucht man nur diese Gleichung zu ersetzen durch das System von n Differentialgleichungen 1. O.

$$(1') \quad \begin{cases} F_1 \equiv x_1' - x_2 = 0, \quad F_2 \equiv x_2' - x_3 = 0, \quad \cdots, \quad F_{n-1} \equiv x_{n-1}' - x_n = 0, \\ F_n \equiv F(x, x_1, \cdots, x_n, x_n') = 0, \end{cases}$$

in welchem x_1 statt y geschrieben worden ist.

Die Gleichungen (14) werden hier:

$$(14') \quad \begin{cases} x_1'' - x_2' = 0, \cdots, x_{n-1}'' - x_n' = 0, \\ F'x + x_1' F'x_1 + \cdots + x_n' F'x_n + x_n'' F'x_n' = 0 \end{cases}$$

und für die durch die Gleichungen (1') definirten Functionen $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ der Variabeln $x, x_1, \cdots, x_n$ erhält man:

$$(23') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_n} = 0, \cdots, \dfrac{\partial x_{n-2}'}{\partial x_n} = 0, \quad \dfrac{\partial x_{n-1}'}{\partial x_n} = 1, \\ F'x_n + F'x_n' \dfrac{\partial x_n'}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

*) Liouville J. t. XVIII, 1853.

Die Gleichungen (14′) bestimmen nun nur dann nicht mehr alle n Unbekannten x_1'', $\cdots$, x_n'', wenn gleichzeitig:

$$F'x_n' = 0 \quad \text{und} \quad F'x + x_1' F_1' x_1 + \cdots + x_n' F' x_n = 0$$

wird, und den Gleichungen (23′) lässt sich bei der Annahme $F'x_n' = 0$ nur dann nicht genügen durch endliche Werthe der $\frac{\partial x_i'}{\partial x_n}$, wenn $F'x_n$ nicht $= 0$ wird.

Führt man daher wieder y ein und bedenkt, dass, wenn die beiden Gleichungen

$$F = 0, \quad F'y^n = 0$$

nach Elimination von y^n eine von y^{n-1} freie Gleichung ergeben, sie jedenfalls keine Lösung mit $n-1$ willkürlichen Constanten gemein haben können, so erhält man aus I. und II. sofort den Satz:

IV. *Eine Differentialgleichung n. O. zwischen x und y, die in einer solchen Form:*

$$F(x, y, y', \cdots, y^n) = 0 \tag{26}$$

vorgelegt ist, in der sie keine vielfache Wurzel y^n besitzt und für welche bei unbestimmtem x die ersten partiellen Differentialquotienten der Function F bestimmt und endlich bleiben für alle bestimmten endlichen Werthe von $y, y', \cdots, y^n$, kann keine singuläre Lösung y zulassen, die nicht zugleich auch eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen wäre:

$$F = 0, \quad F'y^n = 0. \tag{27}$$

Soll sie im Besondern eine singuläre Lösung mit $n-1$ willkürlichen Constanten besitzen, so müssen diese beiden Gleichungen y^n und y^{n-1} bestimmen und die erhaltenen Werthe müssen der Bedingung:

$$F'x + y'F'y + \cdots + y^n F' y^{n-1} = 0 \tag{28}$$

identisch genügen. Wird überdies für ein Werthepaar:

$$y^{n-1} = X_{n-1}(x, y, y', \cdots, y^{n-2}),$$
$$y^n \;\; = X_n \;\, (x, y, y', \cdots, y^{n-2}),$$

welches die drei Gleichungen (27), (28) *identisch erfüllt,*

$F'y^{n-1}$ nicht identisch Null,

so liefert die vollständige Integration der Differentialgleichung $(n-1)$. *O.*

$$y^{n-1} = X_{n-1}$$

eine, im Allgemeinen singuläre Lösung der gegebenen Gleichung (26) *mit $n-1$ willkürlichen Constanten.*

Wird dagegen $F'y^{n-1} \equiv 0$, so bleibt es fraglich, ob die vollständige Lösung y der Gleichung $y^{n-1} = X_{n-1}$ zugleich auch eine Lösung der gegebenen Gleichung (26) ist, und man wird dann, um dies zu entscheiden, entweder direct probiren, ob die beiden Gleichungen

$$y^{n-1} = X_{n-1}, \quad y^n = X_n$$

die Gleichung

$$\frac{dX_{n-1}}{dx} = X_n$$

nach sich ziehen, oder aber analog wie früher so verfahren, dass man unter Benutzung der Bedingung $F' y^n = 0$ eine Auflösung

(A) $$y^n = Y(x, y, y', \cdots, y^{n-1})$$

der gegebenen Gleichung (26) sucht und zugleich durch Elimination von y^n aus den beiden Gleichungen (27) eine solche Gleichung

(B) $$\Phi(x, y, y', \cdots, y^{n-1}) = 0$$

ableitet, die keine vielfachen Wurzeln zulässt. Jenachdem dann die Gleichung

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0$$

eine blosse Folge der beiden letzten Gleichungen ist oder nicht, ist auch die vollständige Lösung der Differentialgleichung (B) zugleich eine Lösung der Gleichung (A) und damit eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen (27), oder keine Lösung dieser Gleichungen. —

Für den allgemeinen Satz II. weiss ich keine andere Ableitung als die oben gegebene, wenn man nicht auf die Entstehungsart der singulären Integralgleichung aus einem Integrale zurückgreifen will. Zu dem specielleren Satze IV. aber kann man auch auf einem anderen Wege gelangen, und da es nicht uninteressant sein dürfte, einen directen Beweis für den letzten Satz zu haben, so möge hier auch noch diese neue Ableitung folgen. Sie entspricht der Art, in der Herr Weber (Crelle J. 69) die singuläre Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. O. aus der Differentialgleichung selbst gewinnt, und lässt sich nur auf solche Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. O. ausdehnen, die nach den abhängigen Variabeln selbst auflösbar sind.

Enthält die gegebene Differentialgleichung n. O. zwischen x und y die Variable y nur in ihren Differentialquotienten, so reducirt sie sich auf eine Differentialgleichung $(n-1)$. O. zwischen x und y'.

Man braucht daher nur solche Differentialgleichungen n. O. zwischen x und y zu betrachten, welche y selbst enthalten, und kann also, indem man sich die Gleichung bereits nach y aufgelöst denkt, von vornherein die Differentialgleichung in der Form

(29) $$y = \psi(x, y', y'', \cdots, y^n)$$

gegeben annehmen.

Ist nun

(30) $$y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

die vollständige Lösung der Gleichung (29), sodass man identisch hat:

$$\varphi \equiv \psi(x, \varphi' x, \varphi'' x, \cdots, \varphi^n x), \tag{31}$$

so bestimmen die n Gleichungen

$$y' = \varphi' x, \quad y'' = \varphi'' x, \cdots, y^n = \varphi^n x \tag{32}$$

stets die n Integrationsconstanten $c_1, c_2, \cdots, c_n$ als Functionen von $x, y', y'', \cdots, y^n$. Denn liessen sie sich aus ihnen eliminiren, so würde die Function (30) noch einer zweiten, nicht nur von willkürlichen Constanten, sondern auch von y selbst freien Differentialgleichung n^{ter} oder niederer Ordnung zwischen y und x genügen und wäre daher gegen die Voraussetzung keine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung (29).

Die Gleichung $y' = \varphi' x$ ist daher die vollständige Lösung der Differentialgleichung n. O. zwischen x und y':

$$y' = \psi' x + y'' \psi' y' + \cdots + y^{n+1} \psi' y^n, \tag{33}$$

die aus der gegebenen durch vollständige Differentiation nach x entsteht, und die Auflösungen

$$c_k = f_k(x, y', y'', \cdots, y^n) \tag{34}$$

der Gleichungen (32) nach $c_1, c_2, \cdots, c_n$ sind die n Integrale der Differentialgleichung (33), sodass identisch ist für jede Function y' von x:

$$\begin{aligned}(f_k' x + y'' f_k' y' + \cdots + y^n f_k' y^{n-1})\, \psi' y^n \\ + (y' - \psi' x - y'' \psi' y' - \cdots - y^n \psi' y^{n-1})\, f_k' y^n \equiv 0.\end{aligned} \tag{35}$$

Ist nun $y = z$ eine beliebige gegebene Lösung der Gleichung (29), so erhält man, wenn man in dieser Identität $y = z$ setzt und beachtet, dass hierdurch die Gleichung (33) identisch erfüllt wird:

$$\psi' z^n \cdot \frac{d f_k(x, z', z'', \ldots, z^n)}{dx} = 0. \tag{36}$$

Dieser Gleichung muss also jede Lösung $y = z$ der Gleichung (29) identisch genügen.

Die Gleichungen (34) sind aber nach Voraussetzung die Auflösungen der Gleichungen (32). Durch die n Substitutionen:

$$c_k = f_k(x, z', z'', \cdots, z^n) \tag{37}$$

wird also identisch:

$$\varphi' x = z', \quad \varphi'' x = z'', \cdots, \varphi^n x = z^n$$

und folglich nach (31)

$$\varphi = \psi(x, z', z'', \cdots, z^n),$$

also $\varphi = z$, sobald $y = z$ eine Lösung der Gleichung (29) ist.

Die Gleichungen (37) liefern also diejenigen Werthe der n Grössen

c_k, deren Substitution die vollständige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung überführt in die gegebene Lösung $y = z$.

Für eine singuläre Lösung z dürfen nun diese Werthe nicht sämmtlich constant, darf also nicht jedes:

$$\frac{d f_k(x, z', z'', \ldots, z^n)}{dx} \equiv 0$$

werden; nach (36) muss daher für jede solche Lösung $\psi' z^n$ identisch verschwinden.

Besitzt also die gegebene Gleichung (29) eine singuläre Lösung y, so muss diese nothwendig die Bedingung

$$\psi' y^n = 0 \tag{38}$$

identisch erfüllen, oder m. a. W. die singulären Lösungen y der gegebenen Gleichung müssen enthalten sein unter den gemeinsamen Lösungen der beiden Differentialgleichungen (29) und (38).

Haben also diese beiden Gleichungen keine Lösung gemein, so besitzt auch die gegebene Gleichung keine singuläre Lösung y, während jedoch umgekehrt eine gemeinsame Lösung von (29) und (38) deshalb allein noch nicht nothwendig eine singuläre Lösung der Gleichung (29) zu sein braucht.

Jede gemeinsame Lösung y der Gleichungen (29) und (38) genügt aber zugleich auch der Gleichung:

$$y' = \psi' y + y'' \psi' y' + \cdots + y^n \psi' y^{n-1}. \tag{39}$$

Wenn daher im Besonderen die Gleichung (29) eine singuläre Lösung mit $n-1$ willkürlichen Constanten* besitzen soll, so muss es nothwendig einen Werth von y^n geben, welcher die beiden (von y selbst freien) Gleichungen (38) und (39) gleichzeitig erfüllt (was eo ipso einschliesst, dass die Gleichung (29) weder linear in y^n, noch frei von y^{n-1} sein darf). Denn sonst würde sich aus den drei Gleichungen (29), (38), (39) durch Elimination von y^n und y^{n-1} stets nur eine Differentialgleichung von höchstens $(n-2)$. O. für die etwaige gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen (29) und (38) ergeben.

Ist umgekehrt:

$$y^n = X(x, y', y'', \cdots, y^{n-1})$$

eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen (38) und (39) und wird durch ihre Substitution $\psi' y^{n-1}$ nicht identisch Null, so genügt die vollständige Lösung der Differentialgleichung $(n-1)$. O.

$$y = \psi(x, y', y'', \cdots, y^{n-1}, X) \tag{40}$$

immer auch gleichzeitig der gegebenen Gleichung (29). Denn sie erfüllt mit (40) zugleich die Gleichung:

$$y' = \psi' x + y'' \psi' y' + \cdots + y^{n-1} \psi' y^{n-2} + y^n \psi' y^{n-1} + \psi' X \frac{dX}{dx}$$

und diese reducirt sich in Folge der Identitäten

$$y' \equiv \psi' x + y'' \psi' y' + \cdots + y^{n-1} \psi' y^{n-2} + X \psi' y^{n-1} \quad \text{und} \quad \psi' X \equiv 0$$

auf:

$$(y^n - X)\, \psi' y^{n-1} = 0.$$

Hiermit ist direct der folgende Satz gewonnen, von dem aus man sofort wieder zu dem früheren Satze IV. gelangen kann:

V. *Jede singuläre Lösung y der gegebenen Differentialgleichung n. O.*

$$y = \psi(x, y', y'', \cdots, y^{n-1}, y^n)$$

ist zugleich eine gemeinsame Lösung der beiden Differentialgleichungen

$$y = \psi, \quad \psi' y^n = 0.$$

Im Besonderen besitzt die gegebene Gleichung keine singuläre Lösung mit $n - 1$ willkürlichen Constanten, so oft die beiden Gleichungen:

$$\psi' y^n = 0, \quad y' = \psi' x + y'' \psi' y' + \cdots + y^n \psi' y^{n-1}$$

keine Wurzel y^n gemein haben.

Giebt es dagegen einen Werth

$$y^n = X(x, y', y'', \cdots, y^{n-1}),$$

welcher die beiden letzten Gleichungen gleichzeitig erfüllt, und wird überdies durch Substitution desselben $\psi' y^{n-1}$ nicht identisch Null, so ist die vollständige Lösung der Differentialgleichung $(n-1)$. O.

$$y = \psi(x, y', y'', \cdots, y^{n-1}, X)$$

stets eine Lösung und in der Regel die allgemeine singuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung n. O. —

Zur Theorie der Combinanten.

Von

E. Stroh in München.

Im 5ten Bande dieser Annalen pag. 95—122 hat Herr Gordan den wichtigen Satz bewiesen, dass alle Combinanten eines Systems von Formen aus einer unter ihnen abgeleitet werden können und damit das Studium dieser Bildungen auf das Studium *dieser einen Form* zurückgeführt. Aber es ist interessant, dass noch eine zweite Form existirt, welche ganz dieselbe Eigenschaft besitzt. Dieselbe enthält die contragredienten Reihen von Veränderlichen und bildet überhaupt zu der von Herrn Gordan aufgestellten Form den dualistischen Gegensatz. Eine Reihe von eleganten geometrischen Sätzen über Curven- und Flächensysteme findet in dieser Dualität ihren Grund. In der That hat sich in speciellen Fällen die gleichzeitige Betrachtung beider Formen von selbst aufgedrängt.

Zunächst werde ich nach einem kurzen Beweise des Gordan'schen Theorems die Gleichberechtigung der neu aufgestellten Form mit der von Herrn Gordan gegebenen nachweisen. Es geschieht dies unter Zugrundelegung einer Form, welche zwei Reihen homogener Veränderlicher von verschiedener Anzahl enthält und durch deren Einführung es möglich wird, die Definition der Combinanteneigenschaft derjenigen der gewöhnlichen Invarianteneigenschaft unterzuordnen.

I.

Seien

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_p$$

p Formen n^{ter} Ordnung mit r homogenen Veränderlichen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r,$$

dann ist jede simultane *Invariante* (Covariante etc.) derselben zugleich *Combinante*, die, für beliebige lineare Combinationen der Formen

$$c_{1i} f_1 + c_{2i} f_2 + \cdots + c_{pi} f_p$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, p$$

von der Determinante

$$\Delta = \sum \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{pp}$$

gebildet, sich nur um eine Potenz von Δ ändert. Für die gegebene Formen f_i führe ich nun folgende symbolische Bezeichnung ein

$$f_1 = \alpha_1 a_x^n, \quad f_2 = \alpha_2 a_x^n, \ldots, f_p = \alpha_p a_x^n,$$

wo

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r,$$

indem ich festsetze, dass n Symbole $a_1\, a_2 \ldots a_r$ *erst zusammen* mit einem Symbole α als Product vereinigt reale Bedeutung erhalten sollen. Diese Festsetzung ist vollständig ausreichend, um die Coefficienten der verschiedenen Formen von einander unterscheiden zu können und im Falle, wo Producte der Coefficienten auftreten, führt man in bekannter Weise verschiedene Symbolenpaare

$$a, \alpha;\ b, \beta;\ c, \gamma;\ \text{etc.}$$

ein. Je zwei zusammengehörige Symbole wie a und α, b und β, etc. werden kurz als ein *Symbolenpaar* bezeichnet. In jedem Ausdruck, welcher mehrere Symbolenpaare enthält, ist es dann gestattet, dieselben beliebig zu vertauschen, ohne dass der wirkliche Werth des Ausdrucks dadurch geändert wird.

Aus den Formen f_i lässt sich nun die neue Form

$$F = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \cdots + \xi_p f_p$$

bilden, deren symbolischer Ausdruck

$$F = \alpha_\xi a_x^n = (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_p \xi_p) a_x^n$$

wird. Wenn wir diese Form zu Grunde legen, dann kann eine Combinante der Formen f_i einfach folgendermassen definirt werden:

Combinante der Formen f_i ist jede Form, welche in Bezug auf F Invarianteneigenschaft besitzt für beide Variablenreihen ξ und x und ausserdem die ξ nicht enthält.

Dies ist sogleich ersichtlich, wenn man berücksichtigt, dass eine lineare Transformation der ξ genau dasselbe bewirkt, wie eine Combination der f_i. Natürlich müssen die Transformationsformeln der Variabeln x und ξ vollständig unabhängig von einander sein, da schon die verschiedene Anzahl der Variabeln eine Gleichheit derselben ausschliesst. Es tritt sonach hier die Frage nach denjenigen Invarianten (Covarianten etc.) von F auf, welche bei unabhängigen Transformationen der Variablenreihen nur um Potenzen der Substitutionsdeterminanten sich ändern*). Aber nur ein Theil aller existirenden kommt hier in Be-

*) Derartige Formen für eine Grundform mit zwei Reihen *binärer* Variabeln wurden zuerst von Gordan, Mathematische Annalen Bd. XIII, pag. 375 in dem Aufsatz: „Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“ benützt und

tracht, nämlich diejenigen, welche in Bezug auf die Variabeln ξ wirkliche Invarianten sind. Deren symbolische Form ist aber leicht festzustellen. Da jedes Symbol $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nur in der ersten Potenz auftreten kann, so wird ein Factor des symbolischen Ausdrucks gleich

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon)$$

in beliebiger Wiederholung sein. Die aus den Symbolen $a, b, c, \ldots$ gebildeten Factoren sind die folgenden:

$$(abc\ldots h),\ (abc\ldots u),\ (abc\ldots \overline{vw}),\ \text{etc.},\ a_x$$

und so wird jede Combinante als ein Aggregat von Formen darstellbar sein, deren symbolische Darstellung folgende ist:

$$C = \Pi(\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon)\,\Pi(abc\ldots h),\ (ab\ldots u),\ (ab\ldots\overline{vw}),\ldots a_x.$$

Dieses Product kann nun aber aus einem einfacheren Ausdruck durch Processe entstanden gedacht werden, welche die Invarianteneigenschaft ungeändert lassen und die in folgender Weise definirt sind

$$(1)\qquad \Omega_{u,v,w\ldots} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_r} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial y_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_r \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_r \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_r \end{vmatrix}.$$

Es möge das in C an zweiter Stelle auftretende Product die Symbole $a, b, c, \ldots, g$ enthalten, dann kann C aus

$$C' = \Pi(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)\cdot a_x^n\, b_y^n\, c_z^n \ldots g_t^n$$

durch Operationen Ω erhalten werden. Oder anders ausgedrückt: *C gehört zu den Covarianten ersten Grades von C'*, wie auch unmittelbar klar ist.

Die Form C' zerfällt nun in ein Product selbständiger Formen; nämlich in das Product der mit verschiedenen Variabeln geschriebenen Gordan'schen Determinante

$$(2)\qquad P = (\alpha\beta\ldots\varepsilon)\,a_x^n b_y^n \ldots e_t^n = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_p(x) \\ f_1(y) & f_2(y) & \ldots & f_p(y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(t) & f_2(t) & \ldots & f_p(t) \end{vmatrix}$$

für die niedrigsten Ordnungen näher untersucht. Neuerdings wurden zahlreiche Untersuchungen über diesen Gegenstand von Capelli, Peano in *Battaglini's Giornale* Vol. 17 u. 20 und Piazza in den *Atti di Torino* Vol. 17 veröffentlicht.

und es ist damit der Beweis geliefert, dass jede Combinante der f Covariante (Invariante etc.) der Form P ist.

Um nun eine zweite Form, welche ebenfalls bei Aufstellung eines Combinantensystems zum Ausgangspunkt dienen kann, einfach definiren zu können, nehme ich an, dass die Coefficienten der Formen $f_1 f_2 \dots f_p$ unter Weglassung der betreffenden Polynomialcoefficienten das folgende unvollständige System bilden

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & b_3 \dots a_N \\ b_1 & b_2 & b_3 \dots b_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ e_1 & e_2 & e_3 \dots e_N \end{matrix} \right\| \qquad N = \binom{n+r-1}{r-1}.$$

Dann ist die fragliche Form

$$(4) \qquad Q = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots\dots a_N \\ b_1 & b_2 & b_3 \dots\dots b_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ e_1 & e_2 & e_3 \dots\dots e_N \\ u_1^n & u_1^{n-1} u_2 & u_1^{n-1} u_3 \dots u_r^n \\ v_1^n & v_1^{n-1} v_2 & v_1^{n-1} v_3 \dots v_r^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ \tau_1^n & \tau_1^{n-1} \tau_2 & \tau_1^{n-1} \tau_3 \dots \tau_r^n \end{vmatrix}.$$

Dieselbe enthält $N-p$ Reihen Veränderlicher $u, v, \dots, \tau$, welche zu den Variabeln, in denen die f_i geschrieben sind, contragredient sind. Es muss nun bewiesen werden: erstens, dass Q Combinante ist und zweitens, dass P und damit alle Combinanten Covarianten von Q sind.

Was den ersten Punkt angeht, so ist nur erforderlich, Q in den Symbolen von F auszudrücken. Durch eine leichte Umformung ergiebt sich

$$(5) \qquad Q = \frac{1}{p!} (\alpha \beta \gamma \dots \varepsilon) \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} a_2 & a_1^{n-1} a_3 \dots a_r^n \\ b_1^n & b_1^{n-1} b_2 & b_1^{n-1} b_3 \dots b_r^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ e_1^n & e_1^{n-1} e_2 & e_1^{n-1} e_3 \dots e_r^n \\ u_1^n & u_1^{n-1} u_2 & u_1^{n-1} u_3 \dots u_r^n \\ v_1^n & v_1^{n-1} v_2 & v_1^{n-1} v_3 \dots v_r^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \tau_1^n & \tau_1^{n-1} \tau_2 & \tau_1^{n-1} \tau_3 \dots \tau_r^n \end{vmatrix}.$$

Die hier auftretende Determinante kann bekanntlich, da sie simultane Invariante von Potenzen der linearen Formen

$$a_x,\ b_x,\ c_x,\ \dots,\ e_x,\ u_x,\ v_x,\ \dots \tau_x$$

ist, in Function der r-reihigen Determinanten, die man aus diesen linearen Formen bilden kann, dargestellt werden. Dann nimmt Q die Form an

$$(6)\qquad Q = \frac{1}{p!}(\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon)\sum C_\lambda \Pi(ab\ldots h),\ (ab\ldots u),\ (ab\ldots uv),\ \text{etc.}$$

Also ist Q Covariante von F und damit auch Combinante der Formen f_i.

Um den andern Nachweis zu führen, bemerke ich zunächst, dass P und Q die Partialdeterminanten der Matrix (3) als Coefficienten enthalten, da P aus diesen mit den entsprechenden der folgenden Matrix multiplicirt linear zusammengesetzt werden kann:

$$(7)\qquad \left\| \begin{matrix} x_1^n & \binom{n}{1} x_1^{n-1}x_2 & \binom{n}{1} x_1^{n-1}x_3 & \ldots & x_r^n \\ y_1^n & \binom{n}{1} y_1^{n-1}y_2 & \binom{n}{1} y_1^{n-1}y_3 & \ldots & y_r^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^n & \binom{n}{1} t_1^{n-1}t_2 & \binom{n}{1} t_1^{n-1}t_3 & \ldots & t_r^n \end{matrix} \right\|.$$

Man unterwerfe nun Q der linearen Transformation

$$(8)\qquad \begin{gathered} u_i = q_{i1}u_1' + q_{i2}u_2' + \cdots + q_{ir}u_r' \\ i = 1, 2, \ldots, r \end{gathered}$$

mit der Determinante $\Delta = \sum \pm q_{11}q_{22}\ldots q_{rr}$; dann behaupte ich, dass das Resultat derselben auch dadurch erhalten werden kann, dass die Symbole $a, b, \ldots, e$ vermittelst der aufgelösten Gleichungen (8) in der Darstellung (5) von Q transformirt werden, wenn gleichzeitig mit $\Delta^{\frac{nN}{r}}$ multiplicirt wird. Die Form Q reproducirt sich nämlich bis auf den Factor $\Delta^{\frac{nN}{r}}$, wenn die *Symbole und die Variabeln* den Substitutionen (8) unterworfen werden. Dies kann durch

$$S_u \,.\, S_a = 1$$

ausgedrückt werden. Durch Anwendung der Substitution S_a^{-1} beiderseits folgt

$$S_u = S_a^{-1},$$

eben die Behauptung.

Für die transformirte Form Q ist nun die Form P zu bilden, die durch P' bezeichnet werden soll. Offenbar gelangt man zu demselben Resultate, wenn man die Symbole $a, b, \ldots, e$ in P vermittelst der linearen Substitution S_a^{-1} transformirt und mit $\Delta^{\frac{nN}{r}}$ multiplicirt. Demnach ergiebt sich P' aus

$$\Delta^{\frac{nN}{r}} (\alpha\beta\gamma \ldots \varepsilon)\, a_{x'}^n b_{y'}^n \ldots e_{t'}^n,$$

durch die Transformation

$$a_i' = q_{i1} a_1 + q_{i2} a_2 + q_{i3} a_3 + \cdots + q_{ir} a_r$$

auf alle Symbole $a, b, \ldots, e$ angewendet. Aber diese Transformation zugleich mit der für die Variablen gültigen

$$x_i' = q_{1i} x_1 + q_{2i} x_2 + q_{3i} x_3 + \cdots + q_{ri} x_r$$

lässt jeden Factor $a_{x'}$, $b_{y'}$, etc. in a_x', b_y', etc. übergehen und somit ist

$$P' = \Delta^{\frac{nN}{r}} . P;$$

was zu beweisen war.

Betrachten wir beispielsweise die Formen P und Q für drei ternäre quadratische Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2. Bei ihnen ist:

$$P = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(xyz)(abc)\sum_{xyz} a_x b_y c_z - \frac{1}{3}\sum_{uvw}(abu)(acv)(bcw),$$

$$Q = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \ldots & a_3^2 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 & \ldots & b_3^2 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 & \ldots & c_3^2 \\ u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 & \ldots & u_3^2 \\ v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 & \ldots & v_3^2 \\ w_1^2 & w_1 w_2 & w_1 w_3 & \ldots & w_3^2 \end{vmatrix} = (abc)\, a_x b_y c_z - (uvw)(abu)(bcw)(ucw),$$

wo sich die Summenzeichen auf alle Permutationen von xyz bez. uvw beziehen.

Die Form Q ist in ihrer symbolischen Gestalt eine sehr bekannte Determinante*), die im Allgemeinen leichter in ihre Elementarcovarianten aufgelöst werden kann als P. Der einfache Zusammenhang der beiden Formen der sich für binäre Formen herstellen lässt, wie sogleich gezeigt werden wird, ist jedoch für mehr als zwei Variabele nicht mehr vorhanden.

Aus der bewiesenen Gleichberechtigung der beiden Formen lässt sich eine wichtige Folgerung ziehen.

Betrachtet man nämlich zwei *verschiedene* Reihen von Formen und zwar eine Reihe

$$f_1 f_2 f_3 \ldots f_p$$

von der n^{ten} *Ordnung* und eine zweite, aus $N - p$ Formen bestehend,

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{N-p}$$

von der n^{ten} *Classe*. Die Combinanten der ersten Reihe können dann aus der zu ihr gehörigen Form Q_f abgeleitet werden, während die Combinanten der zweiten Reihe aus der zugehörigen Form P_φ erhalten

*) Reiss, Math. Annalen Bd. II, pag. 385.

werden können. Die Formen Q_f und P_φ haben nun aber dieselbe Zahl von Variabeln und gehen in einander über, wenn man die Partialdeterminanten des Coefficientensystems einer Formenreihe f_i mit den adjungirten des andern Coefficientensystems, letztere mit den betreffenden Polynomialcoefficienten genommen, vertauscht. Daher gilt folgender Satz:

Aus den Combinanten von p Formen n^{ter} Ordnung $f_1 f_2 \dots f_p$ mit dem Coefficientensystem

$$\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_N \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_N \end{matrix}\right|$$

(ohne die betreff. Polynomialcoefficienten) ergeben sich die Combinanten von $N-p$ Formen n^{ter} Classe $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{N-p}$ mit dem Coefficientensystem

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_1 & c_2\alpha_2 & c_3\alpha_3 & \dots & \alpha_N \\ \beta_1 & c_2\beta_2 & c_3\beta_3 & \dots & \beta_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varrho_1 & c_2\varrho_2 & c_3\varrho_3 & \dots & \varrho_N \end{matrix}\right\|$$

(mit Polynomialcoefficienten c_λ), indem man in allen Formen an Stelle der Determinanten des ersten Systems die adjungirten des zweiten setzt oder umgekehrt.

Will man zwei Systeme von Formen n^{ter} Ordnung bez. Classe mit *denselben Variabeln x* bez. u in dieser Weise in Zusammenhang bringen, dann ist ausserdem erforderlich, sämmtliche Variabelnreihen mit deren *contragredienten* zu vertauschen.

Die Formen f_i und φ_i wurden bis jetzt als vollständig unabhängig von einander angenommen. Nimmt man eine gegenseitige Abhängigkeit derselben in der Weise an, dass alle linearen Combinationen der Elemente des ersten Coefficientensystems mit den entsprechenden des zweiten verschwinden, also die Gleichungen bestehen

$$\begin{gathered} a_1\alpha_1 + c_2a_2\alpha_2 + c_3a_3\alpha_3 + \dots + a_N\alpha_N = 0, \\ a_1\beta_1 + c_2a_2\beta_2 + c_3a_3\beta_3 + \dots + a_N\beta_N = 0 \\ \text{etc. etc.} \end{gathered}$$

so werden die Determinanten des ersten Systems zu den adjungirten des zweiten proportional und damit sämmtliche Combinanten beider Systeme ebenfalls proportional. Da es bei diesen Formen überhaupt auf einen Factor nicht ankommt, so kann man sagen, sie werden *gleich.**) Formengruppen, welche in dieser Abhängigkeit stehen, sind von Rosanes, Crelle's Journal Bd. 76, pag. 312, *conjugirt*, von Reye

*) Brill, Math. Annalen Bd. XX.

ebenda Bd. 72 *apolar* genannt worden. Manche Eigenschaften der durch solche Formen dargestellten geometrischen Gebilde folgen direct aus der Gleichheit ihrer Combinanten.

II.

Für binäre Veränderliche existirt bekanntlich kein wesentlicher Unterschied zwischen den ursprünglichen Variabeln und deren contragredienten. Setzt man statt u_1, u_2, bez. y_2, $-y_1$, so ergeben sich Veränderliche derselben Art. Die Form Q nimmt dadurch aber eine viel einfachere Form an. Seien die gegebenen p binären Formen durch

$$f_1 = a_x^n,\ f_2 = b_x^n,\ f_3 = c_x^n, \ldots, f_p = e_x^n$$

dargestellt, so wird

$$Q = \prod (ab) \prod_{i=1}^{n+1-p} a_{x^{(i)}} b_{x^{(i)}} c_{x^{(i)}} \ldots e_{x^{(i)}} \cdot \prod_{ik} (x^{(i)} x^{(k)}),$$

da die Determinante in dieses Differenzenproduct zerfällt. Der Factor

$$\prod (x^{(i)} x^{(k)})$$

ist unwesentlich und kann weggelassen werden, so dass nur

$$Q = \prod (ab) \prod_{i=1}^{n+1-p} a_{x^{(i)}} b_{x^{(i)}} c_{x^{(i)}} \ldots e_{x^{(i)}}$$

in Betracht zu ziehen ist.

Der Zusammenhang, der zwischen den Formen P und Q stattfindet, kann nun dahin ausgesprochen werden, dass Q *eine Polare von P ist*. Die Form

$$P = \begin{vmatrix} a_x^n & b_x^n \ldots e_x^n \\ a_y^n & b_y^n \ldots e_y^n \\ \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots \\ a_t^n & b_t^n \ldots e_t^n \end{vmatrix}$$

ergiebt folgende Polarenbildung:

$$P_{x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(n+1-p)}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x^{p-1} a_{x^{(1)}} \ldots a_{x^{(n+1-p)}} & b_x^{p-1} b_{x^{(1)}} \ldots b_{x^{(n+1-p)}} & \ldots & e_x^{p-1} e_{x^{(1)}} \ldots e_{x^{(n+1-p)}} \\ a_y^{p-1} a_{x^{(1)}} \ldots a_{x^{(n+1-p)}} & b_y^{p-1} b_{x^{(1)}} \ldots b_{x^{(n+1-p)}} & \ldots & e_y^{p-1} e_{x^{(1)}} \ldots e_{x^{(n+1-p)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_t^{p-1} a_{x^{(1)}} \ldots a_{x^{(n+1-p)}} & b_t^{p-1} b_{x^{(1)}} \ldots b_{x^{(n+1-p)}} & \ldots & e_t^{p-1} e_{x^{(1)}} \ldots e_{x^{(n+1-p)}} \end{vmatrix},$$

indem man nämlich für jede Variabelnreihe $x, y, \ldots, t$ in Bezug auf

jede der Variabeln $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n+1-p)}$ die erste Polare bildet. Diese Determinante giebt aber den Ausdruck

$$P_{x^{(1)}\ldots x^{(n+1-p)}} = \prod (a\,b) \cdot \prod (x\,y) \cdot \prod_{i=1}^{n+1-p} a_{x^{(i)}} b_{x^{(i)}} \ldots e_{x^{(i)}},$$

wo die beiden ersten Producte sich auf alle Symbole $a, b, \ldots, e$ bez. auf alle Variabelen $x, y, \ldots, t$ beziehen. Da der Factor $\prod(xy)$ nicht in Betracht kommt, so entsteht also in der That Q aus P durch den Polarenprocess.

Es ist dann selbstverständlich, dass Q Covariante von P ist. Allein es ist damit noch nicht gesagt, dass die Covariantensysteme beider Formen auch übereinstimmen und es ist ein Ausnahmefall, dass dies hier eintritt. Im Allgemeinen wird das System einer derartigen Polaren von P nur *einen Theil* des Systems von P selbst umfassen und es ist dies schon bei ternären Variabeln der Fall. Bilden wir beispielsweise für das P von drei ternären quadratischen Formen:

$$P = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix}$$

die entsprechende Polare, so ergiebt sich

$$P_{x^{(1)}} = (xyz)\,(a\,b\,c)\; a_{x^{(1)}} b_{x^{(1)}} c_{x^{(1)}},$$

also nur eine der Formen, welche oben als mit P äquivalent gefunden wurden. Der Beweis, dass P eine Covariante von Q ist, dürfte daher auch für binäre Variabeln trotz der nahen Beziehungen beider Formen nicht überflüssig sein.

Wenn es sich nun aber darum handelt, das Combinantensystem der binären Formen f_i wirklich aufzustellen, dann tritt zunächst die Frage nach den Elementarcovarianten (Combinanten ersten Grades) der Formen P oder Q auf. Ich werde zwei Methoden angeben, um dieselben zu finden.

Die zunächst sich darbietende ist in folgendem Satze ausgesprochen:

Die Form m^{ter} Ordnung

$$K = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p} c_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p} \begin{vmatrix} f_1^{(\lambda_1)} & f_2^{(\lambda_1)} & f_3^{(\lambda_1)} \ldots f_p^{(\lambda_1)} \\ f_1^{(\lambda_2)} & f_2^{(\lambda_2)} & f_3^{(\lambda_2)} \ldots f_p^{(\lambda_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ f_1^{(\lambda_p)} & f_2^{(\lambda_p)} & f_3^{(\lambda_p)} \ldots f_p^{(\lambda_p)} \end{vmatrix},$$

wo

$$f_k^{(\lambda)} = \frac{\partial^\lambda f_k}{\partial x^\lambda}$$

und die Summe sich über alle Werthe $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ erstreckt, für welche

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_p = \frac{pn-m}{2},$$

ist dann eine Combinante ersten Grades, wenn die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{i=n} i(n-i+1)\left\{\frac{\partial K}{\partial f_1^{(i)}} f_1^{(i-1)} + \frac{\partial K}{\partial f_2^{(i)}} f_2^{(i-1)} + \cdots + \frac{\partial K}{\partial f_p^{(i)}} f_p^{(i-1)}\right\} = 0$$

in Bezug auf die $f_k^{(\lambda)}$ identisch erfüllt ist.

Es ist hiebei angenommen, dass die Formen in nicht-homogenen Variabeln $\frac{x_1}{x_2} = x$ geschrieben seien. Der Beweis des Satzes ergiebt sich daraus, dass jede simultane Covariante der Formen $f_1 f_2 \ldots f_p$ aus deren letztem Gliede dadurch erhalten werden kann, dass beziehungsweise die Coefficienten

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n;\quad b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n;\ \text{etc.}$$

durch

$$f_1^{(n)}, f_1^{(n-1)}, 2!\,f_1^{(n-2)}, \ldots, n!\,f_1;\quad f_2^{(n)}, f_2^{(n-1)}, 2!\,f_2^{(n-2)}, \ldots, n!\,f_2;\ \text{etc.}$$

ersetzt werden. Die Differentialgleichung, welcher der letzte Coefficient von K genügen muss, geht dadurch in die angegebene über. Bezeichnet man abkürzend die Determinante der Differentialquotienten durch

$$\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_p\},$$

so werden die drei einfachsten Combinanten von den Ordnungen

$$p(n-p+1),\quad p(n-p+1)-4,\quad p(n-p+1)-6,$$

die folgenden:

$$K_1 = \{0,1,2,\ldots,p-2,p-1\},$$

$$K_2 = (p-1)(n-p+2)\{0,1,2,\ldots,p-3,p-2,p+1\}$$
$$-(p+1)(n-p)\{0,1,2,\ldots,p-3,p-1,p\},$$

$$K_3 = (p-1)(p-2)(n-p+3)(n-p+2)\{0,1,2,\ldots,p-3,p-2,p+2\}$$
$$-(p^2-4)(n-p+3)(n-p-1)\{0,1,2,\ldots,p-3,p-1,p+1\}$$
$$+(p+2)(p+1)(n-p)(n-p-1)\{0,1,2,\ldots,p-4,p-2,p-1,p\}.$$

Die Ordnungen dieser Formen sind scheinbar höher, als angegeben ist. Es hat dies darin seinen Grund, dass bei der Entwicklung nach Potenzen von x die höchsten Terme identisch verschwinden. Auch lässt sich durch Einführung homogener Veränderlicher die scheinbare Ordnung auf die angegebene herabdrücken, jedoch kann man die Bemerkung machen, dass die umgeformten Ausdrücke bedeutend complicirter sind, als diejenigen in nicht-homogenen Veränderlichen.

Eine weitere Methode, um die Combinanten ersten Grades zu

finden, beruht darauf, dass man die Elementarcovarianten der Form Q bildet. Es ergiebt sich dabei eine merkwürdige Beziehung zwischen diesen Formen und den linear unabhängigen Covarianten $(n+1-p)^{\text{ten}}$ Grades, welche zu einer binären Form p^{ter} Ordnung gehören. In dem Ausdruck für Q kommt der symbolische Factor

$$\chi(x^{(i)}) = a_{x^{(i)}}\, b_{x^{(i)}}\, c_{x^{(i)}} \ldots e_{x^{(i)}}$$

in $(n+1-p)$-facher Wiederholung vor. Es steht nichts im Wege, diesen Factor als selbständige Form p^{ter} Ordnung mit den Linearfactoren $a_x, b_x, \ldots, e_x$ aufzufassen und demnach an Stelle von Q

$$\prod(ab) \quad . \chi(x^{(1)}) . \chi(x^{(2)}) \ldots \chi(x^{(n+1-p)})$$

zu setzen. Die Elementarcovarianten dieses Products sind aber nichts Anderes, als die mit $\Pi(ab)$ multiplicirten Covarianten $(n+1-p)^{\text{ten}}$ Grades, welche zur binären Form χ gehören*). Daher folgt der Satz:

Bildet man für die binäre Form p^{ter} Ordnung

$$\chi(x) = a_x\, b_x\, c_x \ldots e_x$$

alle linear unabhängigen Covarianten vom Grade $n+1-p$ und multiplicirt dieselben mit $\Pi(ab)$, so können diese Ausdrücke als die symbolischen Formen aller Combinanten ersten Grades betrachtet werden, welche zu p binären Formen a_x^n, b_x^n, ..., e_x^n gehören.

Berücksichtigt man, dass nach dem Hermite'schen Reciprocitätsgesetz die linear unabhängigen Covarianten der Form χ vom Grade $n+1-p$ in Rücksicht auf ihre Ordnungen mit denen einer Form $(n+1-p)^{\text{ter}}$ Ordnung vom Grade p übereinstimmen, so kann auch folgender Satz ausgesprochen werden:

Die Ordnungen der Combinanten ersten Grades, welche zu p Formen n^{ter} Ordnung gehören, sind den Ordnungen der linear unabhängigen Covarianten gleich, welche aus einer Form p^{ter} (bez. $(n+1-p)^{\text{ter}}$) Ordnung entspringen und vom $(n+1-p)^{\text{ten}}$ (bez. p^{ten}) Grade in den Coefficienten sind.

Für die niedrigsten Fälle von zwei, drei und vier binären Formen sind die Ordnungszahlen in folgender Tabelle zusammengestellt. Die Untersuchung der rationalen ebenen und räumlichen Curven hinsichtlich ihrer projectivischen Eigenschaften beruht wesentlich auf der Untersuchung der Formen, deren Ordnungszahlen in Columne 2 und 3 enthalten sind.

---

*) Vgl. Gordan, Formensystem binärer Formen pag. 9.

Ordg.	2 Formen	3 Formen	4 Formen
1	0.	—	—
2	2.	0.	—
3	4, 0.	3.	0.
4	6, 2.	6, 2.	4.
5	8, 4, 0.	9, 5, 3.	8, 4, 0.
6	10, 6, 2.	12, 8, 6, 4, 0.	12, 8, 6, 4, 0.
7	12, 8, 4, 0.	15, 11, 9, 7, 5, 3.	16, 12, 10, $(8)_2$, $(4)_2$, 0.
8	14, 10, 6, 2.	18, 14, 12, 10, 8, $(6)_2$, 2.	20, 16, 14, $(12)_2$, 10, $(8)_2$, 6, $(4)_2$, 0.
9	16, 12, 8, 4, 0.	21, 17, 15, 13, 11, $(9)_2$, 7, 5, 3.	24, 20, 18, $(16)_2$, 14, $(12)_3$, 10, $(8)_3$, 6, $(4)_2$, $(0)_2$.
10	18, 14, 10, 6, 2.	24, 20, 18, 16, 14, $(12)_2$, 10, $(8)_2$, 6, 4, 0.	28, 24, 22, $(20)_2$, 18, $(16)_3$, $(14)_2$, $(12)_3$, $(10)_2$, $(8)_3$, 6, $(4)_3$, 0.

Diese Zahlen sind einer gewissen Bedingung unterworfen. Nach einem Satze von Clebsch (binäre Formen pag. 39) enthält das System der Elementarcovarianten einer binären Form mit mehreren Reihen Veränderlicher genau ebensoviel linear unabhängige Constanten wie die Form selbst. An einer andern Stelle werde ich nun zeigen, dass eine lineare Relation zwischen den Coefficienten der obigen Formen stets eine solche zwischen diesen Formen selbst nach sich zieht und daher, wenn letztere Möglichkeit ausgeschlossen wird, im vorliegenden Falle nicht statthaben kann. Die Zahl der linear unabhängigen Constanten, welche in den Formen P oder Q enthalten sind, beträgt nun $\binom{n+1}{p}$, daher muss

$$\sum (\lambda_i + 1) = \binom{n+1}{p}$$

sein, wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ die Ordnungen der zu p Formen gehörigen Combinanten ersten Grades sind. Andererseits ergiebt dies folgenden Satz, der mit einem von Sylvester (Crelle's Journal Bd. 85, p. 108) aufgestellten Theoreme identisch ist:

Bildet man im vollständigen Formensystem einer binären Form p^{ter} Ordnung alle linear unabhängigen Covarianten ϱ^{ten} Grades, die beziehungsweise von den Ordnungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_r$ sind, so ist stets

$$\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + 1) = \binom{p+\varrho}{p}.$$

Die Ausdehnung dieses Satzes auf Formen mit beliebig vielen Veränderlichen werde ich bei einer andern Gelegenheit geben.

Berlin, 7. März 1883.

[Binäre Formen mit mehreren Reihen unabhängig transformirbarer Veränderlicher sind auch schon von Clebsch bei der Betrachtung der conjugirten Connexe verwandt worden; siehe Clebsch's Vorlesungen über Geometrie, herausgegeben von Lindemann.]

Ueber eine gewisse Erweiterung des Cantor'schen Satzes

(Crelle's Journal, Bd. 72, S. 135).*)

Von

C. Neumann in Leipzig.

Es sei $f(x)$ eine beliebig gegebene *periodische* und *stetige* Function, und L die Länge ihrer Periode. Für $x = A$ sei B der Werth der Function:

(1) $$f(A) = B.$$

Auch sei das A in solcher Weise ausgewählt, dass *B von 0 verschieden* ist. Alsdann ist:

$$f(A) = f(A + L) = f(A + 2L) = \cdots = B,$$

oder, falls man $A = SL$ setzt:

(2a) $$f(SL) = f((S+1)L) = f((S+2)L) = \cdots = B,$$

und ebenso auch:

(2b) $$f(SL) = f((S-1)L) = f((S-2)L) = \cdots = B;$$

wobei sogleich bemerkt sein mag, dass von den hier auftretenden *Constanten:*

(3) $$\cdots\cdot\ (S-2),\ (S-1),\ S,\ (S+1),\ (S+2),\ \cdots\cdot$$

weiterhin Gebrauch zu machen ist. Wir wollen nun die Function $f(x)$, und ebenso auch die Constanten L, A, B, S als *gegeben* betrachten, und uns folgende Aufgabe vorlegen:

Aufgabe. — *Es seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n, \cdots$* in inf. *beliebig gegebene Constanten. Und insbesondere sei bekannt, dass für jedweden Werth der Variablen x die Formel stattfindet:*

(4) $$\lim_{n=\infty} \beta_n f(nx) = 0.$$

---

*) Jener Satz lautet: *Wenn für jeden Werth von x zwischen gegebenen Grenzen ($a < x < b$) die Formel stattfindet:* $\lim(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$, *so folgt hieraus, dass* $\lim a_n = 0$, *und ebenso auch* $\lim b_n = 0$ *ist.*

Gleichzeitig sei bemerkt, dass der gegenwärtige Aufsatz einen Theil desjenigen bildet, der von mir bereits publicirt worden ist in den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 5. März 1883.

Auf Grund dieser Formel sollen die Eigenschaften jener Constanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots \beta_n, \cdots$ näher untersucht werden.

Da die Formel (4) stattfinden soll für *jedwedes* x, so wird sie z. B. auch stattfinden für $x = 0$. Man erhält also:

$$(\sigma) \qquad \lim_{n=\infty} \beta_n f(0) = 0,$$

oder, falls man durch die Constante $f(0)$ dividirt:

$$(\tau) \qquad \lim_{n=\infty} \beta_n = 0.$$

Doch ist der Uebergang von (σ) zu (τ) offenbar nur dann erlaubt, wenn das $f(0)$ *von* 0 *verschieden* ist. Es scheint somit fraglich, ob die Formel (τ) auch dann noch gültig bleibt, wenn $f(0) = 0$ ist.

Die Methode, welche man, falls $f(x)$ die Function $\sin(x)$ vorstellt, zur Beantwortung dieser Frage einzuschlagen hat, verdankt man Herrn Cantor. So complicirt diese Methode in Anbetracht der einfachen Dinge, um welche es sich handelt, auch erscheinen mag, so sind doch alle Versuche, diese Methode durch eine bequemere und schnellere zu ersetzen, bisher vergeblich geblieben. Ich werde nun im Folgenden zeigen, dass diese *Cantor'sche Methode* nicht nur auf $\sin(x)$, sondern mittelst einiger sich leicht ergebenden Modificationen auch auf die hier betrachtete Function $f(x)$ anwendbar ist.

Dabei werde ich Gebrauch machen von zwei *ganz willkürlich zu fixirenden* Constanten h_0 und j_0, von denen indessen die *erstere* positiv und > 0 sein soll. Zur Absolvirung der *augenblicklich* vorliegenden Aufgabe (4), würde es bequem sein, diese Constanten h_0 und j_0 etwa beide $= 1$ zu machen. Trotzdem werde ich dies *nicht* thun, sondern die Fixirung der Constanten h_0 und j_0 absichtlich *in suspenso* lassen, um in solcher Weise meinen Betrachtungen eine Form zu verleihen, in welcher sie nicht nur für die *augenblickliche Aufgabe*, sondern gleichzeitig auch für die *später* folgenden Untersuchungen geeignet sind.

Um unseren Vorstellungen und Betrachtungen eine gewisse Festigkeit zu verleihen, können wir uns, bei Behandlung der *augenblicklichen* Aufgabe, für h_0 und j_0 etwa folgende Werthe gewählt denken:

$$(5) \qquad \begin{aligned} h_0 &= +\, 345\tfrac{1}{3}, \\ j_0 &= +\, 987\tfrac{2}{3}, \quad \text{oder} \quad = -\, 8733\tfrac{4}{5}. \end{aligned}$$

Während nämlich h_0, wie schon gesagt, *positiv und* > 0 *sein soll*, ist die Fixirung von j_0 einer derartigen Beschränkung *nicht* unterworfen.

Es sei ε ein *ad libitum* gewählter Kleinheitsgrad. Mit Bezug auf dieses ε wollen wir sämmtliche Constanten

$$(6) \qquad \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \cdots, \textit{in inf.}$$

in zwei Kategorien versetzen, in die der *höheren* und die der *tieferen* β's, indem wir jedwedes β zur ersten oder zweiten Kategorie zählen,

je nachdem sein absoluter Betrag $> \varepsilon$, oder aber $\leqq \varepsilon$ ist. Dabei sind verschiedene Möglichkeiten vorhanden. Denn es wird der die Reihe (6) von Links nach Rechts Durchwandernde *entweder* auf *gar kein höheres* β, sondern stets nur auf tiefere β's stossen, wie weit er auch nach Rechts fortschreiten mag. *Oder*, er wird *nur eine Zeit lang* auf *höhere* β's stossen, z. B. nur bis zu seiner Ankunft in β_{27}; sodann aber bei Durchlaufung der folgenden Glieder $\beta_{28}, \beta_{29}, \beta_{30}, \beta_{31}, \cdots$ bloss noch tieferen β's begegnen. *Oder endlich*, er wird auf eine *unerschöpfliche* Menge von *höheren* β's stossen, der Art, dass die Begegnung mit höheren β's niemals aufhört, wie weit er auch nach Rechts hin fortgehen mag. Diese drei Fälle lassen sich *so* charakterisiren:

(7a) Erster Fall: Es existiren *gar keine höheren* β's; so dass also die ganze Reihe

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \cdots, \textit{in inf.}$$

lediglich aus *tieferen* β's besteht.

(7b) Zweiter Fall: Die *höheren* β's bilden in der Anordnung, wie sie in der Reihe (6) von Links nach Rechts aufeinanderfolgen, eine *endliche* Reihe:

$$\beta_{g_1}, \beta_{g_2}, \beta_{g_3}, \cdots \beta_G,$$

wo $g_1 < g_2 < g_3 < \cdots < G$ ist, und G eine bestimmte *endliche* Zahl vorstellt. Alsdann wird also die auf β_G folgende Reihe:

$$\beta_{G+1}, \beta_{G+2}, \cdots \textit{in inf.}$$

lediglich aus *tieferen* β's bestehen.

(7c) Dritter Fall: Die *höheren* β's bilden, wie sie in der Reihe (6) von Links nach Rechts aufeinander folgen, eine sich *ins Unendliche* erstreckende Reihe:

$$\beta_{g_1}, \beta_{g_2}, \beta_{g_3}, \cdots \textit{in infinitum},$$

wo alsdann $g_1 < g_2 < g_3 < \cdots$ positive ganze Zahlen vorstellen, die *ins Unendliche wachsen.*

Dies sind offenbar die einzig möglichen Fälle. Ist man also z. B. nachzuweisen im Stande, dass der *dritte* Fall *nicht* eintreten kann, so muss nothwendiger Weise der *erste* oder *zweite* Fall vorhanden sein. Einen solchen Nachweis werden wir nun in der That führen, und zwar mittelst eines apagogischen Verfahrens, indem wir zeigen, dass die Annahme des *dritten* Falles zu *absurden* Resultaten hinleitet, dass mithin dieser dritte Fall unmöglich ist. Dieser Disposition entsprechend ist unser Verfahren folgendes:

Wir nehmen an, der *dritte* Fall sei vorhanden, d. h. die Reihe der *höheren* β's:

(8) $\beta_{g_1}, \beta_{g_2}, \beta_{g_3}, \cdots$ erstrecke sich *in infinitum.*

Die $g_1, g_2, g_3, \cdots$ repräsentiren alsdann eine Reihe *ganzer Zahlen*, von denen jede kleiner ist als die nächstfolgende, und zwar eine Reihe, die sich ebenfalls *in infinitum* erstreckt. Unter diesen ganzen Zahlen $g_1, g_2, g_3, \cdots$ sei nun, beim Fortgange von Links nach Rechts, h_1 die erste, welche $\geqq 8h_0$ ist, sodann sei bei weiterem Fortgang h_2 die erste, welche $\geqq 8^2 h_1$ ist, sodann sei weiter h_3 die erste, welche $\geqq 8^3 h_2$ ist. U. s. w. Dabei soll h_0 die in (5) besprochene Constante vorstellen. Wir haben alsdann die Formeln:

$$(9) \qquad h_1 \geqq 8h_0, \quad h_2 \geqq 8^2 h_1, \quad h_3 \geqq 8^3 h_2, \quad \text{etc. etc.}$$

Hieraus folgt sofort:

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\frac{h_0}{h_1} = \frac{\vartheta_1}{8}, \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{\vartheta_2}{8^2}, \quad \frac{h_2}{h_3} = \frac{\vartheta_3}{8^3}, \quad \text{etc. etc.} \\ &\frac{h_n}{h_{n+1}} = \frac{\vartheta_{n+1}}{8^{n+1}}, \quad \frac{h_{n+1}}{h_{n+2}} = \frac{\vartheta_{n+2}}{8^{n+}}, \quad \text{etc. etc.,} \end{aligned}$$

wo sämmtliche ϑ *positive ächte Brüche* vorstellen. Denn nach (5) ist h_0 *positiv*; und Gleiches gilt daher auch von $h_1, h_2, h_3, \cdots$ Aus den Formeln (10) folgt nun weiter durch Multiplication:

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\frac{h_0}{h_1} = \frac{\vartheta_1}{8}, \quad \frac{h_0}{h_2} = \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{8.8^2}, \quad \frac{h_0}{h_3} = \frac{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}{8.8^2.8^3}, \quad \text{etc. etc.,} \\ &\frac{h_n}{h_{n+1}} = \frac{\vartheta_{n+1}}{8^{n+1}}, \quad \frac{h_n}{h_{n+2}} = \frac{\vartheta_{n+1}\vartheta_{n+2}}{8^{n+1}8^{n+2}}, \quad \frac{h_n}{h_{n+3}} = \frac{\vartheta_{n+1}\vartheta_{n+2}\vartheta_{n+3}}{8^{n+1}8^{n+2}8^{n+3}}, \quad \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Ferner folgt aus (11):

$$(12) \qquad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \cdots = \frac{1}{h_0}\left(\frac{\vartheta_1}{8} + \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{8.8^2} + \frac{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}{8.8^2.8^3} + \cdots\right).$$

Nachdem in solcher Weise, in Anlehnung an das gewählte ε, die $g_1, g_2, g_3, \cdots$ und $h_1, h_2, h_3, \cdots$ und ebenso auch die ϑ's in völlig bestimmter Weise definirt sind, wollen wir nun an die $h_1, h_2, h_3, \cdots$ eine neue Constantenreihe $j_1, j_2, j_3, \cdots$ sich anlehnen lassen. Während aber $g_1, g_2, g_3, \cdots$ und $h_1, h_2, h_3, \cdots$ lauter positive ganze Zahlen sind, sollen $j_1, j_2, j_3, \cdots$ diesen Charakter *nicht* mehr besitzen, vielmehr der Constantenreihe (3):

$$(13) \qquad \cdots (S-2), \ (S-1), \ S, \ (S+1), \ (S+2), \cdots$$

angehören. Und zwar sei, beim Fortgange von Links nach Rechts, j_1 die erste dieser Constanten (13), welche $\geqq j_0 \frac{h_1}{h_0}$ ist; sodann sei bei weiterem Fortgange j_2 die erste dieser Constanten, welche $\geqq j_1 \frac{h_2}{h_1}$ ist. Sodann sei weiter j_3 die erste derselben, welche $\geqq j_2 \frac{h_3}{h_2}$ ist. U. s. w. Dabei soll das j_0 die früher besprochene Bedeutung (5) besitzen. Alsdann ergiebt sich z. B., was j_1 betrifft, die Formel:

$$(j_1 - 1) < j_0 \frac{h_1}{h_0} \leqq j_1.$$

Hieraus folgt:

$$-1 < \left(j_0 \frac{h_1}{h_0} - j_1\right) \leqq 0,$$

oder, falls man mit (-1) multiplicirt:

$$1 > \left(j_1 - j_0 \frac{h_1}{h_0}\right) \geqq 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$j_1 - j_0 \frac{h_1}{h_0} = \Theta_1,$$

wo Θ_1 einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Dividirt man die letzte Formel durch h_1, so erhält man die erste Gleichung des folgenden Systems:

$$(14) \qquad \begin{gathered} \frac{j_1}{h_1} - \frac{j_0}{h_0} = \frac{\Theta_1}{h_1}, \\ \frac{j_2}{h_2} - \frac{j_1}{h_1} = \frac{\Theta_2}{h_2}, \\ \text{etc. etc.} \\ \frac{j_n}{h_n} - \frac{j_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{\Theta_n}{h_n}, \\ \text{etc. etc.,} \end{gathered}$$

dessen übrige Gleichungen sich in analoger Weise ergeben. Dabei sind sämmtliche Θ *positive ächte Brüche.* Aus (14) folgt durch Addition:

$$(15) \qquad \frac{j_n}{h_n} - \frac{j_0}{h_0} = \frac{\Theta_1}{h_1} + \frac{\Theta_2}{h_2} + \cdots + \frac{\Theta_n}{h_n}.$$

Die Reihe rechts convergirt für $n = \infty$ gegen eine *bestimmte feste Grenze*, wie solches aus (12) ersichtlich ist. Demgemäss gilt Gleiches auch von dem links stehenden Quotienten $\frac{j_n}{h_n}$. Bezeichnet man aber die *feste Grenze*, gegen welche dieser Quotient bei wachsendem n convergirt, mit Ω:

$$(16) \qquad \Omega = \lim_{n=\infty} \frac{j_n}{h_n},$$

so ergiebt sich aus (15):

$$(17) \quad \Omega - \frac{j_0}{h_0} = \frac{\Theta_1}{h_1} + \frac{\Theta_2}{h_2} + \cdots + \frac{\Theta_n}{h_n} + \frac{\Theta_{n+1}}{h_{n+1}} + \cdots \textit{ in inf.}$$

Nunmehr folgt aus (15), (17) durch Subtraction, und falls man zugleich mit h_n multiplicirt:

$$h_n \Omega - j_n = \Theta_{n+1} \frac{h_n}{h_{n+1}} + \Theta_{n+2} \frac{h_n}{h_{n+2}} + \Theta_{n+3} \frac{h_n}{h_{n+3}} + \cdots \textit{ in inf.},$$

oder, mit Rücksicht auf (11):

$$h_n\Omega - j_n = \Theta_{n+1}\frac{\vartheta^{n+1}}{8^{n+1}} + \Theta_{n+2}\frac{\vartheta_{n+1}\vartheta_{n+2}}{8^{n+1}.8^{n+2}} + $$
$$+ \Theta_{n+3}\frac{\vartheta_{n+1}\vartheta_{n+2}\vartheta_{n+3}}{8^{n+1}.8^{n+2}.8^{n+3}} + \cdots \textit{ in inf.}$$

Und hieraus endlich folgt sofort:

(18) $$\lim_{n=\infty}(h_n\Omega - j_n) = 0.$$

Nachdem in solcher Weise in Anlehnung an das gewählte ε die Constanten g, h, j, Ω, wie auch die ϑ, Θ in ganz bestimmter Weise gebildet, und einige Eigenschaften dieser Constanten durch Formeln ausgedrückt sind, kehren wir zurück zu den ursprünglich gegebenen Constanten β. Diese β sind nach (4) von solcher Beschaffenheit, dass für *jedwedes* x die Formel stattfindet:

(19) $$\lim_{n=\infty}\beta_n f(nx) = 0.$$

Es wird also z. B. diese Formel auch dann stattfinden, wenn man $x = \Omega L$ setzt; so dass man also erhält:

(20) $$\lim_{n=\infty}\beta_n f(n\Omega L) = 0.$$

Nun können wir z. B. das n in *der* Art unendlich werden lassen, dass wir dasselbe successive $= h_1, h_2, h_3, \cdots$ machen; denn die $h_1, h_2, h_3, \cdots$ sind ins Unendliche aufsteigende positive ganze Zahlen, wie solches aus ihrer Definition sich ergiebt. Somit erhalten wir:

$$\lim_{n=\infty}\beta_{h_n} f(h_n\Omega L) = 0,$$

oder, was identisch dasselbe ist:

(21) $$\lim_{n=\infty}\beta_{h_n} f(j_n L + [h_n\Omega - j_n]\, L) = 0.$$

Bezeichnet man nun für den Augenblick jede von n abhängende Grösse, die bei unendlich wachsendem n gegen 0 convergirt, mit ξ_n resp. mit ψ_n, χ_n, so ist nach (18):

$$h_n\Omega - j_n = \xi_n,$$

und folglich nach (21):

(22) $$\beta_{h_n} f(j_n L + \xi_n L) = \psi_n.$$

Die j_n gehören sämmtlich zur Reihe (3), unterscheiden sich also von der gegebenen Constante S nur durch *ganze* Zahlen. Demgemäss ist z. B.:

$$j_n L = (S + J_n)\, L = SL + J_n L,$$

wo J_n eine *ganze* Zahl vorstellt. Substituirt man aber diesen Werth von $j_n L$ in (22), und beachtet, dass die Constante L die Periodenlänge der Function $f(x)$ bezeichnet, dass mithin für jedwedes x die Formel stattfindet: $f(x + J_n L) = f(x)$, so erhält man:

(23) $$\beta_{h_n} f(SL + \xi_n L) = \psi_n.$$

Nun ist aber nach (2a)

$$f(SL) = B,$$

wo B eine von 0 verschiedene Constante vorstellt. Auch ist $f(x)$ nach unserer Voraussetzung eine *stetige* Function, mithin:

$$f(SL + \xi_n L) = B + \chi_n.$$

Dies in (23) substituirt, ergiebt sich:

$$(24) \qquad \beta_{h_n}(B + \chi_n) = \psi_n,$$

wo ψ_n und χ_n Grössen vorstellen, die mit unendlich wachsendem n gegen 0 convergiren, während B eine feste und von 0 verschiedene Constante bezeichnet. Demgemäss folgt aus der Formel (24) sofort, dass die Grösse β_{h_n} bei unendlich wachsendem n ebenfalls gegen 0 convergirt; sodass man also die Formel erhält:

$$(25) \qquad \lim_{n=\infty} \beta_{h_n} = 0.$$

Diese Formel (25) sagt aus, dass die $\beta_{h_1}, \beta_{h_2}, \beta_{h_3}, \cdots$, bei weiterem Fortgange, sich *in infinitum* der 0 nähern, und dass es also z. B. unter diesen β_h auch solche geben muss, die ihrem absoluten Betrage nach *kleiner* sind als das von uns zu Anfang gewählte ε. Die β_h sind aber nur Individua aus der Classe der β_g.*) Wir kommen demgemäss also zu dem Resultat, dass in dieser Classe der β_g gewisse Individua vorhanden sein müssen, die ihrem absoluten Betrage nach *kleiner* als jenes ε sind.

Dies Resultat aber ist *absurd*. Denn wir sind ausgegangen von der Voraussetzung des *dritten* Falles (7c); und die β_g sollten also, zufolge ihrer dortigen Definition, dem absoluten Betrage nach durchweg *grösser* als jenes ε sein.

So sehen wir also, dass die Annahme des *dritten* Falles (7c) zu einem *Absurdum* hinleitet, dass mithin dieser dritte Fall *unmöglich* ist. Es bleiben also als möglich nur übrig der *erste* und *zweite* Fall. Und wir gelangen daher mit Rücksicht auf die in (7a, b) gegebene Charakterisirung dieser beiden Fälle zu folgendem Resultat:

Ist ε ein *ad libitum* gewählter Kleinheitsgrad, und denkt man sich mit Rücksicht auf dieses ε die gegebenen Constanten

$$(26) \qquad \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \cdots \textit{ in inf.}$$

eingetheilt in die *höheren* und *tieferen* β's, so wird sich stets eine *endliche* positive ganze Zahl N angeben lassen von solcher Beschaffenheit, dass die Grössen

---

*) Die $h_1, h_2, h_3, \ldots$ sind nämlich nach ihrer Definition bestimmte Individuen aus der Reihe $g_1, g_2, g_3, \ldots$. Und dementsprechend sind also auch die $\beta_{h_1}, \beta_{h_2}, \beta_{h_3}, \ldots$ zu bezeichnen als Individua aus der Reihe $\beta_{g_1}, \beta_{g_2}, \beta_{g_3}, \ldots$.

(26a) $$\beta_N,\ \beta_{N+1},\ \beta_{N+2},\ \beta_{N+3},\ \cdots \textit{ in inf.}$$
durchweg zu den *tieferen* β's gehören*).

Oder genauer ausgedrückt: *Es wird sich, falls ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad vorstellt, stets eine endliche positive ganze Zahl N angeben lassen, von solcher Beschaffenheit dass die Constanten* (26a) *ihrem absoluten Betrage nach durchweg $\leq \varepsilon$ sind.* Demgemäss sehen wir also, dass die ursprünglich gegebenen Constanten (26) der Formel entsprechen
$$\lim_{n=\infty} \beta_n = 0,$$
und gelangen daher zu folgendem Theorem:

Theorem. — *Versteht man unter $f(x)$ eine beliebig gegebene Function, welche stetig und periodisch ist, ferner unter*
$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \cdots \textit{ in inf.}$$
beliebig gegebene Constanten, und ist bekannt, dass für jedwedes x die Formel stattfindet:

(27) $$\lim_{n=\infty} \beta_n f_n(x) = 0,$$
so folgt hieraus mit Nothwendigkeit, dass

(28) $$\lim_{n=\infty} \beta_n \textit{ ebenfalls } = 0 \textit{ ist.}$$

Die in diesem Satz gemachte Voraussetzung, dass die Formel (27) stattfinden solle für *jedwedes* x, ist für die Gültigkeit des Satzes nicht in vollem Umfange erforderlich. In der That lässt sich zeigen, dass der soeben ausgesprochene Satz auch dann noch in Kraft bleibt wenn die Formel (27) nur erfüllt ist für *solche* x, die (geometrisch ausgedrückt) ein kleines Linienstück stetig erfüllen. In der That gilt folgendes

Allgemeineres Theorem. — *Versteht man unter $f(x)$ eine beliebig gegebene Function, welche stetig und periodisch ist, ferner unter*
$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \cdots \textit{ in inf.}$$
beliebig gegebene Constanten, endlich unter $x_1 < x_2$ ebenfalls zwei beliebig gegebene Constanten, und ist bekannt, dass die Formel

(29) $$\lim_{n=\infty} \beta_n f(nx) = 0$$
stattfindet für jedwedes der Bedingung $x_1 < x < x_2$ entsprechende x, so folgt hieraus mit Nothwendigkeit, dass

(30) $$\lim_{n=\infty} \beta_n \textit{ ebenfalls } = 0 \textit{ ist.}$$

Der Beweis dieses Satzes lässt sich in genau derselben Weise führen, wie der des vorhergehenden Satzes (27), (28); nur mit dem einen Unterschiede, dass in diesem Fall die Constanten h_0 und j_0 nicht

*) Diese Zahl N ist nämlich $= 1$ im Falle (7a), anderseits $= (G + 1)$ im Falle (7b), wo G die in (7b) angegebene Bedeutung besitzt.

mehr beliebig, sondern mit Rücksichtnahme auf die gegebenen Constanten x_1 und x_2 zu fixiren sind. Und zwar sind h_0 und j_0 in diesem Fall so zu wählen, dass den Gleichungen entsprochen wird:

$$(31)\qquad x_1 = L\,\frac{j_0 - 1}{h_0},\qquad x_2 = L\,\frac{j_0 + 1}{h_0},$$

woraus sich ergiebt:

$$(31\,\mathrm{a})\qquad h_0 = \frac{2L}{x_2 - x_1},\qquad j_0 = \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1}.$$

Dabei bezeichnet L, ebenso wie früher, die Periodenlänge der gegebenen Functionen $f(x)$, also eine gegebene *positive* Constante. Beiläufig zeigen die Formeln (31 a), dass von den so determinirten Constanten h_0 und j_0 *die erstere positiv und* > 0 *ist.* Denn L ist positiv, und $x_2 - x_1$ ebenfalls, weil nach der in unserem Satze gemachten Voraussetzung $x_1 < x_2$ sein soll.

Wiederholt man nun, nach Festsetzung dieser Constanten h_0 und j_0, Schritt für Schritt genau dieselben Betrachtungen wie vorhin, so erhält man genau dieselben Formeln wie damals, bis zur Formel (19). Der Uebergang aber von (19) zu (20) ist offenbar im gegenwärtigen Falle nicht mehr erlaubt, oder bedarf wenigstens noch einer besonderen Motivirung. Um näher hierauf einzugehen, wiederholen wir zunächst die Formel (17):

$$\Omega - \frac{j_0}{h_0} = \frac{\Theta_1}{h_1} + \frac{\Theta_2}{h_2} + \frac{\Theta_3}{h_3} + \cdots \textit{ in inf.}$$

Wir können dieselbe auch so schreiben:

$$h_0\Omega - j_0 = \Theta_1\,\frac{h_0}{h_1} + \Theta_2\,\frac{h_0}{h_2} + \Theta_3\,\frac{h_0}{h_3} + \cdots \textit{ in inf.}$$

oder, mit Rücksicht auf (11) auch so:

$$h_0\Omega - j_0 = \Theta_1\,\frac{\vartheta_1}{8} + \Theta_2\,\frac{\vartheta_1\vartheta_2}{8.8^2} + \Theta_3\,\frac{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}{8.8^2.8^3} + \cdots \textit{ in inf.}$$

Hieraus aber folgt, weil die ϑ, Θ lauter positive ächte Brüche sind, sofort:

$$\operatorname{abs}(h_0\Omega - j_0) < \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \cdots + \textit{in inf.}\right);$$

diese Formel kann man auch *so* schreiben: $\operatorname{abs}(h_0\Omega - j_0) < \frac{1}{7}$. Folglich ist *a fortiori:*

$$\operatorname{abs}(h_0\Omega - j_0) < 1.$$

Hieraus folgt weiter:

$$-1 < (h_0\Omega - j_0) < 1,$$

oder was dasselbe ist:

$$j_0 - 1 < h_0 \Omega < j_0 + 1,$$

oder, falls man mit $\frac{L}{h_0}$ multiplicirt, und dabei beachtet, dass L und h_0 beide *positiv* sind:

$$\frac{(j_0 - 1) L}{h_0} < \Omega L < \frac{(j_0 + 1) L}{h_0},$$

also mit Rücksicht auf (31):

$$(32) \qquad x_1 < \Omega L < x_2.$$

Nun soll aber für *jedwedes* der Bedingung $x_1 < x < x_2$ entsprechende x die Formel (29) stattfinden. Und es wird daher diese Formel, wie aus (32) folgt, z. B. auch stattfinden für den Specialwerth $x = \Omega L$. Demgemäss ergiebt sich:

$$(33) \qquad \lim_{n=\infty} \beta_n f(n \Omega L) = 0.$$

Demgemäss ist also die Richtigkeit jener früheren Formel (20) S. 411 im gegenwärtigen Falle ebenfalls constatirt. Und wir übersehen nun sofort, dass von (20) aus all' unsere früheren Betrachtungen S. 411 — 413 in völlig ungeänderter Weise von Neuem wiederholt werden können, und dass man in solcher Art zu dem Beweise des zuletzt aufgestellten *allgemeineren* Theorems (29), (30) hingelangt. *Q.e.d.*

Leipzig, 25. April 1883.

Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind.

Von

A. Krazer in Würzburg.

Die von meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Prym*) eingeführte, durch Verallgemeinerung der Riemann'schen p-fach unendlichen Thetareihe gewonnene allgemeinere Reihe:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (m_\mu + g_\mu)(v_\mu + h_\mu \pi i)},$$

in welcher die g, h beliebige Constanten bezeichnen, ändert sich, den Gleichungen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\nu + 1 \dots g_p \\ h_1 \dots \;\; h_\nu \;\; \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\nu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\nu \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p),$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots \;\; g_\nu \;\; \dots g_p \\ h_1 \dots h_\nu + 1 \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\nu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\nu \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p)\, e^{2 g_\nu \pi i}$$

gemäss, stets nur um einen constanten Factor, wenn man die Grössen g, h um irgend welche ganze Zahlen ändert. Beschränkt man daher die Werthe der Grössen g, h auf rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner r, so existiren, wenn man von constanten Factoren, die in diesem Falle immer r^{te} Einheitswurzeln sind, absieht, im Ganzen nur r^{2p} verschiedene Functionen; man erhält dieselben, wenn man für $\nu = 1, 2, \dots, p$:

$$g_\nu = \frac{\alpha_\nu}{r}, \qquad h_\nu = \frac{\beta_\nu}{r}$$

setzt und dann an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben α, β die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, die Relationen aufzusuchen, welche zwischen diesen r^{2p} auf

---

*) Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882, Teubner; pag. 25.

dieselben Argumente v bezogenen Thetafunctionen bestehen. Dieses Problem ist bei beliebigem p bis jetzt nur für den Fall $r = 2$ behandelt, für $p = 1$ dagegen haben die Herren Thomae*), Klein**) und Bianchi***) auch die Fälle 3, 5, 7, ... in den Kreis der Betrachtung gezogen, ohne jedoch speciell das soeben erwähnte Ziel zu verfolgen. In der vorliegenden Arbeit, die ihre Entstehung den im persönlichen Verkehre mit Herrn Prof. Klein gewonnenen Anregungen verdankt, habe ich für den einfachsten dieser Fälle, nämlich für $p = 1$, $r = 3$, die gestellte Aufgabe behandelt und zu einem gewissen Abschlusse gebracht. Auf die bei dieser Untersuchung erzielten, verhältnissmässig einfachen Resultate möchte ich aber weniger Gewicht legen, als auf die dabei befolgte, durch die Anwendung einer einzigen Hauptformel charakterisirte Methode, die auch im allgemeinen Falle geeignet sein dürfte, die Lösung des gestellten Problems zu ermöglichen.

1.

Die unendliche Reihe:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right](v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a\left(m+\frac{\alpha}{3}\right)^2 + 2\left(m+\frac{\alpha}{3}\right)\left(v+\frac{\alpha'}{3}\pi i\right)},$$

bei der α, α' ganze Zahlen bedeuten, a eine beliebige complexe Constante mit wesentlich negativem reellem Theile ist, stellt eine einwerthige und für endliche Werthe von v auch stetige Function der complexen Veränderlichen v dar, welche den Gleichungen:

$$(1) \qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right](v+\pi i) = e^{\frac{2}{3}\alpha\pi i}\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right](v),$$

$$(2) \qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right](v+a) = e^{-\frac{2}{3}\alpha'\pi i}\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right](v)\,e^{-2v-a},$$

$$(3) \qquad 4\,\frac{\partial\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right](v)}{\partial a} = \frac{\partial^2\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right](v)}{\partial v^2}$$

genügt. Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche Werthe

---

*) Thomae, Darstellung des Quotienten zweier Thetafunctionen, deren Argumente sich um Drittel der Periodicitätsmodulen unterscheiden, durch algebraische Functionen. Math. Annalen Bd. VI, pag. 603.

**) Klein, Ueber die unendlich vielen Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung. Math. Annalen Bd. XVII, pag. 133, und: Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function. Math. Annalen Bd. XVII, pag. 565.

***) Bianchi, Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung. Math. Annalen Bd. XVII, pag. 234.

von v auch stetige Function der complexen Veränderlichen v die Gleichungen (1), (2), so kann sie sich von der Function $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}(v)$ nur um einen von v freien Factor unterscheiden; erfüllt sie ausserdem noch die Gleichung (3), so ist dieser Factor auch von a unabhängig.

Aus der die Function $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}(v)$ darstellenden Reihe lassen sich ohne Mühe folgende Gleichungen ableiten:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\pm 3\\\alpha'\end{bmatrix}(v) = \vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}(v), \tag{4}$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\pm 3\end{bmatrix}(v) = e^{\pm\frac{2}{3}\alpha\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}(v), \tag{5}$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}(-v) = \vartheta\begin{bmatrix}-\alpha\\-\alpha'\end{bmatrix}(v). \tag{6}$$

Der Zahlencomplex $\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}$ soll die zur Function $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}(v)$ gehörige Charakteristik genannt werden. Die Gleichungen (4), (5) zeigen dann, dass jede Function $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}(v)$ unter Ausscheidung eines Factors, der immer eine dritte Einheitswurzel ist, auf eine der folgenden neun:

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}(v),$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}(v)$$

reducirt werden kann, bei denen die Charakteristiken nur aus den Zahlen $0, 1, -1$ als Elementen gebildet werden. Die neun bei diesen Functionen auftretenden Charakteristiken sollen Normalcharakteristiken genannt werden. Die Gleichung (6) zeigt dann weiter, dass von diesen neun Functionen eine, nämlich $\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(v)$, eine gerade Function ist, die anderen acht aber paarweise in einander übergehen, wenn man das Argument v in $-v$ verwandelt.

Ferner ergiebt sich noch, wenn man das System $v + \frac{\varkappa}{3}a + \frac{\varkappa'}{3}\pi i$, bei dem $\varkappa$, $\varkappa'$ ganze Zahlen bedeuten sollen, symbolisch mit $v + \left|\begin{matrix}\varkappa\\\varkappa'\end{matrix}\right|$ bezeichnet, die im Späteren wiederholt zur Anwendung kommende Relation:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}\left(v + \left|\begin{matrix}\varkappa\\\varkappa'\end{matrix}\right|\right) = \vartheta\begin{bmatrix}\alpha+\varkappa\\\alpha'+\varkappa'\end{bmatrix}(v)\, e^{-\frac{\varkappa^2}{9}a - \frac{2}{3}\varkappa\left(v + \frac{\alpha'}{3}\pi i + \frac{\varkappa'}{3}\pi i\right)}. \tag{7}$$

Setzt man in dieser Formel, indem man unter λ, λ' ganze Zahlen versteht, $\varkappa = 3\lambda$, $\varkappa' = 3\lambda'$ und wendet die Gleichungen (4), (5) an, so erhält man die Relation:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}\left(v + \left|\begin{matrix}3\lambda\\3\lambda'\end{matrix}\right|\right) = \vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}(v)\, e^{-\lambda^2 a - 2\lambda v + \frac{2}{3}(\alpha\lambda' - \lambda\alpha')\pi i}. \tag{8}$$

Die Gleichung (7) zeigt, dass man aus jeder ϑ-Function durch Aenderung des Argumentes um Drittel der Perioden und Hinzufügung

einer Exponentialgrösse jede andere erzeugen kann. Setzt man in der Gleichung (7) $\alpha = \alpha' = 0$ und bezeichnet die keiner Bedingung unterworfenen ganzen Zahlen $\varkappa, \varkappa'$ in neuer Bezeichnung mit α, α', so entsteht die Formel:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right](v) = \vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right]\left(v + \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right|\right) e^{\frac{\alpha^2}{9}a + \frac{2}{3}\alpha\left(v + \frac{\alpha'}{3}\pi i\right)},$$

vermittelst deren man eine beliebige Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right](v)$ aus der speciellen Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right](v)$ erzeugen kann.

2.

Der weiteren Untersuchung sollen einige Bemerkungen über die Charakteristiken der Thetafunctionen vorausgeschickt werden. Als allgemeine Zeichen für Charakteristiken mögen die Symbole:

$$\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}\beta\\ \beta'\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma'\end{smallmatrix}\right],\ \ldots$$

oder, wenn kein Missverständniss zu befürchten, entsprechend die einfacheren $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, ... dienen; auch soll eine Charakteristik von der Form $\left[\begin{smallmatrix}-\alpha\\ -\alpha'\end{smallmatrix}\right]$ abgekürzt durch $[-\alpha]$, die Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right]$ durch $[0]$ bezeichnet werden. Zwei Charakteristiken $[\alpha] = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right]$ und $[\beta] = \left[\begin{smallmatrix}\beta\\ \beta'\end{smallmatrix}\right]$ sollen congruent genannt werden, $[\alpha] \equiv [\beta]$, wenn $\alpha \equiv \beta$ (mod. 3), $\alpha' \equiv \beta'$ (mod. 3) ist. Die Charakteristik $[\alpha + \beta] = \left[\begin{smallmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha'+\beta'\end{smallmatrix}\right]$ soll die Summe, die Charakteristik $[\alpha - \beta] = \left[\begin{smallmatrix}\alpha-\beta\\ \alpha'-\beta'\end{smallmatrix}\right]$ die Differenz der Charakteristiken $[\alpha] = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right]$ und $[\beta] = \left[\begin{smallmatrix}\beta\\ \beta'\end{smallmatrix}\right]$ genannt werden, sodass die Gleichungen $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$, $[\alpha] - [\beta] = [\alpha - \beta]$ bestehen.

Die neun, schon in Art. 1 definirten Normalcharakteristiken können, wenn man die Charakteristik $[0]$ noch hinzunimmt, aus den Charakteristiken $[\alpha] = \left[\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right]$ und $[\beta] = \left[\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right]$ auf Grund des Schemas:

$$[0],\ [\alpha],\ [-\alpha],\ [\beta],\ [\beta+\alpha],\ [\beta-\alpha],\ [-\beta],\ [-\beta+\alpha],\ [-\beta-\alpha]$$

erzeugt werden. Die Reihenfolge:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\ \left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right], & \left[\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right], & \left[\begin{smallmatrix}-1\\ 0\end{smallmatrix}\right], & \left[\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right], & \left[\begin{smallmatrix}1\\ 1\end{smallmatrix}\right], & \left[\begin{smallmatrix}-1\\ 1\end{smallmatrix}\right], & \left[\begin{smallmatrix}0\\ -1\end{smallmatrix}\right], & \left[\begin{smallmatrix}1\\ -1\end{smallmatrix}\right], & \left[\begin{smallmatrix}-1\\ -1\end{smallmatrix}\right], \end{array}$$

in welcher sie bei dieser Erzeugung auftreten, soll die *natürliche* genannt werden. Bezeichnet man dann eine jede Normalcharakteristik mit der ihr bei dieser Anordnung zukommenden Stellenzahl, so kann man aus der folgenden Tabelle:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	1	5	6	4	8	9	7
3	1	2	6	4	5	9	7	8
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	4	8	9	7	2	3	1
6	4	5	9	7	8	3	1	2
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	7	2	3	1	5	6	4
9	7	8	3	1	2	6	4	5

zu je zwei Charakteristiken die ihrer Summe congruente Normalcharakteristik finden. Die Tabelle ist nämlich dadurch entstanden, dass allgemein in das der μ^{ten} Horizontalreihe und ν^{ten} Verticalreihe gemeinsam angehörende Quadrat die Stellenzahl derjenigen Charakteristik aufgenommen wurde, welche der Summe der beiden den Stellenzahlen μ und ν entsprechenden Charakteristiken congruent ist.

3.

In der Folge soll zur Abkürzung $e^{\frac{2}{3}\pi i} = \tau$ gesetzt werden; dann ist $\tau^3 = 1,\ 1 + \tau + \tau^2 = 0$. Setzt man dann weiter, indem man unter ε, ε' und η, η' die Elemente zweier beliebiger Charakteristiken $[\varepsilon]$ und $[\eta]$ versteht:

$$e^{\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i} = \tau^{|\varepsilon|}, \qquad e^{\frac{2}{3}(\varepsilon\eta' - \varepsilon'\eta)\pi i} = \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$$

— indem man sich vorbehält, bei dem letzten Symbole, sobald kein Missverständniss zu befürchten ist, die Charakteristikenklammern zu unterdrücken, also einfacher $\tau^{\varepsilon\,|\,\eta}$ statt $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ zu schreiben — so sind $\tau^{|\varepsilon|}$ und $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ gleichfalls dritte Einheitswurzeln, und es gelten für diese Symbole die folgenden Gesetze:

$$\tau^{|0|} = 1, \quad \tau^{|\varepsilon|} = \tau^{|-\varepsilon|}, \quad \tau^{[\varepsilon]\,|\,[0]} = 1, \quad \tau^{[0]\,|\,[\varepsilon]} = 1, \quad \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\varepsilon]} = 1,$$

$$\tau^{[\varepsilon]\,|\,[-\eta]} = \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} \,.\, \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}, \quad \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} = \tau^{[\eta]\,|\,[-\varepsilon]} = \tau^{[-\eta]\,|\,[\varepsilon]} = \tau^{[-\varepsilon]\,|\,[-\eta]},$$

$$\tau^{[\varepsilon+\zeta]\,|\,[\eta+\vartheta]} = \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} \,.\, \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\vartheta]} \,.\, \tau^{[\zeta]\,|\,[\eta]} \,.\, \tau^{[\zeta]\,|\,[\vartheta]}.$$

Dabei ist es nicht unwichtig, zu bemerken, dass der Werth der Ausdrücke $\tau^{|\varepsilon|}$ und $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ ungeändert bleibt, wenn man an Stelle der

Charakteristiken, auf die sie sich beziehen, irgend welche denselben congruente setzt.

Versteht man endlich, mit Rücksicht auf das Symbol $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$, unter $[\eta]$ eine der acht von $[0]$ verschiedenen Normalcharakteristiken und lässt dann an Stelle von $[\varepsilon]$ der Reihe nach die neun Normalcharakteristiken treten, so haben von den neun auf diese Weise aus $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ hervorgehenden Ausdrücken drei den Werth 1, drei den Werth τ, drei den Werth τ^2, und es findet speciell die Beziehung $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} = 1$ statt für $[\varepsilon] = [0]$, $[\eta]$, $[-\eta]$. Daraus folgt, dass die Summe $1 + \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} + \tau^{[\varepsilon]\,|\,[-\eta]}$ für die drei Charakteristiken $[\varepsilon] = [0]$, $[\eta]$, $[-\eta]$ den Werth 3, für die übrigen sechs Charakteristiken den Werth 0 besitzt.

4.

Das Problem, das im Folgenden gelöst werden soll, besteht darin, die wesentlichen Relationen, welche zwischen den neun Fundamentalfunctionen:

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}(v),$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}(v)$$

existiren, herzustellen und hinsichtlich ihrer gegenseitigen Beziehungen zu untersuchen. Alle diese verschiedenen Relationen können auf einfache Weise aus einer einzigen Fundamentalformel abgeleitet werden, die jetzt zunächst aufgestellt werden soll. Diese Formel geht als ganz specieller Fall aus einer von Herrn Prym aufgestellten allgemeinen Thetaformel*) auf folgende Weise hervor.

Es mögen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(6)}$ unabhängige Veränderliche bezeichnen, $u'^{(1)}, u'^{(2)}, \ldots, u'^{(6)}$ lineare Functionen derselben, welche durch das Gleichungensystem:

$$(J)\qquad \begin{aligned}
3u'^{(1)} &= -2u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(2)} &= u^{(1)} - 2u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(3)} &= u^{(1)} + u^{(2)} - 2u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(4)} &= u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} - 2u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(5)} &= u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} - 2u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(6)} &= u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} - 2u^{(6)},
\end{aligned}$$

definirt sind. Dieses Gleichungensystem ist ein involutorisches orthogonales, da aus ihm nicht nur

$$u'^{(1)^2} + u'^{(2)^2} + \cdots + u'^{(6)^2} = u^{(1)^2} + u^{(2)^2} + \cdots + u^{(6)^2}$$

---

*) Prym, a. a. O. Formel (9) pag. 44.

folgt, sondern in ihm auch unbeschadet der Richtigkeit die Grössen u mit den Grössen u' beziehlich vertauscht werden können. Führt man dann diese Grössen u, u' in die Prym'sche Thetaformel ein, nachdem man in derselben $p=1$, $n=6$, $r=3$ gesetzt hat, während die Bestimmung der Zahl s noch vorbehalten bleibt, so geht aus derselben, wenn man der in Art. 1 eingeführten Bezeichnung entsprechend in den Charakteristiken der Thetareihen den Nenner 3 allenthalben unterdrückt, die folgende specielle Formel hervor:

$$3^6 s\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u'^{(1)})\cdots\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u'^{(6)})=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,2}\vartheta\begin{bmatrix}\bar\alpha^{(1)}\\\bar\beta^{(1)}\end{bmatrix}(3u^{(1)})\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\bar\alpha^{(6)}\\\bar\beta^{(6)}\end{bmatrix}(3u^{(6)}).$$

In dieser Formel ist:

$$\begin{aligned}
\bar\alpha^{(1)} &= -2\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\alpha^{(3)}+\alpha^{(4)}+\alpha^{(5)}+\alpha^{(6)},\\
\bar\alpha^{(2)} &= \alpha^{(1)}-2\alpha^{(2)}+\alpha^{(3)}+\alpha^{(4)}+\alpha^{(5)}+\alpha^{(6)},\\
\bar\alpha^{(3)} &= \alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}-2\alpha^{(3)}+\alpha^{(4)}+\alpha^{(5)}+\alpha^{(6)},\\
\bar\alpha^{(4)} &= \alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\alpha^{(3)}-2\alpha^{(4)}+\alpha^{(5)}+\alpha^{(6)},\\
\bar\alpha^{(5)} &= \alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\alpha^{(3)}+\alpha^{(4)}-2\alpha^{(5)}+\alpha^{(6)},\\
\bar\alpha^{(6)} &= \alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\alpha^{(3)}+\alpha^{(4)}+\alpha^{(5)}-2\alpha^{(6)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar\beta^{(1)} &= -2\beta^{(1)}+\beta^{(2)}+\beta^{(3)}+\beta^{(4)}+\beta^{(5)}+\beta^{(6)},\\
\bar\beta^{(2)} &= \beta^{(1)}-2\beta^{(2)}+\beta^{(3)}+\beta^{(4)}+\beta^{(5)}+\beta^{(6)},\\
\bar\beta^{(3)} &= \beta^{(1)}+\beta^{(2)}-2\beta^{(3)}+\beta^{(4)}+\beta^{(5)}+\beta^{(6)},\\
\bar\beta^{(4)} &= \beta^{(1)}+\beta^{(2)}+\beta^{(3)}-2\beta^{(4)}+\beta^{(5)}+\beta^{(6)},\\
\bar\beta^{(5)} &= \beta^{(1)}+\beta^{(2)}+\beta^{(3)}+\beta^{(4)}-2\beta^{(5)}+\beta^{(6)},\\
\bar\beta^{(6)} &= \beta^{(1)}+\beta^{(2)}+\beta^{(3)}+\beta^{(4)}+\beta^{(5)}-2\beta^{(6)},
\end{aligned}$$

und die Summation auf der rechten Seite ist dann in der Weise auszuführen, dass jede der sechs Grössen α, wie jede der sechs Grössen β unabhängig von den anderen die Werthe 0, 1, 2 durchläuft; es bezeichnet weiter s die noch zu bestimmende Anzahl der nach dem Modul 3 incongruenten Lösungen des Congruenzensystems:

$$\begin{aligned}
-2x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}+x^{(4)}+x^{(5)}+x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)}-2x^{(2)}+x^{(3)}+x^{(4)}+x^{(5)}+x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)}+x^{(2)}-2x^{(3)}+x^{(4)}+x^{(5)}+x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}-2x^{(4)}+x^{(5)}+x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}+x^{(4)}-2x^{(5)}+x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}+x^{(4)}+x^{(5)}-2x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,
\end{aligned}$$

deren Elemente man sich immer auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul 3 reducirt denken kann.

Um den Werth der Zahl s zu bestimmen, berücksichtige man, dass die linken Seiten der soeben aufgestellten Congruenzen einander congruent sind nach dem Modul 3, und dass in Folge dessen die Lösungen des Congruenzensystems identisch sind mit den Lösungen einer einzigen der darin enthaltenen Congruenzen, oder, was auf dasdasselbe hinauskommt, mit den Lösungen der Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} + x^{(5)} + x^{(6)} \equiv 0 \pmod{3}.$$

Nun besitzt aber diese letzte Congruenz 3^5 nach dem Modul 3 incongruente Lösungen; man erhält dieselben, wenn man an Stelle des Systems der fünf Zahlen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(5)}$ alle Variationen der Elemente 0, 1, 2 zur fünften Classe mit Wiederholung treten lässt und jedesmal $x^{(6)}$ als 0, 1 oder 2 aus der Congruenz:

$$x^{(6)} \equiv -x^{(1)} - x^{(2)} - \cdots - x^{(5)} \pmod{3}$$

bestimmt; es ist demnach $s = 3^5$.

Die auf der rechten Seite der aufgestellten Thetaformel bei der Ausführung der Summation auftretenden 3^{12} Thetaproducte können mit Hülfe der Relationen (4), (5) des Art. 1 auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Setzt man nämlich:

$$\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} + \alpha^{(4)} + \alpha^{(5)} + \alpha^{(6)} = A,$$
$$\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \alpha^{(3)} + \beta^{(4)} + \beta^{(5)} + \beta^{(6)} = B,$$

so kann man die Grössen $\bar\alpha$, $\bar\beta$ in die Form:

$$\bar\alpha^{(1)} = A - 3\alpha^{(1)},\quad \bar\alpha^{(2)} = A - 3\alpha^{(2)}, \ldots, \bar\alpha^{(6)} = A - 3\alpha^{(6)},$$
$$\bar\beta^{(1)} = B - 3\beta^{(1)},\quad \bar\beta^{(2)} = B - 3\beta^{(2)}, \ldots, \bar\beta^{(6)} = B - 3\beta^{(6)},$$

bringen; es wird dann unter Anwendung der Relationen (4), (5) des Art. 1:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\bar\alpha^{(\nu)}\\ \bar\beta^{(\nu)}\end{bmatrix}(3u^{(\nu)}) = \vartheta\begin{bmatrix}A-3\alpha^{(\nu)}\\ B-3\beta^{(\nu)}\end{bmatrix}(3u^{(\nu)}) = \vartheta\begin{bmatrix}A\\ B-3\beta^{(\nu)}\end{bmatrix}(3u^{(\nu)})$$
$$= \vartheta\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}(3u^{(\nu)})\, e^{-\frac{2}{3}A\beta^{(\nu)}\pi i}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, 6$; entsprechend wird, da:

$$\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \cdots + \beta^{(6)} = B$$

ist:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\bar\alpha^{(1)}\\ \bar\beta^{(1)}\end{bmatrix}(3u^{(1)}) \ldots \vartheta\begin{bmatrix}\bar\alpha^{(6)}\\ \bar\beta^{(6)}\end{bmatrix}(3u^{(6)}) = \vartheta\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}(3u^{(1)}) \ldots \vartheta\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}(3u^{(6)})\, e^{-\frac{2}{3}AB\pi i},$$

und die obige Thetaformel nimmt auf Grund der letzten Gleichung, wenn man zugleich noch an Stelle von s den dafür gefundenen Werth 3^5 einführt, zunächst die Gestalt an:

$$3^{11}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](3u'^{(1)})\ldots\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](3u'^{(6)})=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,2}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right](3u^{(1)})\ldots\vartheta\left[\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right](3u^{(6)})e^{-\frac{2}{3}AB\pi i}.$$

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite dieser Formel angedeuteten Summation treten an Stelle von A, und ebenso, aber unabhängig davon an Stelle von B die 3^6 ganzen Zahlen, die aus:

$$x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}+x^{(4)}+x^{(5)}+x^{(6)}$$

hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der sechs Grössen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(6)}$ der Reihe nach sämmtliche Variationen der Elemente 0, 1, 2 zur sechsten Classe mit Wiederholung setzt. Berücksichtigt man nun, dass die Congruenz:

$$x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(6)}\equiv 0 \pmod{3},$$

wie oben angegeben, 3^5 nach dem Modul 3 incongruente Lösungen besitzt, dass aber auch eine jede der beiden Congruenzen:

$$x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(6)}\equiv 1 \pmod{3}$$

und:

$$x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(6)}\equiv -1 \pmod{3}$$

ebenfalls 3^5 nach dem Modul 3 incongruente Lösungen besitzt, welche in jedem Falle aus einer beliebigen unter ihnen erhalten werden können, indem man zu derselben der Reihe nach die 3^5 Lösungen der Congruenz $x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(6)}\equiv 0 \pmod{3}$ addirt und die dabei auftretenden Zahlen auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul 3 reducirt, so erkennt man, dass von den an Stelle von A, beziehlich B auftretenden 3^6 ganzen Zahlen 3^5 der Zahl 0, 3^5 der Zahl 1, endlich 3^5 der Zahl -1 nach dem Modul 3 congruent sind, und dass daher die Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right]$ bei der Ausführung der Summation 3^{10}-mal einer jeden der neun Normalcharakteristiken congruent wird. Nun ändert aber, wie die Formeln (4), (5) des Art. 1 zeigen, das auf der rechten Seite der obigen Thetaformel hinter dem Summenzeichen stehende Thetaproduct seinen Werth nicht, wenn man die Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right]$ durch eine ihr congruente ersetzt, und da auch die Exponentialgrösse $e^{-\frac{2}{3}AB\pi i}$ dadurch keine Aenderung erfährt, so kann man die in Rede stehende Summe von 3^{12} Gliedern durch das 3^{10}-fache derjenigen Summe ersetzen, die entsteht, wenn man in dem Ausdrucke:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{smallmatrix}\right](3u^{(1)})\ldots\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{smallmatrix}\right](3u^{(6)})\,e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}$$

an Stelle von $\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{smallmatrix}\right]$ der Reihe nach die neun Normalcharakteristiken treten lässt und die Summe der so entstehenden neun Terme bildet.

Dividirt man dann noch linke und rechte Seite der entstehenden Formel durch 3^{10}, so erhält man schliesslich die Formel:

$$(\Theta_0)\quad 3\,\vartheta\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0}(3u'^{(1)})\dots\vartheta\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0}(3u'^{(6)})=\sum_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varepsilon'}}\vartheta\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varepsilon'}(3u^{(1)})\dots\vartheta\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varepsilon'}(3u^{(6)})\,e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i},$$

wobei also die Summation auf der rechten Seite in der Weise auszuführen ist, dass an Stelle der Charakteristik $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varepsilon'}$ die sämmtlichen neun Normalcharakteristiken treten.

Lässt man in dieser Formel, indem man unter η, η' die Elemente einer beliebigen Charakteristik versteht:

$$u^{(1)} \text{ in } u^{(1)}+\begin{vmatrix}\eta\\ \eta'\end{vmatrix},\quad \text{also}\quad 3u^{(1)} \text{ in } 3u^{(1)}+\begin{vmatrix}3\eta\\ 3\eta'\end{vmatrix}$$

übergehen und berücksichtigt, dass dadurch:

$$3u'^{(1)},\qquad 3u'^{(2)},\qquad 3u'^{(3)},\quad \dots,\quad 3u'^{(6)}$$

beziehlich in:

$$3u'^{(1)}-\begin{vmatrix}2\eta\\ 2\eta'\end{vmatrix},\; 3u'^{(2)}+\begin{vmatrix}\eta\\ \eta'\end{vmatrix},\; 3u'^{(3)}+\begin{vmatrix}\eta\\ \eta'\end{vmatrix},\;\dots,\; 3u'^{(6)}+\begin{vmatrix}\eta\\ \eta'\end{vmatrix}$$

übergehen, so erhält man unter Anwendung der Formeln (7), (8) und (4), (5) des Art. 1 und Fortlassung eines beiden Seiten gemeinsamen Factors die weitere Formel:

$$(\Theta_0')\qquad 3\,\vartheta\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\eta}{\eta'}(3u'^{(1)})\dots\vartheta\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\eta}{\eta'}(3u'^{(6)})\,e^{-\frac{2}{3}\eta\eta'\pi i}$$
$$=\sum_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varepsilon'}}e^{\frac{2}{3}(\varepsilon\eta'-\varepsilon'\eta)\pi i}\,\vartheta\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varepsilon'}(3u^{(1)})\dots\vartheta\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varepsilon'}(3u^{(6)})\,e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}.$$

Aus der gewonnenen Formel erhält man jetzt die im Eingange dieses Artikels erwähnte allgemeine Formel auf folgende Weise. Man lasse:

$$3u^{(1)},\qquad 3u^{(2)},\qquad 3u^{(3)},\qquad 3u^{(4)},\qquad 3u^{(5)},\qquad 3u^{(6)}$$

beziehlich in:

$$3u^{(1)},\; 3u^{(2)}+\begin{vmatrix}\varrho\\ \varrho'\end{vmatrix},\; 3u^{(3)}-\begin{vmatrix}\varrho\\ \varrho'\end{vmatrix},\; 3u^{(4)}+\begin{vmatrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{vmatrix},\; 3u^{(5)}+\begin{vmatrix}\varkappa+\sigma\\ \varkappa'+\sigma'\end{vmatrix},\; 3u^{(6)}+\begin{vmatrix}\varkappa-\sigma\\ \varkappa'-\sigma'\end{vmatrix}$$

übergehen. Dadurch gehen:

$$3u'^{(1)},\qquad 3u'^{(2)},\qquad 3u'^{(3)}\qquad 3u'^{(4)},\qquad 3u'^{(5)},\qquad 3u'^{(6)}$$

beziehlich über in:

$$3u'^{(1)}+\begin{vmatrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{vmatrix},\; 3u'^{(2)}+\begin{vmatrix}\varkappa-\varrho\\ \varkappa'-\varrho'\end{vmatrix},\; 3u'^{(3)}+\begin{vmatrix}\varkappa+\varrho\\ \varkappa'+\varrho'\end{vmatrix},\; 3u'^{(4)},\; 3u'^{(5)}-\begin{vmatrix}\sigma\\ \sigma'\end{vmatrix},\; 3u'^{(6)}+\begin{vmatrix}\sigma\\ \sigma'\end{vmatrix},$$

und man erhält, indem man die so geänderten Argumente in die Formel (Θ_0') einführt und dann auf der rechten wie linken Seite die Formel (7) des Art. 1 anwendet, auch beide Seiten durch:

$$e^{-\frac{1}{9}(2\varrho^2+2\sigma^2+3\varkappa^2)a-2\varrho\left(u^{(2)}-u^{(3)}\right)-2\sigma\left(u^{(5)}-u^{(6)}\right)-2\varkappa\left(u^{(4)}+u^{(5)}+u^{(6)}\right)-\frac{4}{9}(\varrho\varrho'+\sigma\sigma')\pi i-\frac{4}{3}\varkappa\varkappa'\pi i}$$

dividirt und unter Anwendung der in Art. 3 eingeführten Symbole:

$$e^{-\frac{2}{3}\eta\eta'\pi i-\frac{2}{3}\varkappa\eta'\pi i+\frac{2}{3}\varkappa\varkappa'\pi i}=\tau^{|\eta|}\,.\,\tau^{|\eta+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa\,|\,\eta},$$

$$e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i-\frac{2}{3}\varkappa\varepsilon'\pi i+\frac{2}{3}\varkappa\varkappa'\pi i}=\tau^{|\varepsilon|}\,.\,\tau^{|\varepsilon+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa\,|\,\varepsilon},$$

setzt, die gewünschte allgemeine Formel in der Gestalt:

$$(\Theta)\quad 3\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\varkappa\\ \eta'+\varkappa'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(1)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\varkappa-\varrho\\ \eta'+\varkappa'-\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(2)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\varkappa+\varrho\\ \eta'+\varkappa'+\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(3)})$$

$$\times\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta\\ \eta'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(4)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta-\sigma\\ \eta'-\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(5)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(6)})\,\tau^{|\eta|}\,.\,\tau^{|\eta+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa\,|\,\eta}$$

$$=\sum_{\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right]}\tau^{\varepsilon\,|\,\eta}\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](3u^{(1)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varrho\\ \varepsilon'+\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u^{(2)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon-\varrho\\ \varepsilon'-\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u^{(3)})$$

$$\times\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varkappa\\ \varepsilon'+\varkappa'\end{smallmatrix}\right](3u^{(4)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varkappa+\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'+\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u^{(5)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varkappa-\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'-\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u^{(6)})\,\tau^{|\varepsilon|}\,.\,\tau^{|\varepsilon+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa\,|\,\varepsilon};$$

dieselbe umfasst, da $[\eta]$, $[\varkappa]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ ganz beliebige Charakteristiken bezeichnen, die Formeln (Θ_0) und (Θ_0') als specielle Fälle.

5.

Setzt man in der gewonnenen Fundamentalformel:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\varkappa\\ \eta'+\varkappa'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(1)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\varkappa-\varrho\\ \eta'+\varkappa'-\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(2)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\varkappa+\varrho\\ \eta'+\varkappa'+\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(3)})$$

$$\times\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta\\ \eta'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(4)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta-\sigma\\ \eta'-\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(5)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u'^{(6)})\,\tau^{|\eta|}\,.\,\tau^{|\eta+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa\,|\,\eta}=x'_{[\eta]},$$

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](3u^{(1)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varrho\\ \varepsilon'+\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u^{(2)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon-\varrho\\ \varepsilon'-\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u^{(3)})$$

$$\times\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varkappa\\ \varepsilon'+\varkappa'\end{smallmatrix}\right](3u^{(4)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varkappa+\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'+\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u^{(5)})\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varkappa-\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'-\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u^{(6)})\,\tau^{|\varepsilon|}\,.\,\tau^{|\varepsilon+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa|\varepsilon}=x_{[\varepsilon]},$$

so nimmt dieselbe die Gestalt:

$$(F)\qquad 3x'_{[\eta]}=\sum_{[\varepsilon]}\tau^{\varepsilon\,|\,\eta}\,x_{[\varepsilon]}$$

an. Lässt man in dieser Gleichung an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die sämmtlichen neun Normalcharakteristiken treten und denkt sich jedesmal die auf der rechten Seite stehende Summation ausgeführt, so erhält man ein System von neun Gleichungen, denen man auf folgende Weise eine übersichtliche Gestalt geben kann. Man bezeichne allgemein die auf irgend eine bestimmte Charakteristik $[\eta]$ bezogene Grösse $x'_{[\eta]}$ mit x'_μ, wenn μ die der Charakteristik $[\eta]$ in der natürlichen Reihenfolge zukommende Stellenzahl ist; in gleicher Weise die auf irgend eine Charakteristik $[\varepsilon]$ bezogene Grösse $x_{[\varepsilon]}$ mit x_ν, wenn ν

die Stellenzahl der Charakteristik $[\varepsilon]$ ist. Die erwähnten neun Gleichungen nehmen dann die Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
3x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9,\\
3x_2' &= x_1 + x_2 + x_3 + \tau^2 x_4 + \tau^2 x_5 + \tau^2 x_6 + \tau\, x_7 + \tau\, x_8 + \tau\, x_9,\\
3x_3' &= x_1 + x_2 + x_3 + \tau\, x_4 + \tau\, x_5 + \tau\, x_6 + \tau^2 x_7 + \tau^2 x_8 + \tau^2 x_9,\\
3x_4' &= x_1 + \tau\, x_2 + \tau^2 x_3 + x_4 + \tau\, x_5 + \tau^2 x_6 + x_7 + \tau\, x_8 + \tau^2 x_9,\\
3x_5' &= x_1 + \tau\, x_2 + \tau^2 x_3 + \tau^2 x_4 + x_5 + \tau\, x_6 + \tau\, x_7 + \tau^2 x_8 + x_9,\\
3x_6' &= x_1 + \tau\, x_2 + \tau^2 x_3 + \tau\, x_4 + \tau^2 x_5 + x_6 + \tau^2 x_7 + x_8 + \tau\, x_9,\\
3x_7' &= x_1 + \tau^2 x_2 + \tau\, x_3 + x_4 + \tau^2 x_5 + \tau\, x_6 + x_7 + \tau^2 x_8 + \tau\, x_9,\\
3x_8' &= x_1 + \tau^2 x_2 + \tau\, x_3 + \tau^2 x_4 + \tau\, x_5 + x_6 + \tau\, x_7 + x_8 + \tau^2 x_9,\\
3x_9' &= x_1 + \tau^2 x_2 + \tau\, x_3 + \tau\, x_4 + x_5 + \tau^2 x_6 + \tau^2 x_7 + \tau\, x_8 + x_9,
\end{aligned}
\tag{S}
$$

Das System dieser neun Gleichungen soll nun auf Grund der allgemeinen Gleichung (F) genauer untersucht werden, indem man zunächst ganz davon absieht, welche Bedeutung die x, x' ursprünglich haben, vielmehr darunter Grössen versteht, welche zwar den Gleichungen (S) genügen müssen, im Uebrigen aber keinerlei Beschränkungen unterworfen sind. Der Uebersichtlichkeit wegen möge es dabei gestattet sein, dieselbe Grösse $x'_{[\eta]}$ auch durch $x'_{[\zeta]}$, $x'_{[\vartheta]}$, zu bezeichnen, wenn nur die Charakteristiken $[\zeta]$, $[\vartheta]$, ... der Normalcharakteristik $[\eta]$ congruent sind. Diese Bestimmung kann auch aufrecht erhalten bleiben, wenn man wieder zu den ursprünglich mit $x'_{[\eta]}$, $x_{[\varepsilon]}$ bezeichneten Thetaproducten zurückkehrt, insofern als dieselben — wie die Relationen (4), (5) des Art. 1 zeigen — ihren Werth nicht ändern, wenn man die Charakteristiken $[\eta]$ und $[\varepsilon]$ durch irgend welche ihnen congruente ersetzt. Da nun, wie schon früher erwähnt, auch der Werth des Ausdruckes $\tau^{\varepsilon \mid \eta}$ ungeändert bleibt, wenn man an Stelle der Charakteristik $[\varepsilon]$ oder $[\eta]$ eine ihr congruente setzt, so können bei der erwähnten Untersuchung congruente Charakteristiken einander vertreten. Mit Rücksicht darauf sollen im Folgenden unter „verschiedenen" Charakteristiken nur solche verstanden werden, welche einander nicht congruent sind.

6.

Nach den gemachten Voraussetzungen gilt jetzt die Gleichung:

$$3x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} \tau^{\varepsilon \mid \eta} x_{[\varepsilon]} \tag{F}$$

für jede beliebige Charakteristik $[\eta]$. Lässt man nun in dieser Gleichung an Stelle von $[\eta]$ zuerst $[\eta + \alpha]$, sodann $[\eta - \alpha]$ treten, indem

man unter $[\alpha]$ eine beliebige von $[0]$ verschiedene Charakteristik versteht, multiplicirt auch die beiden dadurch aus (F) entstehenden Gleichungen beziehlich mit $\tau^{\alpha|\zeta}$ und $\tau^{\zeta|\alpha}$, wo $[\zeta]$ eine ganz beliebige Charakteristik bezeichnet, und addirt sie zu der ursprünglichen Gleichung (F), so erhält man unter Berücksichtigung der Relationen $\tau^{\alpha|\zeta} = \tau^{-\zeta|\alpha}$ und $\tau^{\zeta|\alpha} = \tau^{-\zeta|-\alpha}$ zunächst:

$$3\left\{x'_{[\eta]} + \tau^{\alpha|\zeta} x'_{[\eta+\alpha]} + \tau^{\zeta|\alpha} x'_{[\eta-\alpha]}\right\} = \sum_{[\varepsilon]} \tau^{\varepsilon|\eta}\left\{1 + \tau^{\varepsilon-\zeta|\alpha} + \tau^{\varepsilon-\zeta|-\alpha}\right\} x_{[\varepsilon]}.$$

Der auf der rechten Seite in besondere Klammern eingeschlossene Ausdruck hat aber nach dem in Art. 4 Bemerkten nur für die drei Charakteristiken $[\varepsilon] \equiv [\zeta]$, $[\zeta + \alpha]$, $[\zeta - \alpha]$ den Werth 3, für die übrigen sechs den Werth 0, und es nimmt daher, wenn man noch links und rechts mit 3 dividirt, diese Gleichung die Form:

$$(F') \quad x'_{[\eta]} + \tau^{\alpha|\zeta} x'_{[\eta+\alpha]} + \tau^{\zeta|\alpha} x'_{[\eta-\alpha]} = \tau^{\zeta|\eta}\left\{x_{[\zeta]} + \tau^{\alpha|\eta} x_{[\zeta+\alpha]} + \tau^{\eta|\alpha} x_{[\zeta-\alpha]}\right\}$$

an, wobei also $[\eta]$, $[\zeta]$ zwei ganz beliebige Charakteristiken bezeichnen, die auch einander gleich sein können, während $[\alpha]$ eine von $[0]$ verschiedene Charakteristik ist.

In der Gleichung (F') kann jetzt für $[\eta]$ und unabhängig davon für $[\zeta]$ eine jede der neun Normalcharakteristiken gesetzt werden. Es entstehen aber auf diese Weise, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, im Ganzen nur neun wesentlich verschiedene Gleichungen. Repräsentirt man nämlich, indem man unter $[\beta]$ eine beliebige von $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ verschiedene Charakteristik versteht, die neun Normalcharakteristiken durch die ihnen congruenten neun Charakteristiken des quadratischen Schemas:

$$\begin{array}{ccc}
[0], & [\alpha], & [-\alpha], \\
[\beta], & [\beta+\alpha], & [\beta-\alpha], \\
[-\beta], & [-\beta+\alpha], & [-\beta-\alpha],
\end{array}$$

und berücksichtigt, dass die Gleichung (F') wieder in sich selbst übergeht, sowohl, wenn man $[\eta]$, als auch, wenn man $[\zeta]$ um $[\alpha]$ oder $[-\alpha]$ vermehrt, so erkennt man, dass immer die drei in einer Horizontalreihe des obigen Schemas stehenden Charakteristiken, der Reihe nach in (F') an Stelle von $[\eta]$ oder $[\zeta]$ gesetzt, dieselbe Gleichung hervorbringen, und dass daher die Formel (F') bei festgehaltenem $[\alpha]$ im Ganzen nur neun verschiedene specielle Gleichungen umfasst, die man erhält, indem man der Reihe nach $[\eta] = [0]$, $[\beta]$, $[-\beta]$ setzt und jedesmal dann an Stelle von $[\zeta]$ die nämlichen drei Charakteristiken treten lässt. Bezeichnet man $x_{[\varepsilon]}$ einfach mit (ε), $x'_{[\varepsilon]}$ mit $(\varepsilon)'$, so können diese neun Gleichungen, wie folgt, geschrieben werden:

$$
(S')\quad
\begin{array}{l}
(0)' + (\alpha)' + (-\alpha)' = (0) + (\alpha) + (-\alpha)\,,\\
(0)' + \tau^{\alpha|\beta}(\alpha)' + \tau^{\beta|\alpha}(-\alpha)' = (\beta) + (\beta+\alpha) + (\beta-\alpha)\,,\\
(0)' + \tau^{\beta|\alpha}(\alpha)' + \tau^{\alpha|\beta}(-\alpha)' = (-\beta) + (-\beta+\alpha) + (-\beta-\alpha)\,,\\
\hline
(\beta)' + (\beta+\alpha)' + (\beta-\alpha)' = (0) + \tau^{\alpha|\beta}(\alpha) + \tau^{\beta|\alpha}(-\alpha)\,,\\
(\beta)' + \tau^{\alpha|\beta}(\beta+\alpha)' + \tau^{\beta|\alpha}(\beta-\alpha)' = (\beta) + \tau^{\alpha|\beta}(\beta+\alpha) + \tau^{\beta|\alpha}(\beta-\alpha)\,,\\
(\beta)' + \tau^{\beta|\alpha}(\beta+\alpha)' + \tau^{\alpha|\beta}(\beta-\alpha)' = (-\beta) + \tau^{\alpha|\beta}(-\beta+\alpha) + \tau^{\beta|\alpha}(-\beta-\alpha)\,,\\
\hline
(-\beta)' + (-\beta+\alpha)' + (-\beta-\alpha)' = (0) + \tau^{\beta|\alpha}(\alpha) + \tau^{\alpha|\beta}(-\alpha)\,,\\
(-\beta)' + \tau^{\alpha|\beta}(-\beta+\alpha)' + \tau^{\beta|\alpha}(-\beta-\alpha)' = (\beta) + \tau^{\beta|\alpha}(\beta+\alpha) + \tau^{\alpha|\beta}(\beta-\alpha)\,,\\
(-\beta)' + \tau^{\beta|\alpha}(-\beta+\alpha)' + \tau^{\alpha|\beta}(-\beta-\alpha)' = (-\beta) + \tau^{\beta|\alpha}(-\beta+\alpha) + \tau^{\alpha|\beta}(-\beta-\alpha).
\end{array}
$$

Das so entstandene System (S') kann das ursprüngliche System (S), aus dem es abgeleitet wurde, in jeder Beziehung ersetzen, insofern als man von dem Systeme (S') aus, durch passende Verbindung der ihm angehörigen Gleichungen rückwärts wieder das ursprüngliche System (S) erhalten kann. Die in dem Systeme (S') vorkommende Charakteristik $[\beta]$ ist nur der Bedingung unterworfen, von $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ verschieden zu sein; setzt man aber an Stelle von $[\beta]$ irgend eine andere der sechs zulässigen Charakteristiken, so geht das System (S'), abgesehen von der Aufeinanderfolge der Gleichungen und der Anordnung der Glieder in denselben, wieder in sich selbst über, und man erkennt daher, dass das System (S') durch Angabe der Charakteristik $[\alpha]$ vollständig bestimmt ist. Berücksichtigt man nun weiter, dass für $[\alpha]$ eine jede der acht von $[0]$ verschiedenen Charakteristiken gesetzt werden darf, dass aber das System (S') ungeändert bleibt, wenn man die Charakteristik $[-\alpha]$ an Stelle der Charakteristik $[\alpha]$ treten lässt, so erkennt man, dass es im Ganzen überhaupt nur vier verschiedene specielle Systeme (S') giebt, welche man erhalten kann, wenn man an Stelle der Charakteristik $[\alpha]$ die Charakteristiken:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

und an Stelle von $[\beta]$ beziehlich die Charakteristiken:

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

setzt.

Um die vier so entstehenden speciellen Systeme (S') von je neun Gleichungen zu fixiren, berücksichtige man, dass in (S') allgemein (ε) die Grösse $x_{[\varepsilon]}$, $(\varepsilon)'$ die Grösse $x'_{[\varepsilon]}$ vertritt, ferner, dass nach früher getroffenem Uebereinkommen $x_{[\varepsilon]}$ auch durch x_ν, $x'_{[\varepsilon]}$ durch x'_ν bezeichnet werden kann, wenn ν die Stellenzahl der der Charakteristik $[\varepsilon]$ congruenten Normalcharakteristik ist. Denkt man sich nun die

Gleichungen zunächst unter Anwendung von x_ν, x_ν' angeschrieben und ersetzt dann x_ν einfach durch ν, x_ν' durch ν', so entsteht die nachfolgende Tabelle, in welcher die Gleichungen in der Weise zusammengestellt sind, dass die neun ein System (S') bildenden Gleichungen jedesmal in drei Horizontalreihen zusammenstehen.

$1'+2'+3'=1+2+3$	$4'+5'+6'=1+\tau 2+\tau^2 3$	$7'+8'+9'=1+\tau^2 2+\tau 3$
$1'+\tau 2'+\tau^2 3'=4+5+6$	$4'+\tau 5'+\tau^2 6'=4+\tau 5+\tau^2 6$	$7'+\tau 8'+\tau^2 9'=4+\tau^2 5+\tau 6$
$1'+\tau^2 2'+\tau 3'=7+8+9$	$4'+\tau^2 5'+\tau 6'=7+\tau 8+\tau^2 9$	$7'+\tau^2 8'+\tau 9'=7+\tau^2 8+\tau 9$
$1'+4'+7'=1+4+7$	$3'+6'+9'=1+\tau 4+\tau^2 7$	$2'+5'+8'=1+\tau^2 4+\tau 7$
$1'+\tau 4'+\tau^2 7'=3+6+9$	$3'+\tau 6'+\tau^2 9'=3+\tau 6+\tau^2 9$	$2'+\tau 5'+\tau^2 8'=3+\tau^2 6+\tau 9$
$1'+\tau^2 4'+\tau 7'=2+5+8$	$3'+\tau^2 6'+\tau 9'=2+\tau 5+\tau^2 8$	$2'+\tau^2 5'+\tau 8'=2+\tau^2 5+\tau 8$
$1'+5'+9'=1+5+9$	$3'+4'+8'=1+\tau 5+\tau^2 9$	$2'+6'+7'=1+\tau^2 5+\tau 9$
$1'+\tau 5'+\tau^2 9'=3+4+8$	$3'+\tau 4'+\tau^2 8'=3+\tau 4+\tau^2 8$	$2'+\tau 6'+\tau^2 7'=3+\tau^2 4+\tau 8$
$1'+\tau^2 5'+\tau 9'=2+6+7$	$3'+\tau^2 4'+\tau 8'=2+\tau 6+\tau^2 7$	$2'+\tau^2 6'+\tau 7'=2+\tau^2 6+\tau 7$
$1'+6'+8'=1+6+8$	$3'+5'+7'=1+\tau 6+\tau^2 8$	$2'+4'+9'=1+\tau^2 6+\tau 8$
$1'+\tau 6'+\tau^2 8'=3+5+7$	$3'+\tau 5'+\tau^2 7'=3+\tau 5+\tau^2 7$	$2'+\tau 4'+\tau^2 9'=3+\tau^2 5+\tau 7$
$1'+\tau^2 6'+\tau 8'=2+4+9$	$3'+\tau^2 5'+\tau 7'=2+\tau 4+\tau^2 9$	$2'+\tau^2 4'+\tau 9'=2+\tau^2 4+\tau 9$

Wie ein Blick auf die Gleichung (F') zeigt, welche die sechsunddreissig soeben aufgestellten Gleichungen als specielle Fälle enthält, stehen sowohl auf der rechten wie auf der linken Seite einer jeden dieser Gleichungen drei Grössen, deren zugehörige, den auftretenden Stellenzahlen entsprechende Normalcharakteristiken immer eine der Charakteristik $[0]$ congruente Summe besitzen. Von drei verschiedenen Charakteristiken, deren Summe der Charakteristik $[0]$ congruent ist, soll gesagt werden, dass sie ein Dreiersystem bilden. Man erkennt dann, dass die drei Charakteristiken eines Dreiersystems allgemein durch drei Charakteristiken von der Form $[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ repräsentirt werden, und dass es, da congruente Charakteristiken hierbei als nicht verschieden anzusehen sind, im Ganzen zwölf verschiedene Dreiersysteme gibt, nämlich die folgenden:

$$\begin{array}{lll}
\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right];\\
\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right];\\
\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right];\\
\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\ \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right].
\end{array}$$

Die zwölf hierzugehörigen Systeme von je drei Stellenzahlen stimmen mit den zwölf verschiedenen auf den rechten und linken Seiten der obigen sechsunddreissig Gleichungen vorkommenden Systemen von je drei Zahlen überein.

7.

Die sämmtlichen in den beiden vorigen Artikeln aufgestellten Gleichungen bleiben nach früher Bemerktem richtig, wenn man darin allgemein, d. h. für jede Charakteristik $[\eta]$, beziehlich $[\varepsilon]$:

$$x'_{[\eta]} = \vartheta[\eta+\varkappa](3u'^{(1)})\,\vartheta[\eta+\varkappa-\varrho](3u'^{(2)})\,\vartheta[\eta+\varkappa+\varrho](3u'^{(3)})$$
$$\times\,\vartheta[\eta](3u'^{(4)})\,\vartheta[\eta-\sigma](3u'^{(5)})\,\vartheta[\eta+\sigma](3u'^{(6)})\,\tau^{|\eta|}\cdot\tau^{|\eta+\varkappa|}\cdot\tau^{\varkappa|\eta},$$
$$x_{[\varepsilon]} = \vartheta[\varepsilon](3u^{(1)})\,\vartheta[\varepsilon+\varrho](3u^{(2)})\,\vartheta[\varepsilon-\varrho](3u^{(3)})$$
$$\times\,\vartheta[\varepsilon+\varkappa](3u^{(4)})\,\vartheta[\varepsilon+\varkappa+\sigma](3u^{(5)})\,\vartheta[\varepsilon+\varkappa-\sigma](3u^{(6)})\,\tau^{|\varepsilon|}\cdot\tau^{|\varepsilon+\varkappa|}\cdot\tau^{\varkappa|\varepsilon}$$

setzt.

Aus der Fülle specieller Formeln, welche durch passende Verfügung über die willkürlichen Variablen u und die ebenfalls willkürlichen Charakteristiken $[\varkappa]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ erhalten werden können, sollen hier nur diejenigen abgeleitet werden, welche zur Lösung des im Eingange des Art. 4 gestellten Problems erforderlich sind.

Man setze, indem man unter u und v zwei beliebige Grössen versteht:

$$3u^{(1)} = 3u^{(2)} = 3u^{(3)} = u, \qquad 3u^{(4)} = 3u^{(5)} = 3u^{(6)} = v;$$

dann wird den Gleichungen (J) gemäss:

$$3u'^{(1)} = 3u'^{(2)} = 3u'^{(3)} = v, \qquad 3u'^{(4)} = 3u'^{(5)} = 3u'^{(6)} = u,$$

und die soeben mit $x'_{[\eta]}$, $x_{[\varepsilon]}$ bezeichneten Thetaproducte gehen durch Einführung dieser speciellen Werthe über in:

$$x'_{[\eta]} = \tau^{\varkappa|\eta}\,\vartheta[\eta](u)\,\vartheta[\eta+\sigma](u)\,\vartheta[\eta-\sigma](u)\,\tau^{|\eta|}$$
$$\times\,\vartheta[\varkappa+\eta](v)\,\vartheta[\varkappa+\eta+\varrho](v)\,\vartheta[\varkappa+\eta-\varrho](v)\,\tau^{|\varkappa+\eta|},$$
$$x_{[\varepsilon]} = \tau^{\varkappa|\varepsilon}\,\vartheta[\varepsilon](u)\,\vartheta[\varepsilon+\varrho](u)\,\vartheta[\varepsilon-\varrho](u)\,\tau^{|\varepsilon|}$$
$$\times\,\vartheta[\varkappa+\varepsilon](v)\,\vartheta[\varkappa+\varepsilon+\sigma](v)\,\vartheta[\varkappa+\varepsilon-\sigma](v)\,\tau^{|\varkappa+\varepsilon|}.$$

Ersetzt man nun in der Formel (F') die vorkommenden Grössen x', x mit Hülfe der letzten Gleichungen durch die ihnen entsprechenden Thetaproducte und bezeichnet, zugleich im Hinblicke auf spätere Formeln:

$$\vartheta[\alpha](u)\,\vartheta[\alpha+\beta](u)\,\vartheta[\alpha-\beta](u)\,\tau^{|\alpha|} \quad \text{mit} \quad \vartheta\{\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta\}(u),$$
$$\vartheta[\alpha](v)\,\vartheta[\alpha+\beta](v)\,\vartheta[\alpha-\beta](v)\,\tau^{|\alpha|} \quad \text{mit} \quad \vartheta\{\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta\}(v),$$
$$\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta[\alpha+\beta](0)\,\vartheta[\alpha-\beta](0)\,\tau^{|\alpha|} \quad \text{mit} \quad (\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta),$$

und, dem Falle $[\beta] = [0]$ entsprechend:

$$\vartheta^3[\alpha](u)\,\tau^{|\alpha|} \text{ mit } \vartheta^3\{\alpha\}(u), \qquad \vartheta^3[\alpha](v)\,\tau^{|\alpha|} \text{ mit } \vartheta^3\{\alpha\}(v),$$
$$\vartheta^3[\alpha](0)\,\tau^{|\alpha|} \text{ mit } (\alpha)^3,$$

so geht aus der Formel (F') die Formel:

$$(\Theta') \qquad \tau^{\varkappa|\eta}\,\vartheta\{\eta|\eta+\sigma|\eta-\sigma\}(u)\,\vartheta\{\varkappa+\eta|\varkappa+\eta+\varrho|\varkappa+\eta-\varrho\}(v)$$
$$+\,\tau^{\alpha|\zeta}\tau^{\varkappa|\eta+\alpha}\,\vartheta\{\eta+\alpha|\eta+\alpha+\sigma|\eta+\alpha-\sigma\}(u)$$
$$\cdot\,\vartheta\{\varkappa+\eta+\alpha|\varkappa+\eta+\alpha+\varrho|\varkappa+\eta+\alpha-\varrho\}(v)$$
$$+\,\tau^{\zeta|\alpha}\tau^{\varkappa|\eta-\alpha}\,\vartheta\{\eta-\alpha|\eta-\alpha+\sigma|\eta-\alpha-\sigma\}(u)$$
$$\cdot\,\vartheta\{\varkappa+\eta-\alpha|\varkappa+\eta-\alpha+\varrho|\varkappa+\eta-\alpha-\varrho\}(v)$$
$$=\tau^{\zeta|\eta}\tau^{\varkappa|\zeta}\,\vartheta\{\zeta|\zeta+\varrho|\zeta-\varrho\}(u)\,\vartheta\{\varkappa+\zeta|\varkappa+\zeta+\sigma|\varkappa+\zeta-\sigma\}(v)$$
$$+\,\tau^{\zeta+\alpha|\eta}\,\tau^{\varkappa|\zeta+\alpha}\,\vartheta\{\zeta+\alpha|\zeta+\alpha+\varrho|\zeta+\alpha-\varrho\}(u)$$
$$\cdot\,\vartheta\{\varkappa+\zeta+\alpha|\varkappa+\zeta+\alpha+\sigma|\varkappa+\zeta+\alpha-\sigma\}(v)$$
$$+\,\tau^{\zeta-\alpha|\eta}\tau^{\varkappa|\zeta-\alpha}\,\vartheta\{\zeta-\alpha|\zeta-\alpha+\varrho|\zeta-\alpha-\varrho\}(u)$$
$$\cdot\,\vartheta\{\varkappa+\zeta-\alpha|\varkappa+\zeta-\alpha+\sigma|\varkappa+\zeta-\alpha-\sigma\}(v)$$

hervor, aus der jetzt die oben erwähnten speciellen Gleichungen abgeleitet werden sollen.

Setzt man zunächst $[\varrho] = [\alpha]$, $[\sigma] = [\beta]$, $u = 0$ und vertauscht in der so entstehenden Formel dann die Buchstaben α und β, so entsteht die Formel:

$$
\begin{aligned}
(A)\quad & \tau^{\varkappa\,|\,\eta}\big[(\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha) + \tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}(\eta+\beta\,|\,\eta+\beta+\alpha\,|\,\eta+\beta-\alpha) \\
& \qquad + \tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}(\eta-\beta\,|\,\eta-\beta+\alpha\,|\,\eta-\beta-\alpha)\big] \\
& \qquad \times \vartheta\{\varkappa+\eta\,|\,\varkappa+\eta+\beta\,|\,\varkappa+\eta-\beta\}(v) \\
& = \tau^{\zeta\,|\,\eta}(\zeta\,|\,\zeta+\beta\,|\,\zeta-\beta)\big[\tau^{\varkappa\,|\,\zeta}\vartheta\{\varkappa+\zeta\,|\,\varkappa+\zeta+\alpha\,|\,\varkappa+\zeta-\alpha\}(v) \\
& \qquad + \tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}\tau^{\varkappa\,|\,\zeta+\beta}\vartheta\{\varkappa+\zeta+\beta\,|\,\varkappa+\zeta+\beta+\alpha\,|\,\varkappa+\zeta+\beta-\alpha\}(v) \\
& \qquad + \tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}\tau^{\varkappa\,|\,\zeta-\beta}\vartheta\{\varkappa+\zeta-\beta\,|\,\varkappa+\zeta-\beta+\alpha\,|\,\varkappa+\zeta-\beta-\alpha\}(v)\big]\cdot
\end{aligned}
$$

Setzt man dagegen $[\varrho] = [0]$, $[\sigma] = [0]$, $u = 0$, so entsteht die Formel:

$$
\begin{aligned}
(B)\quad & \tau^{\varkappa\,|\,\eta}(\eta)^3\vartheta^3\{\varkappa+\eta\}(v) + \tau^{\alpha\,|\,\zeta}\tau^{\varkappa\,|\,\eta+\alpha}(\eta+\alpha)^3\vartheta^3\{\varkappa+\eta+\alpha\}(v) \\
& \qquad + \tau^{\zeta\,|\,\alpha}\tau^{\varkappa\,|\,\eta-\alpha}(\eta-\alpha)^3\vartheta^3\{\varkappa+\eta-\alpha\}(v) \\
& = \tau^{\zeta\,|\,\eta}\tau^{\varkappa\,|\,\zeta}(\zeta)^3\vartheta^3\{\varkappa+\zeta\}(v) + \tau^{\zeta+\alpha\,|\,\eta}\tau^{\varkappa\,|\,\zeta+\alpha}(\zeta+\alpha)^3\vartheta^3\{\varkappa+\zeta+\alpha\}(v) \\
& \qquad + \tau^{\zeta-\alpha\,|\,\eta}\tau^{\varkappa\,|\,\zeta-\alpha}(\zeta-\alpha)^3\vartheta^3\{\varkappa+\zeta-\alpha(v).
\end{aligned}
$$

Zur Gewinnung weiterer Formeln setze man in (Θ') $[\varrho] = [\alpha]$, $[\sigma] = [0]$; es entsteht dann zunächst die Formel:

$$
\begin{aligned}
& \tau^{\varkappa\,|\,\eta}\big[\vartheta^3\{\eta\}(u) + \tau^{\alpha\,|\,\zeta+\eta}\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(u) + \tau^{\zeta+\eta\,|\,\alpha}\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(u)\big] \\
& \qquad \times \vartheta\{\varkappa+\eta\,|\,\varkappa+\eta+\alpha\,|\,\varkappa+\eta-a\}(v) \\
& = \tau^{\zeta\,|\,\eta}\vartheta\{\zeta\,|\,\zeta+\alpha\,|\,\zeta-\alpha\}(u)\big[\tau^{\varkappa\,|\,\zeta}\vartheta^3\{\varkappa+\zeta\}(v) \\
& + \tau^{\alpha\,|\,\zeta+\eta}\tau^{\varkappa\,|\,\zeta+\alpha}\vartheta^3\{\varkappa+\zeta+\alpha\}(v) + \tau^{\zeta+\eta\,|\,\alpha}\tau^{\varkappa\,|\,\zeta-\alpha}\vartheta^3\{\varkappa+\zeta-\alpha\}(v)\big]\cdot
\end{aligned}
$$

Aus dieser Formel geht für $u = 0$ die Formel:

$$
\begin{aligned}
(C)\quad & \tau^{\varkappa\,|\,\eta}\big[(\eta)^3 + \tau^{\alpha\,|\,\zeta+\eta}(\eta+\alpha)^3 + \tau^{\zeta+\eta\,|\,\alpha}(\eta-\alpha)^3\big] \\
& \qquad \times \vartheta\{\varkappa+\eta\,|\,\varkappa+\eta+\alpha\,|\,\varkappa+\eta-\alpha\}(v) \\
& = \tau^{\zeta\,|\,\eta}(\zeta\,|\,\zeta+\alpha\,|\,\zeta-\alpha)\big[\tau^{\varkappa\,|\,\zeta}\vartheta^3\{\varkappa+\zeta\}(v) \\
& \qquad + \tau^{\alpha\,|\,\zeta+\eta}\tau^{\varkappa\,|\,\zeta+\alpha}\vartheta^3\{\varkappa+\zeta+\alpha\}(v) + \tau^{\zeta+\eta\,|\,\alpha}\tau^{\varkappa\,|\,\zeta-\alpha}\vartheta^3\{\varkappa+\zeta-\alpha\}(v)\big]
\end{aligned}
$$

hervor; setzt man dagegen $[\varkappa] = [\zeta - \eta]$, $u = v$ und entfernt den beiden Seiten gemeinsamen Factor $\vartheta\{\zeta\,|\,\zeta+\alpha\,|\,\zeta-\alpha\}(v)$ durch Division, so entsteht, wenn man schliesslich noch an Stelle von $[\zeta]$ die neue Charakteristik $[\varepsilon]$ einführt mit Hülfe der Gleichung $[\varepsilon] = [-\zeta-\eta]$, nach leichten Umformungen die Formel:

$$(D)\quad \vartheta^3\{\eta\}(v)+\tau^{\varepsilon\,|\,\alpha}\,\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)+\tau^{\alpha\,|\,\varepsilon}\,\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)$$
$$=\tau^{\eta\,|\,\varepsilon}\big[\vartheta^3\{\varepsilon\}(v)+\tau^{\eta\,|\,\alpha}\vartheta^3\{\varepsilon+\alpha\}(v)+\tau^{\alpha\,|\,\eta}\vartheta^3\{\varepsilon-\alpha\}(v)\big].$$

Die Formeln (A), (B), (C), (D) bilden die Hülfsmittel für die weitere Untersuchung.

8.

Es sollen jetzt zunächst die zwischen den Grössen $\vartheta[\varepsilon](0)$ bestehenden Beziehungen näher untersucht werden. Bezeichnet man mit $[\alpha]$ eine der $[0]$ nicht congruente Charakteristik, mit $[\beta]$ eine zweite Charakteristik, welche keiner der drei Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ congruent ist, so bilden die Charakteristiken:

$$[0],\quad [\alpha],\quad [-\alpha],\quad [\beta],\quad [\beta+\alpha],\quad [\beta-\alpha],\quad [-\beta],$$
$$[-\beta+\alpha],\quad [-\beta-\alpha]$$

ein System von neun incongruenten Charakteristiken und sind daher den neun Normalcharakteristiken in irgend einer Reihenfolge congruent. Setzt man speciell $[\alpha]=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, $[\beta]=\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, so geht das aufgestellte System in das System der neun Normalcharakteristiken in der natürlichen Reihenfolge über.

Die Relationen, welche sich aus den Formeln (A), (B), (C), (D) durch Specialisirung ergeben, enthalten ausschliesslich Grössen von der Form:

$$(\varrho)^3=\vartheta^3[\varrho](0)\,\tau^{\varrho\,|\,\varrho}$$

und

$$(\varrho\,|\,\varrho+\sigma\,|\,\varrho-\sigma)=\vartheta[\varrho](0)\,\vartheta[\varrho+\sigma](0)\,\vartheta[\varrho-\sigma](0)\,\tau^{\varrho\,|\,\varrho}.$$

Da diese Grössen ihren Werth nicht ändern, wenn man die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ durch irgend welche ihnen congruente ersetzt, so hat man, den neun Normalcharakteristiken entsprechend, zunächst neun Grössen von der Form $(\varrho)^3$, die mit Hülfe der oben eingeführten beliebigen Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ durch:

$$(0)^3,\quad (\alpha)^3,\quad (-\alpha)^3,\quad (\beta)^3,\quad (\beta+\alpha)^3,\quad (\beta-\alpha)^3,\quad (-\beta)^3,$$
$$(-\beta+\alpha)^3,\quad (-\beta-\alpha)^3$$

repräsentirt werden können. Da ferner die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\varrho+\sigma]$, $[\varrho-\sigma]$ immer ein Dreiersystem bilden, die Anzahl der verschiedenen aus Normalcharakteristiken gebildeten Dreiersysteme aber nach Art. 6 zwölf beträgt, auch ein Symbol $(\lambda\,|\,\mu\,|\,\nu)$ nur eine dritte Einheitswurzel als Factor erlangt, wenn man die Charakteristiken $[\lambda]$, $[\mu]$, $[\nu]$ durch irgend welche ihnen congruente ersetzt, so giebt es, wenn man von dritten Einheitswurzeln absieht, im Ganzen zwölf verschiedene Grössen von der Form $(\varrho\,|\,\varrho+\sigma\,|\,\varrho-\sigma)$, welche durch:

$$\begin{array}{lll}(0|\alpha|-\alpha) \quad , & (\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha), & (-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha),\\ (0|\beta|-\beta) \quad , & (\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta), & (-\alpha|-\alpha+\beta|-\alpha-\beta),\\ (0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha), & (\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha), & (-\beta+\alpha|2\alpha|-2\beta) \quad ,\\ (0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha), & (\beta+\alpha|2\beta|2\alpha) \quad , & (-\beta-\alpha|-2\alpha|-2\beta)\end{array}$$

repräsentirt werden können. Setzt man speciell $[\alpha]=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, $[\beta]=\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, so geht das System dieser zwölf Grössen unmittelbar, d. h. ohne dass man dritte Einheitswurzeln hinzuzufügen braucht, in dasjenige über, welches den in Art. 6 angeschriebenen Dreiersystemen in der gewählten Anordnung entspricht. Berücksichtigt man nun weiter, dass nach Formel (6) des Art. 1 allgemein:

$$\vartheta[\varrho](-v)=\vartheta[-\varrho](v), \quad \text{also} \quad \vartheta[-\varrho](0)=\vartheta[\varrho](0),$$

auch $\tau^{|-\varrho|}=\tau^{|\varrho|}$ ist, und dass daher stets die Beziehungen:

$$(-\varrho)^3=(\varrho)^3, \qquad (-\varrho|-\varrho+\sigma|-\varrho-\sigma)=(\varrho\mid\varrho+\sigma\mid\varrho-\sigma)$$

bestehen, so folgt, dass sich die neun Grössen $(\varrho)^3$ auf die fünf:

$$(0)^3, \quad (\alpha)^3, \quad (\beta)^3, \quad (\beta+\alpha)^3, \quad (\beta-\alpha)^3,$$

die zwölf Grössen $(\varrho\mid\varrho+\sigma\mid\varrho-\sigma)$ auf die acht:

$$\begin{array}{llll}(0|\alpha|-\alpha) \quad , & (\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha) \; ; & (0|\beta|-\beta) \quad , & (\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)\\ (0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha), & (\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha); & (0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha), & (\beta+\alpha|2\beta|2\alpha)\end{array}$$

reduciren, und es ist nun die Aufgabe des Folgenden, die Relationen, welche zwischen diesen dreizehn Grössen bestehen, aus den Formeln (A), (B), (C), (D) abzuleiten.

Setzt man in der Formel (A) $v=0$, $[\varkappa]=[0]$, $[\eta]=[0]$, $[\zeta]=[\varrho]$, $[\alpha]=[\varrho]$, $[\beta]=[\sigma]$ und lässt dann an Stelle von $[\varrho]$, $[\sigma]$ der Reihe nach die sechs Combinationen der Elemente $[\alpha]$, $[\beta]$ $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ zur zweiten Classe ohne Wiederholung treten, so entstehen die sechs Relationen:

$$(A_0)\quad\begin{aligned}
&[(0|\alpha|-\alpha)-(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)]\,(0|\beta|-\beta)\\
&=(\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)\,[(0|\alpha|-\alpha)+2(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)],\\
&[(0|\alpha|-\alpha)-\tau^{\alpha|\beta}(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)]\,(0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha)\\
&=\tau^{\alpha|\beta}(\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha)\,[(0|\alpha|-\alpha)+2\tau^{\alpha|\beta}(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)],\\
&[(0|\alpha|-\alpha)-\tau^{\beta|\alpha}(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)]\,(0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha)\\
&=\tau^{\beta|\alpha}(\beta+\alpha|2\beta|2\alpha)\,[(0|\alpha|-\alpha)+2\tau^{\beta|\alpha}(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)],\\
&[0|\beta|-\beta)-\tau^{\beta|\alpha}(\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)]\,(0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha)\\
&=\tau^{\beta|\alpha}(\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha)\,[(0|\beta|-\beta)+2\tau^{\beta|\alpha}(\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)],\\
&[(0|\beta|-\beta)-\tau^{\alpha|\beta}(\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)]\,(0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha)\\
&=\tau^{\alpha|\beta}(\beta+\alpha|2\beta|2\alpha)\,[(0|\beta|-\beta)+2\tau^{\alpha|\beta}(\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)],\\
&[(0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha)-(\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha)]\,(0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha)\\
&=(\beta+\alpha|2\beta|2\alpha)\,[(0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha)+2(\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha)],
\end{aligned}$$

welche zugleich die sämmtlichen aus $(\dot{A})$ hervorgehenden Relationen repräsentiren.

Setzt man ferner in der Formel (B) $v=0$, $[\eta]=[0]$, $[\zeta]=[\beta]$ und lässt dann an Stelle von $[\varkappa]$ der Reihe nach die fünf Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ treten, so entstehen die fünf Relationen:

$$
(B_0)\qquad
\begin{aligned}
(0)^6 &= (\alpha)^6+(\beta)^6+(\beta+\alpha)^6+(\beta-\alpha)^6,\\
(\alpha)^6 &= (0)^3(\alpha)^3+(\beta)^3(\beta+\alpha)^3+(\beta+\alpha)^3(\beta-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^3(\beta)^3,\\
(\beta)^6 &= (0)^3(\beta)^3+(\alpha)^3(\beta+\alpha)^3+(\beta+\alpha)^3(\beta-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^3(\alpha)^3,\\
(\beta+\alpha)^6 &= (0)^3(\beta+\alpha)^3+(\alpha)^3(\beta-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^3(\beta)^3+(\beta)^3(\alpha)^3,\\
(\beta-\alpha)^6 &= (0)^3(\beta-\alpha)^3+(\alpha)^3(\beta)^3+(\beta)^3(\beta+\alpha)^3+(\beta+\alpha)^3(\alpha)^3,
\end{aligned}
$$

welche zugleich die sämmtlichen aus (B) hervorgehenden Relationen zwischen den Grössen $\vartheta[\varepsilon](0)$ repräsentiren.

Setzt man weiter in der Formel (C) das eine Mal $v=0$, $[\eta]=[0]$, $[\zeta]=[0]$, $[\alpha]=[\varrho]$, $[\beta]=[\sigma]$, $[\varkappa]=[\sigma]$, das andere Mal $v=0$, $[\eta]=[0]$, $[\varkappa]=[0]$, $[\alpha]=[\varrho]$, $[\beta]=[\sigma]$, $[\zeta]=[\sigma]$ und setzt hierauf in jeder der beiden so entstandenen Gleichungen zunächst $[\varrho]=[\alpha]$, $[\sigma]=[\beta]$, dann $[\varrho]=[\beta]$, $[\sigma]=[\alpha]$, dann $[\varrho]=[\beta+\alpha]$, $[\sigma]=[\beta-\alpha]$, endlich $[\varrho]=[\beta-\alpha]$, $[\sigma]=[\beta+\alpha]$, so entstehen die folgenden vier Paare von Relationen:

$$
(C_0)\qquad
\begin{aligned}
&[(0)^3+2(\alpha)^3]\,(\beta\mid\beta+\alpha\mid\beta-\alpha)\\
&\quad=(0\mid\alpha\mid-\alpha)\,[(\beta)^3+\tau^{\beta\mid\alpha}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\mid\beta}(\beta-\alpha)^3],\\
&[(0)^3-(\alpha)^3]\,(0\mid\alpha\mid-\alpha)\\
&\quad=(\beta\mid\beta+\alpha\mid\beta-\alpha)\,[(\beta)^3+\tau^{\alpha\mid\beta}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\beta\mid\alpha}(\beta-\alpha)^3],\\
&[(0)^3+2(\beta)^3]\,(\alpha\mid\alpha+\beta\mid\alpha-\beta)\\
&\quad=(0\mid\beta\mid-\beta)\,[(\alpha)^3+\tau^{\alpha\mid\beta}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\beta\mid\alpha}(\beta-\alpha)^3],\\
&[(0)^3-(\beta)^3]\,(0\mid\beta\mid-\beta)\\
&\quad=(\alpha\mid\alpha+\beta\mid\alpha-\beta)\,[(\alpha)^3+\tau^{\beta\mid\alpha}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\mid\beta}(\beta-\alpha)^3],\\
&[(0)^3+2(\beta+\alpha)^3]\,(\beta-\alpha\mid2\beta\mid-2\alpha)\\
&\quad=(0\mid\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha)\,[(\beta-\alpha)^3+\tau^{\alpha\mid\beta}(\beta)^3+\tau^{\beta\mid\alpha}(\alpha)^3],\\
&[(0)^3-(\beta+\alpha)^3]\,(0\mid\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha)\\
&\quad=(\beta-\alpha\mid2\beta\mid-2\alpha)\,[(\beta-\alpha)^3+\tau^{\beta\mid\alpha}(\beta)^3+\tau^{\alpha\mid\beta}(\alpha)^3],\\
&[(0)^3+2(\beta-\alpha)^3]\,(\beta+\alpha\mid2\beta\mid2\alpha)\\
&\quad=(0\mid\beta-\alpha\mid-\beta+\alpha)\,[(\beta+\alpha)^3+\tau^{\beta\mid\alpha}(\beta)^3+\tau^{\alpha\mid\beta}(\alpha)^3],\\
&[(0)^3-(\beta-\alpha)^3]\,(0\mid\beta-\alpha\mid-\beta+\alpha)\\
&\quad=(\beta+\alpha\mid2\beta\mid2\alpha)\,[(\beta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\mid\beta}(\beta)^3+\tau^{\beta\mid\alpha}(\alpha)^3].
\end{aligned}
$$

Setzt man endlich in der Gleichung (D) $v=0$, $[\eta]=[0]$, $[\varepsilon]=[\beta]$, so entsteht die Relation:

$$(D_0) \qquad (0)^3=(\alpha)^3+(\beta)^3+(\beta+\alpha)^3+(\beta-\alpha)^3.$$

Die aufgestellten Gleichungen (C_0), (D_0) repräsentiren zugleich die sämmtlichen in (C), (D) enthaltenen Relationen zwischen den Grössen $\vartheta[\varepsilon](0)$. Ein Blick auf die gewonnenen Systeme (A_0), (B_0), (C_0), (D_0) lässt erkennen, dass ein jedes dieser Systeme sich reproducirt, wenn man an Stelle der willkürlich gewählten Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ irgend zwei andere Charakteristiken setzt.

Die Gleichungen (A_0), (B_0), (C_0), (D_0) sind nicht unabhängig von einander, vielmehr kann man auf verschiedene Weisen drei herausgreifen, aus denen sich dann die übrigen sämmtlich ableiten lassen. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass aus den drei ersten Gleichungen des Systems (A_0) alle übrigen erhalten werden können. Zu dem Ende setze man:

$$\frac{(\beta\mid\beta+\alpha\mid\beta-\alpha)}{(0\mid\alpha\mid-\alpha)}=z_1, \qquad \frac{(\alpha\mid\alpha+\beta\mid\alpha-\beta)}{(0\mid\beta\mid-\beta)}=z_2,$$

$$\frac{(\beta-\alpha\mid 2\beta\mid-2\alpha)}{(0\mid\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha)}=z_3, \qquad \frac{(\beta+\alpha\mid 2\beta\mid 2\alpha)}{(0\mid\beta-\alpha\mid-\beta+\alpha)}=z_4.$$

Die drei genannten Gleichungen nehmen dann durch Einführung dieser Grössen die Form:

$$(1-z_1)=z_2(1+2z_1),$$

$$(1-\tau^{\alpha\mid\beta}z_1)=\tau^{\alpha\mid\beta}z_3(1+2\tau^{\alpha\mid\beta}z_1), \qquad (1-\tau^{\beta\mid\alpha}z_1)=\tau^{\beta\mid\alpha}z_4(1+2\tau^{\beta\mid\alpha}z_1)$$

an. Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich je drei der Grössen z als gebrochene lineare Functionen der vierten darstellen, und es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass die auftretenden linearen Functionen immer dieselben sind, einerlei, welche der vier Grössen z zur Darstellung benutzt wird. Aus den letzten Gleichungen ergeben sich nämlich fast unmittelbar die folgenden Relationen:

$$z_2=\frac{1-z_1}{1+2z_1}, \qquad \tau^{\alpha\mid\beta}z_3=\frac{1-\tau^{\alpha\mid\beta}z_1}{1+2\tau^{\alpha\mid\beta}z_1}, \qquad \tau^{\beta\mid\alpha}z_4=\frac{1-\tau^{\beta\mid\alpha}z_1}{1+2\tau^{\beta\mid\alpha}z_1},$$

$$z_1=\frac{1-z_2}{1+2z_2}, \qquad \tau^{\alpha\mid\beta}z_4=\frac{1-\tau^{\alpha\mid\beta}z_2}{1+2\tau^{\alpha\mid\beta}z_2}, \qquad \tau^{\beta\mid\alpha}z_3=\frac{1-\tau^{\beta\mid\alpha}z_2}{1+2\tau^{\beta\mid\alpha}z_2},$$

$$z_4=\frac{1-z_3}{1+2z_3}, \qquad \tau^{\alpha\mid\beta}z_1=\frac{1-\tau^{\alpha\mid\beta}z_3}{1+2\tau^{\alpha\mid\beta}z_3}, \qquad \tau^{\beta\mid\alpha}z_2=\frac{1-\tau^{\beta\mid\alpha}z_3}{1+2\tau^{\beta\mid\alpha}z_3},$$

$$z_3=\frac{1-z_4}{1+2z_4}, \qquad \tau^{\alpha\mid\beta}z_2=\frac{1-\tau^{\alpha\mid\beta}z_4}{1+2\tau^{\alpha\mid\beta}z_4}, \qquad \tau^{\beta\mid\alpha}z_1=\frac{1-\tau^{\beta\mid\alpha}z_4}{1+2\tau^{\beta\mid\alpha}z_4}.$$

Berücksichtigt man nun, dass man als Product von irgend drei der durch die z bezeichneten Quotienten, wenn man auf die ursprüngliche Bedeutung der die Zähler und Nenner bildenden Symbole zurückgeht, immer einen Quotienten von zwei Thetacuben erhält, sodass:

$$\frac{(\alpha)^3}{(0)^3} = z_2 z_3 z_4, \quad \frac{(\beta)^3}{(0)^3} = z_1 z_3 z_4, \quad \frac{(\beta+\alpha)^3}{(0)^3} = z_1 z_2 z_4, \quad \frac{(\beta-\alpha)^3}{(0)^3} = z_1 z_2 z_3$$

wird, so erkennt man, dass durch eine jede der vier Grössen z die sämmtlichen in den Formeln (A_0), (B_0), (C_0), (D_0) nach passender Umformung auftretenden Quotienten von Thetaproducten und Thetacuben sich rational ausdrücken lassen, und dass in Folge der zwischen den Grössen z vorher aufgestellten Beziehungen die Form der entstehenden Ausdrücke unabhängig ist davon, welche der vier Grössen z man gewählt hat; für das Folgende soll die Grösse z_1 zu Grunde gelegt werden. Man erhält dann unmittelbar, wenn man, mit Unterdrückung des Index, $z_1 = z$ setzt:

$$(R_0) \quad \begin{gathered}
\frac{(\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha)}{(0 \mid \alpha \mid -\alpha)} = z, \\
\frac{(\alpha \mid \alpha+\beta \mid \alpha-\beta)}{(0 \mid \beta \mid -\beta)} = \frac{1-z}{1+2z}, \quad \frac{(\beta-\alpha \mid 2\beta \mid -2\alpha)}{(0 \mid \beta+\alpha \mid -\beta-\alpha)} = \tau^{\beta \mid \alpha} \frac{1-\tau^{\alpha \mid \beta} z}{1+2\tau^{\alpha \mid \beta} z}, \\
\frac{(\beta+\alpha \mid 2\beta \mid 2\alpha)}{(0 \mid \beta-\alpha \mid -\beta+\alpha)} = \tau^{\alpha \mid \beta} \frac{1-\tau^{\beta \mid \alpha} z}{1+2\tau^{\beta \mid \alpha} z}, \\
\frac{(\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{1-z^3}{1+8z^3}, \\
\frac{(\beta)^3}{(0)^3} = \frac{z(1+2z)}{1-z} \cdot \frac{1-z^3}{1+8z^3}, \quad \frac{(\beta+\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{\tau^{\alpha \mid \beta} z (1+2\tau^{\alpha \mid \beta} z)}{(1-\tau^{\alpha \mid \beta} z)} \cdot \frac{1-z^3}{1+8z^3}, \\
\frac{(\beta-\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{\tau^{\beta \mid \alpha} z (1+2\tau^{\beta \mid \alpha} z)}{1-\tau^{\beta \mid \alpha} z} \cdot \frac{1-z^3}{1+8z^3}.
\end{gathered}$$

Drückt man mit Hülfe der Gleichungen (R_0) die in den Relationen (A_0), (B_0), (C_0), (D_0) nach passender Umformung vorkommenden Quotienten von Thetaproducten und Thetacuben als Functionen von z aus, so wird eine jede dieser Gleichungen identisch erfüllt. Die vier oben aufgestellten Quotienten von Thetaproducten sind die einzigen Quotienten von je zwei der acht verschienenen Grössen $(\varrho \mid \varrho+\sigma \mid \varrho-\sigma)$, welche sich rational durch z ausdrücken; jeder andere derartige Quotient lässt sich dagegen, indem man ihn aus den vier Grössen $\frac{\vartheta[\alpha](0)}{\vartheta[0](0)}$, $\frac{\vartheta[\beta](0)}{\vartheta[0](0)}$, $\frac{\vartheta[\beta+\alpha](0)}{\vartheta[0](0)}$, $\frac{\vartheta[\beta-\alpha](0)}{\vartheta[0](0)}$ zusammensetzt und dann mit Hülfe der vier letzten Gleichungen (R_0) die Grösse z einführt, als dritte Wurzel aus einer rationalen Function von z darstellen.

9.

Es sollen jetzt auf Grund der allgemeinen Gleichungen (A), (B), (C), (D) die zwischen den Functionen $\vartheta[\varepsilon](v)$ bestehenden Beziehungen ermittelt werden. In den genannten Gleichungen kommen die neun Thetacuben $\vartheta^3\{\varrho\}(v)$ und die zwölf Producte von der Form $\vartheta\{\varrho \mid \varrho + \sigma \mid \varrho - \sigma\}(v)$ vor; nur Producte von dieser Form sollen in der Folge unter „Thetaproducten" verstanden werden. Diese einundzwanzig Functionen von v, von denen die ersten neun ebenfalls als Producte von der Form $\vartheta\{\varrho \mid \varrho + \sigma \mid \varrho - \sigma\}(v)$ angesehen werden können, wenn man für $[\sigma]$ die Charakteristik $[0]$ zulässt, gehören zu derselben Art, insofern als eine jede von ihnen, wenn man sie mit $f(v)$ bezeichnet, den Gleichungen:

$$f(v + \pi i) = f(v), \qquad f(v + a) = f(v)\, e^{-3(2v+a)}$$

genügt, und es können daher auf Grund eines bekannten Satzes*) der Functionentheorie durch drei beliebig gewählte dieser einundzwanzig Functionen, vorausgesetzt, dass diese drei linear unabhängig sind, die achtzehn übrigen linear ausgedrückt werden. Je achtzehn solche Gleichungen bilden dann einen vollständigen Ersatz der sämmtlichen in den Formeln (A), (B), (C), (D) enthaltenen Gleichungen, insofern als eine jede dieser letzteren aus ihnen, unter Zuhülfenahme der zwischen den Grössen $\vartheta[\varepsilon](0)$ bestehenden Relationen, abgeleitet werden kann. Im Folgenden soll diese Reduction der sämmtlichen Gleichungen auf achtzehn auf zwei Weisen durchgeführt werden, das eine Mal, indem man drei Producte von der Form $\vartheta\{\varrho \mid \varrho + \sigma \mid \varrho - \sigma\}(v)$, die zusammen alle neun Charakteristiken enthalten, zu Grunde legt, das andere Mal, indem man von drei Thetacuben ausgeht, deren Charakteristiken ein Dreiersystem bilden.

Zur Lösung der ersten Aufgabe übergehend, bezeichne man mit $[\alpha]$ eine beliebige der $[0]$ nicht congruente Charakteristik, mit $[\beta]$ eine zweite Charakteristik, welche keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ congruent ist. Drei Thetaproducte, welche zusammen alle neun Charakteristiken enthalten, können dann bei passend gewähltem $[\alpha]$ und $[\beta]$ immer in die Form $\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)$, $\vartheta\{\beta \mid \beta + \alpha \mid \beta - \alpha\}(v)$, $\vartheta\{-\beta \mid -\beta + \alpha \mid -\beta - \alpha\}(v)$ gebracht werden. Durch diese drei Producte als Fundamentalfunctionen sollen jetzt die achtzehn übrigen linear ausgedrückt werden.

Zu dem Ende setze man in (A) $[\varkappa] = [0]$, $[\xi] = [0]$ und lasse in der entstehenden Formel:

---

*) Prym, a. a. O. pag. 31.

$$(\mathrm{I}_1)\qquad [(\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha)+\tau^{\beta|\eta}(\eta+\beta\,|\,\eta+\beta+\alpha\,|\,\eta+\beta-\alpha)$$
$$+\tau^{\eta|\beta}(\eta-\beta\,|\,\eta-\beta+\alpha\,|\,\eta-\beta-\alpha)]\,\vartheta\{\eta\,|\,\eta+\beta\,|\,\eta-\beta\}(v)$$
$$=(0\,|\,\beta\,|-\beta)\,[\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)+\tau^{\beta|\eta}\vartheta\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\eta|\beta}\vartheta\{-\beta\,|-\beta+\alpha\,|-\beta-\alpha\}(v)]$$

an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ treten; man erhält dann zunächst die drei Thetaproducte:

$$\vartheta\{0\,|\,\beta\,|-\beta\}(v),\quad \vartheta\{\alpha\,|\,\alpha+\beta\,|\,\alpha-\beta\}(v),\quad \vartheta\{-\alpha\,|-\alpha+\beta\,|-\alpha-\beta\}(v)$$

durch die drei Fundamentalfunctionen ausgedrückt. Setzt man weiter in (I_1) an Stelle von $[\beta]$ die Charakteristik $[\beta+\alpha]$, so entsteht nach einfachen Umformungen die Formel:

$$(\mathrm{I}_2)\quad [(\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha)+\tau^{\beta-\eta|\beta-\alpha}(\eta+\beta\,|\,\eta+\beta+\alpha\,|\,\eta+\beta-\alpha)$$
$$+\tau^{\beta+\eta|\beta-\alpha}(\eta-\beta\,|\,\eta-\beta+\alpha\,|\,\eta-\beta-\alpha)]$$
$$\times\vartheta\{\eta\,|\,\eta+\beta+\alpha\,|\,\eta-\beta-\alpha\}(v)$$
$$=(0\,|\,\beta+\alpha\,|-\beta-\alpha)\,[\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)+\tau^{\beta+\alpha|\beta+\eta}\vartheta\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\beta+\alpha|\beta-\eta}\vartheta\{-\beta\,|-\beta+\alpha\,|-\beta-\alpha\}(v)],$$

und auf ähnliche Weise, indem man $[\beta-\alpha]$ an Stelle von $[\beta]$ setzt, die Formel:

$$(\mathrm{I}_3)\quad [(\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha)+\tau^{\beta-\eta|\beta+\alpha}(\eta+\beta\,|\,\eta+\beta+\alpha\,|\,\eta+\beta-\alpha)$$
$$+\tau^{\beta+\eta|\beta+\alpha}(\eta-\beta\,|\,\eta-\beta+\alpha\,|\,\eta-\beta-\alpha)]$$
$$\times\vartheta\{\eta\,|\,\eta+\beta-\alpha\,|\,\eta-\beta+\alpha\}(v)$$
$$=(0\,|\,\beta-\alpha\,|-\beta+\alpha)\,[\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)+\tau^{\beta-\alpha|\beta+\eta}\vartheta\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\beta-\alpha|\beta-\eta}\vartheta\{-\beta\,|-\beta+\alpha\,|-\beta-\alpha\}(v)].$$

Die Formel (I_2) liefert für $[\eta]=[0]$, $[\beta-\alpha]$, $[-\beta+\alpha]$ die Ausdrücke für die drei Producte:

$$\vartheta\{0\,|\,\beta+\alpha\,|-\beta-\alpha\}(v),\quad \vartheta\{\beta-\alpha\,|\,2\beta\,|-2\alpha\}(v),\quad \vartheta\{-\beta+\alpha\,|\,2\alpha\,|-2\beta\}(v),$$

die Formel (I_3) für $[\eta]=[0]$, $[\beta+\alpha]$, $[-\beta-\alpha]$ die Ausdrücke für die drei noch übrigen Producte:

$$\vartheta\{0\,|\,\beta-\alpha\,|-\beta+\alpha\}(v),\quad \vartheta\{\beta+\alpha\,|\,2\beta\,|\,2\alpha\}(v),\quad \vartheta\{-\beta-\alpha\,|-2\alpha\,|-2\beta\}(v).$$

Es handelt sich jetzt noch darum, eine beliebige Function $\vartheta^3\{\zeta\}(v)$ durch die drei Fundamentalfunctionen auszudrücken. Setzt man in der Formel (C) $[\varkappa]=[0]$, lässt sodann an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[0]$, $[\beta]$, $[-\beta]$ treten und addirt linke wie rechte Seiten der entstehenden Gleichungen, so erhält man die Formel:

$$(\mathrm{II})\qquad 3(\zeta\,|\,\zeta+\alpha\,|\,\zeta-\alpha)\,\vartheta^3\{\zeta\}(v)$$
$$=[(0)^3+\tau^{\alpha|\zeta}(\alpha)^3+\tau^{\zeta|\alpha}(-\alpha)^3]\,\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\beta|\zeta}[(\beta)^3+\tau^{\alpha|\zeta+\beta}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\zeta+\beta|\alpha}(\beta-\alpha)^3]\,\vartheta\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\zeta|\beta}[(-\beta)^3+\tau^{\alpha|\zeta-\beta}(-\beta+\alpha)^3+\tau^{\zeta-\beta|\alpha}(-\beta-\alpha)^3]\,\vartheta\{-\beta\,|-\beta+\alpha\,|-\beta-\alpha\}(v),$$

welche die gewünschten Ausdrücke für die neun Thetacuben liefert, wenn man für $[\zeta]$ der Reihe nach die neun Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$, $[\beta]$, $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$, $[-\beta]$, $[-\beta+\alpha]$, $[-\beta-\alpha]$ setzt.

Zwischen den drei auf den rechten Seiten von (I), (II) als Fundamentalfunctionen auftretenden Thetaproducten besteht zwar keine lineare Relation, jedoch sind dieselben durch eine homogene Gleichung dritten Grades mit einander verknüpft. Man gelangt zu derselben auf folgende Weise. Lässt man in der Gleichung (II) an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ treten und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{(0)^3+(\alpha)^3+(-\alpha)^3}{(0|\alpha|-\alpha)} = C_0,$$

$$\frac{(\beta)^3+\tau^{\alpha|\beta}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\beta|\alpha}(\beta-\alpha)^3}{(0|\alpha|-\alpha)} = \frac{(-\beta)^3+\tau^{\beta|\alpha}(-\beta+\alpha)^3+\tau^{\alpha|\beta}(-\beta-\alpha)^3}{(0|\alpha|-\alpha)} = C$$

so entstehen die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
3\vartheta^3\{\,0\,\}(v) &= C_0\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v) + C\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)\\
&\quad + C\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v),\\
3\vartheta^3\{\,\alpha\,\}(v) &= C_0\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v) + \tau^{\beta|\alpha}C\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)\\
&\quad + \tau^{\alpha|\beta}C\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v),\\
3\vartheta^3\{-\alpha\}(v) &= C_0\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v) + \tau^{\alpha|\beta}C\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)\\
&\quad + \tau^{\beta|\alpha}C\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v).
\end{aligned}$$

Multiplicirt man linke und rechte Seiten dieser drei Gleichungen mit einander und beachtet dabei, dass identisch:

$$(a+b+c)(a+\tau^{\alpha|\beta}b+\tau^{\beta|\alpha}c)(a+\tau^{\beta|\alpha}b+\tau^{\alpha|\beta}c) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

ist, auch, dass der eingeführten abgekürzten Bezeichnung entsprechend die Beziehung:

$$\vartheta^3\{0\}(v)\vartheta^3\{\alpha\}(v)\vartheta^3\{-\alpha\}(v) = \vartheta^3\{0|\alpha|-\alpha\}(v)\tau^{|\alpha|}.\tau^{|\alpha|}$$

besteht, so erhält man zunächst:

$$\begin{aligned}
(C_0^3-27\tau^{|\alpha|}\cdot\tau^{|\alpha|})\vartheta^3\{0|\alpha|-\alpha\}(v) &+ C^3\vartheta^3\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)\\
&+ C^3\vartheta^3\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)\\
-3C_0C^2\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)\,&\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)\\
&\times\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v) = 0.
\end{aligned}$$

Nun findet man aber mit Hülfe der Gleichungen (R_0) des Art. 8 leicht, dass:

$$C_0^3 - 27\tau^{|\alpha|}\cdot\tau^{|\alpha|} = C^3$$

ist; dividirt man daher linke und rechte Seite der obigen Gleichung durch C^3 und ersetzt dann in dem auftretenden Quotienten $\frac{C_0}{C}$ die

Grössen C_0 und C durch das, was sie bedeuten, so erhält man schliesslich die gewünschte Gleichung dritten Grades*) in der Gestalt:

$$
\text{(III)} \qquad \begin{aligned}
&\vartheta^3\{0|\alpha|-\alpha\}(v) \\
&+\vartheta^3\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)+\vartheta^3\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v) \\
&-3\,\frac{(0)^3+(\alpha)^3+(-\alpha)^3}{(\beta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\beta}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\beta\,|\,\alpha}(\beta-\alpha)^3}\,\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)\,\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v) \\
&\qquad\times\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)=0.
\end{aligned}
$$

Das System der drei im Vorigen als Fundamentalfunctionen benutzten Thetaproducte ist durch die Wahl der Charakteristik $[\alpha]$ vollständig bestimmt, insofern als die drei Producte, von dritten Einheitswurzeln abgesehen, immer wieder erhalten werden, wenn man an Stelle von $[\beta]$ irgend eine andere der fünf bei bestimmten $[\alpha]$ zulässigen Charakteristiken setzt. Da aber weiter das System der drei Producte auch in sich übergeht, wenn man $[\alpha]$ mit $[-\alpha]$ vertauscht, so erkennt man, dass man im Ganzen nur vier verschiedene Systeme von je drei Producten der betrachteten Art und daher auch nur vier wesentlich verschiedene Systeme von Gleichungen (I), (II), (III) erhält, wenn man an Stelle der Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ auf alle möglichen Weisen specielle Charakteristiken einführt. Betrachtet man $[\alpha]$ und $[\beta]$ als feste Charakteristiken, so erhält man die drei noch übrigen Systeme, indem man $[\alpha]$, $[\beta]$ einmal durch $[\beta]$, $[\alpha]$, dann durch $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$, endlich durch $[\beta-\alpha]$, $[\beta+\alpha]$ ersetzt.

Die zweite der oben gestellten Aufgaben bezieht sich auf den Fall, wo drei Thetacuben, deren Charakteristiken ein Dreiersystem bilden, als Fundamentalfunctionen zu Grunde gelegt werden. Bezeichnet man mit $[\eta]$ eine beliebige, mit $[\alpha]$ eine der $[0]$ nicht congruente Charakteristik, so können drei solche Thetacuben bei passender Wahl von $[\eta]$ und $[\alpha]$ stets in die Form $\vartheta^3\{\eta\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)$ gebracht werden.

Um durch diese zunächst einen anderen Thetacubus $\vartheta^3\{\zeta\}(v)$ auszudrücken, setze man in der Formel (B) der Reihe nach $[\varkappa]=[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ und eliminire aus den so entstehenden drei Gleichungen die beiden Functionen $\vartheta^3\{\zeta+\alpha\}(v)$, $\vartheta^3\{\zeta-\alpha\}(v)$. Führt man die etwas weitläufige Rechnung aus und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{(\eta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\eta+\zeta}(\eta+\alpha)^3+\tau^{\eta+\zeta\,|\,\alpha}(\eta-\alpha)^3}{(\zeta)^3+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}(\zeta-\alpha)^3}=c_1,$$

$$\frac{(\eta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\eta-\zeta}(\eta+\alpha)^3+\tau^{\eta-\zeta\,|\,\alpha}(\eta-\alpha)^3}{(\zeta)^3+(\zeta+\alpha)^3+(\zeta-\alpha)^3}=c_2,$$

*) Vergl. Bianchi, a. a. O. pag. 240.

$$\frac{(\eta)^3 + \tau^{\alpha \mid \eta}(\eta+\alpha)^3 + \tau^{\eta \mid \alpha}(\eta-\alpha)^3}{(\zeta)^3 + \tau^{\alpha \mid \zeta}(\zeta+\alpha)^3 + \tau^{\zeta \mid \alpha}(\zeta-\alpha)^3} = c_3,$$

so erhält man die Formel:

$$(\mathrm{I}') \qquad 3\tau^{\zeta \mid \eta}\vartheta^3\{\zeta\}(v)$$
$$=(c_1+c_2+c_3)\vartheta^3\{\eta\}(v)+\tau^{\eta \mid \alpha}(c_1+\tau^{\zeta \mid \alpha}c_2+\tau^{\alpha \mid \zeta}c_3)\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\alpha \mid \eta}(c_1+\tau^{\alpha \mid \zeta}c_2+\tau^{\zeta \mid \alpha}c_3)\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v);$$

mit Hülfe derselben kann man jeden der sechs von den drei Fundamentalfunctionen verschiedenen Thetacuben durch diese drei ausdrücken, während sie für $[\zeta]=[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ in eine Identität übergeht.

Um weiter die Formeln zu erhalten, welche die zwölf Thetaproducte durch die drei zu Grunde gelegten Cuben ausdrücken, setze man in (C) $[\varkappa]=[0]$; man erhält dann zunächst die Formel:

$$(\mathrm{II}_1') \qquad \vartheta\{\zeta|\zeta+\alpha|\zeta-\alpha\}(v)$$
$$=\tau^{\eta \mid \zeta}\frac{(\eta \mid \eta+\alpha \mid \eta-\alpha)}{(\zeta)^3+\tau^{\alpha \mid \eta+\zeta}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\eta+\zeta \mid \alpha}(\zeta-\alpha)^3}$$
$$\left[\vartheta^3\{\eta\}(v)+\tau^{\alpha \mid \eta+\zeta}\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)+\tau^{\eta+\zeta \mid \alpha}\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)\right],$$

welche die Ausdrücke für die drei bei festgehaltener Charakteristik $[\alpha]$ in der Form $\vartheta\{\zeta \mid \zeta+\alpha \mid \zeta-\alpha\}(v)$ darstellbaren Producte liefert. Irgend eines der neun noch übrigen Producte kann nun, wenn man unter $[\beta]$ eine Charakteristik versteht, welche keiner der drei Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ congruent ist, bei passend gewählten $[\beta]$ und $[\zeta]$ in der Form $\vartheta\{\zeta \mid \zeta+\beta \mid \zeta-\beta\}(v)$ dargestellt werden. Um ein solches Product durch die drei Fundamentalfunctionen auszudrücken, stelle man dasselbe mittelst der Formel (I) als lineare Function der drei Producte $\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)$, $\vartheta\{\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha\}(v)$, $\vartheta\{-\beta \mid -\beta+\alpha \mid -\beta-\alpha\}(v)$ dar und ersetze dann jedes dieser drei Producte mit Hülfe der Formel (II_1') durch die ihm entsprechende lineare Function der Cuben $\vartheta^3\{\eta\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)$; vereinigt man sodann die auftretenden Constanten in passender Weise und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{(\eta|\eta+\beta|\eta-\beta)+\tau^{\alpha|\eta+\zeta}(\eta+\alpha|\eta+\alpha+\beta|\eta+\alpha-\beta)+\tau^{\eta+\zeta|\alpha}(\eta-\alpha|\eta-\alpha+\beta|\eta-\alpha-\beta)}{(\zeta)^3+\tau^{\zeta|\alpha}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\alpha|\zeta}(\zeta-\alpha)^3}=c_1',$$

$$\frac{(\eta|\eta+\beta|\eta-\beta)+\tau^{\alpha|\eta-\zeta}(\eta+\alpha|\eta+\alpha+\beta|\eta+\alpha-\beta)+\tau^{\eta-\zeta|\alpha}(\eta-\alpha|\eta-\alpha+\beta|\eta-\alpha-\beta)}{(\zeta)^3+(\zeta+\alpha)^3+(\zeta-\alpha)^3}=c_2',$$

$$\frac{(\eta|\eta+\beta|\eta-\beta)+\tau^{\alpha \mid \eta}(\eta+\alpha|\eta+\alpha+\beta|\eta+\alpha-\beta)+\tau^{\eta \mid \alpha}(\eta-\alpha|\eta-\alpha+\beta|\eta-\alpha-\beta)}{(\zeta)^3+\tau^{\alpha|\zeta}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\zeta|\alpha}(\zeta-\alpha)^3}=c_3',$$

so erhält man die gewünschte Formel in der Gestalt:

$$(\mathrm{II}_2') \qquad 3\tau^{\zeta\,|\,\eta}\vartheta\{\zeta\,|\,\zeta+\beta\,|\,\zeta-\beta\}(v)$$
$$=(c_1'+c_2'+c_3')\vartheta^3\{\eta\}(v)+\tau^{\eta\,|\,\alpha}(c_1'+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}c_2'+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}c_3')\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\alpha\,|\,\eta}(c_1'+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}c_2'+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}c_3')\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v).$$

Ebenso wie bei der vorhergehenden Untersuchung die drei als Fundamentalfunctionen zu Grunde gelegten Thetaproducte, so sind auch hier die drei Cuben $\vartheta^3\{\eta\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)$ durch eine homogene Gleichung dritten Grades verknüpft. Setzt man nämlich in (II_1') $[\eta]=[\zeta]$, so entsteht die Formel:

$$(\mathrm{III}_0') \qquad \vartheta^3\{\eta\}(v)+\tau^{\eta\,|\,\alpha}\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)+\tau^{\alpha\,|\,\eta}\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)$$
$$-\frac{(\eta)^3+\tau^{\eta\,|\,\alpha}(\eta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\,|\,\eta}(\eta-\alpha)^3}{(\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha)}\vartheta\{\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha\}(v)=0,$$

welche unmittelbar die gewünschte Gleichung dritten Grades ergibt, wenn man das letzte Glied der linken Seite auf die rechte schafft und dann unter Berücksichtigung der Relation:

$$\vartheta^3\{\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha\}(v)=\tau^{|\alpha|}\vartheta^3\{\eta\}(v)\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)$$

linke und rechte Seite zur dritten Potenz erhebt. In diesem Sinne soll die Gleichung (III_0') nicht als besonderer Fall der Gleichung (II_1') sondern als Repräsentant der zwischen den drei als Fundamentalfunctionen gewählten Cuben bestehenden Relation angesehen werden.

Das System der Gleichungen (I′), (II′), (III′) ist durch die drei als Fundamentalfunctionen zu Grunde gelegten Thetacuben, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die drei Charakteristiken $[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ vollständig bestimmt. Diese drei Charakteristiken bilden immer ein Dreiersystem, und es giebt daher, da nach Früherem nur zwölf verschiedene Dreiersysteme existiren, auch nur zwölf verschiedene Systeme von Gleichungen (I′), (II′), (III_0'). Betrachtet man $[\alpha]$ als eine feste Charakteristik und bezeichnet mit $[\beta]$ eine Charakteristik, welche keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ congruent ist, so gehen diese zwölf Systeme von Gleichungen aus dem hier aufgestellten hervor, indem man an Stelle des Charakteristikenpaares $[\eta]$, $[\alpha]$ der Reihe nach die zwölf Paare $[0]$, $[\alpha]$; $[\beta]$, $[\alpha]$; $[-\beta]$, $[\alpha]$; $[0]$, $[\beta]$; $[\alpha]$, $[\beta]$; $[-\alpha]$, $[\beta]$; $[0]$, $[\beta+\alpha]$; $[\beta-\alpha]$, $[\beta+\alpha]$; $[-\beta+\alpha]$, $[\beta+\alpha]$; $[0]$, $[\beta-\alpha]$; $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$; $[-\beta-\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ treten lässt.

10.

Die beiden im vorigen Artikel behandelten Aufgaben haben zu folgenden Resultaten geführt. Setzt man der ersten Aufgabe entsprechend:

$$\Phi_1 = \vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v), \quad \Phi_2 = \vartheta\{\beta \mid \beta + \alpha \mid \beta - \alpha\}(v),$$
$$\Phi_3 = \vartheta\{-\beta \mid -\beta + \alpha \mid -\beta - \alpha\}(v),$$

der zweiten Aufgabe entsprechend:

$$\Psi_1 = \vartheta[\eta](v), \quad \Psi_2 = \vartheta[\eta + \alpha](v), \quad \Psi_3 = \vartheta[\eta - \alpha](v),$$

so lässt sich eine jede der im vorigen Artikel definirten einundzwanzig Functionen sowohl durch die drei Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, auf Grund der Gleichungen (I), (II), als auch durch die drei Functionen Ψ_1^3, Ψ_2^3, Ψ_3^3, auf Grund der Gleichungen (I′), (II′), linear ausdrücken, und es sind zudem im ersten Falle die drei Functionen Φ durch eine Gleichung dritten Grades (Gleichung (III)) von der Form:

$$\text{(III)} \qquad \Phi_1^3 + \Phi_2^3 + \Phi_3^3 - \varkappa \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 = 0,$$

im zweiten Falle die drei Functionen Ψ durch eine Gleichung dritten Grades (Gleichung (III_0')) von der Form:

$$\text{(III′)} \qquad \Psi_1^3 + \tau' \Psi_2^3 + \tau'' \Psi_3^3 - \varkappa' \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 = 0$$

verknüpft, wobei $\varkappa$, $\varkappa'$ Constante, τ', τ'' dritte Einheitswurzeln bezeichnen.

Beachtet man nun, dass die Beziehungen zwischen den einundzwanzig Functionen $\vartheta^3\{\varrho\}(v)$, $\vartheta\{\varrho \mid \varrho + \sigma \mid \varrho - \sigma\}(v)$ durch Gleichungen dargestellt werden, welche sämmtlich in Bezug auf diese Functionen homogen sind, und dass in Folge dessen nur die Verhältnisse dieser einundzwanzig Functionen, also auch nur die Verhältnisse $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$, $\frac{\Phi_3}{\Phi_1}$, beziehlich $\frac{\Psi_2}{\Psi_1}$, $\frac{\Psi_3}{\Psi_1}$ in Betracht kommen, dass aber sowohl zwischen den beiden Quotienten $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ und $\frac{\Phi_3}{\Phi_1}$, als auch zwischen den beiden Quotienten $\frac{\Psi_2}{\Psi_1}$ und $\frac{\Psi_3}{\Psi_1}$, den soeben mit (III), (III′) bezeichneten Gleichungen entsprechend, eine Gleichung dritten Grades besteht, so ergibt sich schliesslich, dass die sämmtlichen Quotienten der einundzwanzig soeben bezeichneten Functionen, sowohl von den Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 als auch von den Functionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 ausgehend, durch eine einzige Hülfsvariable algebraisch ausgedrückt werden können. Gegen die Zugrundelegung der — als einfachste Functionen zunächst ins Auge zu fassenden — Functionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 spricht die äusserst complicirte Gestalt der dann zur Anwendung kommenden Gleichungen (I′), (II′), während bei der Zugrundelegung der Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 und dadurch bedingter Anwendung der Gleichungen (I), (II), (III) die Endausdrücke sich ungemein einfach gestalten. Es zeigt sich also auch hier, ebenso wie bei der früheren Untersuchung über die Nullwerthe der Functionen, dass nicht bei den Thetacuben oder, was dasselbe, bei den einfachen Functionen $\vartheta[\varrho](v)$, sondern bei den Theta-

producten die geeignete Grundlage für die beabsichtigte Darstellung zu suchen ist. Dem entsprechend soll im Folgenden diese Darstellung unter Zugrundelegung von drei Thetaproducten als Fundamentalfunctionen durchgeführt werden.

Zu dem Ende gehe man auf die Gleichung (III) zurück, dividire linke und rechte Seite durch $\vartheta^3\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)$ und ersetze die Constante mit Hülfe der Gleichungen (R_0) durch den ihr entsprechenden Ausdruck in z; man erhält dann:

$$1+\left(\frac{\vartheta\{\beta\mid\beta+\alpha\mid\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}\right)^3+\left(\frac{\vartheta\{-\beta\mid-\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}\right)^3$$

$$-\frac{1+2z^3}{z^2}\left(\frac{\vartheta\{\beta\mid\beta+\alpha\mid\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}\right)\left(\frac{\vartheta\{-\beta\mid-\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}\right)=0.$$

Setzt man nun:

$$\frac{\vartheta\{\beta\mid\beta+\alpha\mid\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}+\frac{\vartheta\{-\beta\mid-\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}=2Z,$$

$$\frac{\vartheta\{\beta\mid\beta+\alpha\mid\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}-\frac{\vartheta\{-\beta\mid-\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}=2Z',$$

oder, was dasselbe:

$$\frac{\vartheta\{\beta\mid\beta+\alpha\mid\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}=Z+Z',\quad \frac{\vartheta\{-\beta\mid-\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}=Z-Z'$$

und führt diese Grössen Z, Z' in die obige Gleichung ein, so geht dieselbe über in:

$$1+2Z^3+6ZZ'^2-\frac{1+2z^3}{z^2}(Z^2-Z'^2)=0,$$

und es ergibt sich daraus für Z' der Ausdruck:

$$Z'=\sqrt{\frac{Z^2(1+2z^3)-z^2(1+2Z^3)}{1+2z^3+6z^2Z}}.$$

Man hat daher schliesslich, wenn man zur Abkürzung:

$$\frac{Z^2(1+2z^3)-z^2(1+2Z^3)}{1+2z^3+6z^2Z}=R$$

setzt:

$$(1)\qquad \frac{\vartheta\{\beta\mid\beta+\alpha\mid\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}=Z+\sqrt{R},$$

$$(2)\qquad \frac{\vartheta\{-\beta\mid-\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)}=Z-\sqrt{R}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (I), (II) lassen sich nun ohne Mühe die achtzehn noch übrigen Quotienten ebenfalls als Functionen von Z

darstellen. Dividirt man nämlich linke und rechte Seiten der Gleichungen (I), (II) durch $\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)$, führt dann an Stelle von $[\eta]$ beziehlich $[\zeta]$ die angegebenen speciellen Charakteristiken ein und ersetzt die beiden rechts auftretenden Quotienten von Thetaproducten jedesmal durch die soeben für sie gefundenen Functionen von Z, die vorkommenden Constanten aber durch die sich aus den Gleichungen (R_0) dafür ergebenden Ausdrücke in z, so erhält man zunächst aus den Gleichungen (I) für die neun übrigen denselben Nenner $\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)$ besitzenden Quotienten von Thetaproducten, wenn man noch zur Abkürzung:

$$\frac{(0 \mid \alpha \mid -\alpha) + 2(\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha)}{(0 \mid \beta \mid -\beta)} = \sqrt[3]{\frac{\tau^{|\alpha|}(1+2z)(1-z)^2}{\tau^{|\beta|}z^2}} = \Delta_1,$$

$$\frac{(0 \mid \alpha \mid -\alpha) + 2\tau^{\alpha|\beta}(\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha)}{(0 \mid \beta+\alpha \mid -\beta-\alpha)} = \sqrt[3]{\frac{\tau^{|\alpha|}(1+2\tau^{\alpha|\beta}z)(1-\tau^{\alpha|\beta}z)^2}{\tau^{|\beta+\alpha|}\tau^{\beta|\alpha}z^2}} = \Delta_2,$$

$$\frac{(0 \mid \alpha \mid -\alpha) + 2\tau^{\beta|\alpha}(\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha)}{(0 \mid \beta-\alpha \mid -\beta+\alpha)} = \sqrt[3]{\frac{\tau^{|\alpha|}(1+2\tau^{\beta|\alpha}z)(1-\tau^{\beta|\alpha}z)^2}{\tau^{|\beta-\alpha|}\tau^{\alpha|\beta}z^2}} = \Delta_3$$

setzt, nach leichten Umformungen die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\vartheta\{0 \mid \beta \mid -\beta\}(v)}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_1}\{1+2Z\}, \tag{3}$$

$$\frac{\vartheta\{\alpha \mid \alpha+\beta \mid \alpha-\beta\}(v)}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_1}\{1-Z+(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta})\sqrt{R}\}, \tag{4}$$

$$\frac{\vartheta\{-\alpha \mid -\alpha+\beta \mid -\alpha-\beta\}(v)}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_1}\{1-Z-(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta})\sqrt{R}\}, \tag{5}$$

$$\frac{\vartheta\{0 \mid \beta+\alpha \mid -\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_2}\{1+2\tau^{\alpha|\beta}Z\}, \tag{6}$$

$$\frac{\vartheta\{\beta-\alpha \mid 2\beta \mid -2\alpha\}(v)}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_2}\tau^{\beta|\alpha}\{1-\tau^{\alpha|\beta}Z+(1-\tau^{\beta|\alpha})\sqrt{R}\}, \tag{7}$$

$$\frac{\vartheta\{-\beta+\alpha \mid 2\alpha \mid -2\beta\}(v)}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_2}\tau^{\beta|\alpha}\{1-\tau^{\alpha|\beta}Z-(1-\tau^{\beta|\alpha})\sqrt{R}\}, \tag{8}$$

$$\frac{\vartheta\{0 \mid \beta-\alpha \mid -\beta+\alpha\}(v)}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_3}\{1+2\tau^{\beta|\alpha}Z\}, \tag{9}$$

$$\frac{\vartheta\{\beta+\alpha \mid 2\beta \mid 2\alpha\}(v)}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_3}\tau^{\alpha|\beta}\{1-\tau^{\beta|\alpha}Z+(1-\tau^{\alpha|\beta})\sqrt{R}\}, \tag{10}$$

$$\frac{\vartheta\{-\beta-\alpha \mid -2\alpha \mid -2\beta\}(v)}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_3}\tau^{\alpha|\beta}\{1-\tau^{\beta|\alpha}Z-(1-\tau^{\alpha|\beta})\sqrt{R}\}. \tag{11}$$

In derselben Weise ergeben sich aus den Gleichungen (II), wenn man zur Abkürzung:

$$\frac{9\,(0\mid\alpha\mid-\alpha)}{(0)^3+8\,(\alpha)^3}=\sqrt[3]{\tau^{|\alpha|}(1+8z^3)(1-z^3)^2}=\Delta$$

setzt, für die neun den neun Thetacuben entsprechenden Quotienten die folgenden Ausdrücke:

$$(12)\quad \frac{\vartheta^3\{0\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=\frac{1}{\Delta}\{1+2z^3+6z^2Z\},$$

$$(13)\quad \frac{\vartheta^3\{\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=\frac{1}{\Delta}\{1+2z^3-3z^2Z+(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta})3z^2\sqrt{R}\},$$

$$(14)\quad \frac{\vartheta^3\{-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=\frac{1}{\Delta}\{1+2z^3-3z^2Z-(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta})3z^2\sqrt{R}\},$$

$$(15)\quad \frac{\vartheta^3\{\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=\frac{1}{\Delta}\{3z^2+(1+3z^2+2z^3)Z+(1-3z^2+2z^3)\sqrt{R}\},$$

$$(16)\quad \frac{\vartheta^3\{\beta+\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=\frac{1}{\Delta}\{3\tau^{\beta|\alpha}z^2+(1+3\tau^{\beta|\alpha}z^2+2z^3)\tau^{\alpha|\beta}Z$$
$$+(1-3\tau^{\beta|\alpha}z^2+2z^3)\tau^{\alpha|\beta}\sqrt{R}\},$$

$$(17)\quad \frac{\vartheta^3\{\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=\frac{1}{\Delta}\{3\tau^{\alpha|\beta}z^2+(1+3\tau^{\alpha|\beta}z^2+2z^3)\tau^{\beta|\alpha}Z$$
$$+(1-3\tau^{\alpha|\beta}z^2+2z^3)\tau^{\beta|\alpha}\sqrt{R}\},$$

$$(18)\quad \frac{\vartheta^3\{-\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=\frac{1}{\Delta}\{3z^2+(1+3z^2+2z^3)Z-(1-3z^2+2z^3)\sqrt{R}\},$$

$$(19)\quad \frac{\vartheta^3\{-\beta+\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=\frac{1}{\Delta}\{3\tau^{\alpha|\beta}z^2+(1+3\tau^{\alpha|\beta}z^2+2z^3)\tau^{\beta|\alpha}Z$$
$$-(1-3\tau^{\alpha|\beta}z^2+2z^3)\tau^{\beta|\alpha}\sqrt{R}\},$$

$$(20)\quad \frac{\vartheta^3\{-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=\frac{1}{\Delta}\{3\tau^{\beta|\alpha}z^2+(1+3\tau^{\beta|\alpha}z^2+2z^3)\tau^{\alpha|\beta}Z$$
$$-(1-3\tau^{\beta|\alpha}z^2+2z^3)\tau^{\alpha|\beta}\sqrt{R}\}.$$

Die hier gewonnenen zwanzig Gleichungen, welche die links stehenden Quotienten als Functionen der nämlichen unabhängigen Veränderlichen Z darstellen, können, zusammen mit den früher für die Constanten $\vartheta[\varepsilon](0)$ erhaltenen Ausdrücken (R_0), als vollständiger Ersatz nicht nur der sämmtlichen aus den Formeln (A), (B), (C), (D) hervorgehenden Gleichungen, sondern aller überhaupt existirenden

Relationen zwischen den einundzwanzig auf dasselbe Argument v bezogenen Functionen $\vartheta^3\{\varrho\}(v)$, $\vartheta\{\varrho \mid \varrho+\sigma \mid \varrho-\sigma\}(v)$ angesehen werden.

Die bei dieser Darsteilung benutzte Grösse:

$$Z = \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)} + \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}$$

ist als Function von v betrachtet eine gerade Function und nimmt für $v=0$ den Werth z an; die von Z abhängige Grösse:

$$\sqrt{R} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)} - \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}$$

dagegen ist eine ungerade Function von v, die als solche für $v=0$ verschwindet. Die zwanzig aufgestellten Gleichungen bleiben daher richtig, wenn man darin gleichzeitig $v=0$, $Z=z$, $\sqrt{R}=0$ setzt; die so entstehenden Gleichungen können als vollständiger Ersatz der Gleichungen (R_0) angesehen werden, insofern als sie ebenso wie diese alle Relationen zwischen den Grössen $(\varrho)^3$ und $(\varrho|\varrho+\sigma|\varrho-\sigma)$ liefern.

Das System der zwanzig Gleichungen (1), (2), ..., (20) ist ebenso wie das der früheren Gleichungen (I), (II), (III), aus dem es abgeleitet wurde, durch die Wahl der Charakteristik $[\alpha]$ völlig bestimmt, und es entstehen weiter, ebenso wie dort, wenn man an Stelle der Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ auf alle möglichen Weisen specielle Charakteristiken einführt, im Ganzen nur vier verschiedene Systeme von Gleichungen. Betrachtet man $[\alpha]$, $[\beta]$ als feste Charakteristiken, so erhält man aus dem hier aufgestellten Systeme die drei noch übrigen, wenn man $[\alpha]$, $[\beta]$ einmal durch $[\beta]$, $[\alpha]$, dann durch $[\beta-\alpha]$, $[\beta+\alpha]$, endlich durch $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ ersetzt. Die diesen vier Systemen entsprechenden Grössen Z sollen durch Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 bezeichnet werden, sodass also:

$$Z_1 = \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)} + \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)},$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\beta|-\beta\}(v)} + \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\alpha|-\alpha+\beta|-\alpha-\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\beta|-\beta\}(v)},$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)} + \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta+\alpha|2\alpha|-2\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)},$$

$$Z_4 = \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta+\alpha|2\beta|2\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha\}(v)} + \frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta-\alpha|-2\alpha|-2\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha\}(v)}$$

ist. Die früher eingeführten Constanten z_1, z_2, z_3, z_4 stehen dann in directem Zusammenhange mit diesen Grössen, insofern als für $v=0$

$Z_1 = z_1,\ Z_2 = z_2,\ Z_3 = z_3,\ Z_4 = z_4$ wird. Es bestehen weiter aber auch zwischen den vier Functionen Z dieselben Beziehungen wie zwischen den vier Constanten z. Drückt man nämlich mit Hülfe der oben aufgestellten Gleichungen (3), (4), ..., (11), welche die Grösse $Z = Z_1$ enthalten, die mit Z_2, Z_3, Z_4 bezeichneten Functionen durch die Grösse $Z = Z_1$ aus, so ergeben sich unmittelbar die Gleichungen:

$$Z_2 = \frac{1 - Z_1}{1 + 2Z_1},\quad Z_3 = \tau^{\beta|\alpha} \frac{1 - \tau^{\alpha|\beta} Z_1}{1 + 2\tau^{\alpha|\beta} Z_1},\quad Z_4 = \tau^{\alpha|\beta} \frac{1 - \tau^{\beta|\alpha} Z_1}{1 + 2\tau^{\beta|\alpha} Z_1},$$

welche dieselbe Form besitzen wie die früher für die Constanten z gefundenen und für $v = 0$ in dieselben übergehen.

Würzburg, im Februar 1883.

Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale.

Von

M. Tichomandritzky in Charkow.

Nachdem Jacobi in seinen Vorlesungen über die elliptischen Transcendenten gezeigt hatte, dass die ganze Theorie der elliptischen Functionen sehr leicht aus den Eigenschaften der Θ-Function sich entwickeln lässt, gewann die Frage nach dem natürlichsten Uebergange von den elliptischen Integralen zur Θ-Function das grösste Interesse; und doch kannten wir bis jetzt keine gute Antwort auf dieselbe; indessen braucht man nur etwas zu dem, was die „Fundamenta" enthalten, hinzuzufügen, um eine solche zu erhalten, wie ich sogleich zeigen werde.

Ich nehme als Ausgangspunkt die Gleichung:

$$(1)\quad Z(u+v)-Z(u-v)-2Z(v)=-\frac{2k^2\sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}v\sin^2\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v},$$

die man in § 53 der „Fundamenta" findet, und die als ein Ausdruck des Additionstheorems der elliptischen Integrale 2. Gattung angesehen werden kann, denn aus dieser wird ja der gewöhnliche Ausdruck für letzteres gefunden.

Am leichtesten wird diese Gleichung durch eine einfache Umformung der Gleichung

$$(2)\quad \int_0^u[\sin^2\operatorname{am}(u+v)-\sin^2\operatorname{am}(u-v)]\,du$$
$$=\frac{2\sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}v\sin^2\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v}$$

erhalten, wie es Jacobi im § 49 seiner „Fundamenta" gethan hatte; da er sich aber dort der Legendre'schen Bezeichnungsart und nicht der seinigen, die uns als eine viel bessere erscheint, bedient hatte, so mag hier mit Benutzung der letztern diese Umformung um so mehr wiedergegeben sein, als wir hiebei zum ersten Male einem Verfahren begegnen, das, nach einer gewissen Integration wiederholt, uns ganz

natürlich zur Θ-Function führen wird. Wir multipliciren zu diesem Zwecke die Gleichung (2) beiderseits mit k^2. Sodann wollen wir ihre linke Seite folgendermassen umformen:

$$\int_0^u k^2 \sin^2 \operatorname{am}(u+v)\,du - \int_0^u k^2 \sin^2 \operatorname{am}(u-v)\,du$$

$$= \int_v^{u+v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw - \int_{-v}^{u-v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw$$

$$= \int_0^{u+v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw - \int_0^{v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw$$

$$- \int_0^{u-v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw - \int_{-v}^{0} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw$$

$$= \int_0^{u+v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw - \int_0^{u-v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw - 2\int_0^{v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw,$$

$\left(\text{indem} \int_{-v}^{0} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw = \int_0^{v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw, \text{ wie leicht zu sehen ist}\right)$.

Wenn man nun noch zur Abkürzung

$$(3) \qquad \int_0^w k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw = J(w)$$

setzt, nimmt jetzt die Gleichung (2) folgende Gestalt an:

$$(4) \quad J(u+v) - J(u-v) - 2J(v) = \frac{2k^2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v\, \Delta \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v},$$

und zieht man dieselbe von der Identität:

$$\frac{J_1}{K}(u+v) - \frac{J_1}{K}(u-v) - 2\frac{J_1}{K} v = 0,$$

wo J_1 die durch die Gleichung

$$J_1 = \int_0^K k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\,dw = J(K)$$

definirte Constante ist, ab, so hat man die Gleichung (1), da nach Jacobi

$$Z(w) = \frac{J_1}{K} w - J(w)$$

ist.

Die Gleichung (1) können wir nun auch so schreiben:

(a) $Z(u+v)-Z(u-v)-2Z(v)=\frac{\partial}{\partial v}\log(1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v)$;

integrirt man sie jetzt mit Somoff*) nach v von Null an, so erhält man die Gleichung:

$$(5)\quad \int_0^v Z(u+v)dv-\int_0^v Z(u-v)dv-2\int_0^v Z(v)dv=\log(1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v).$$

Nun ist aber:

$$\int_0^v Z(u+v)dv=\int_u^{u+v} Z(w)dw=\int_0^{u+v} Z(w)dw-\int_0^u Z(w)dw,$$

$$-\int_0^v Z(u-v)dv=\int_u^{u-v} Z(w)dw=\int_0^{u-v} Z(w)dw-\int_0^u Z(w)dw;$$

also kann man der Gleichung (5) folgende Gestalt geben:

$$(6)\quad \int_0^{u+v} Z(w)\,dw+\int_0^{u-v} Z(w)\,dw-2\int_0^u Z(w)\,dw-2\int_0^v Z(w)\,dw$$
$$=\log(1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v),$$

und indem man vom Logarithmus zur Zahl selbst übergeht, erhält man daraus die folgende Gleichung:

$$(7)\quad \frac{e^{\int_0^{u+v} Z(w)\,dw}\cdot e^{\int_0^{u-v} Z(w)\,dw}}{\left[e^{\int_0^u Z(w)\,dw}\right]^2\cdot\left[e^{\int_0^v Z(w)\,dw}\right]^2}=1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v.$$

In dieser Gleichung stellt jeder Factor der linken Seite den Werth einer und derselben Function

$$e^{\int_0^w Z(w)\,dw}$$

für die verschiedenen Werthe des Argumentes w vor. Für $w=0$ wird diese Function $=1$; will man aber den Anfangswerth der Function unbestimmt lassen, so muss man

$$(8)\quad e^{\int_0^w Z(w)\,dw}=\frac{\Theta(w)}{\Theta(0)}$$

---

*) „Elemente der Theorie der Elliptischen Functionen.“ St. Petersburg 1850. S. 178. (Russisch).

setzen, was die Gleichung (6) § 52 der „Fundamenta" ist, wo sie durch Integration der Reihe (1) § 47 für $Z(w)$ und den nachfolgenden Uebergang vom Logarithmus zur Zahl gefunden wird, hier aber als eine natürliche Folge des Additionstheorems der Integrale 2. Gattung erscheint, was den Vortheil darbietet, dass die betreffende Reihenentwicklung mit Leichtigkeit aus den Eigenschaften der Θ-Function gewonnen werden kann, wie es von Jacobi in seinen Vorlesungen gezeigt wurde. Durch Einführung unserer neuen Bezeichnung in die Gleichung (7) nimmt diese folgende Gestalt an:

$$(9)\qquad \frac{[\Theta(0)]^2\cdot\Theta(u+v)\cdot\Theta(u-v)}{[\Theta(u)]^2\cdot[\Theta(v)]^2}=1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v.$$

Somoff, welcher der erste zu sein scheint, der die Integration der Gleichung (1) nach v vorgenommen hatte, brachte die von ihm so erhaltene Gleichung (5) nicht auf die Form der Gleichung (6), sondern mit Hilfe der Gleichung (8), die von ihm nach der Methode von Jacobi erhalten war, auf die Form der Gleichung (9)*). Es war also die Transformation der Gleichung (5) in die Gleichung (6), die der Theorie der elliptischen Functionen fehlte, damit sie schon längst im Besitze eines natürlichen Ueberganges von den elliptischen Integralen zur Θ-Function war, und die ihrem Wesen nach dieselbe ist, die den Verfasser der „Fundamenta" von der Gleichung (2) zur Gleichung (1) geführt hatte. Man kann die Gleichung (6) auch als eine Umformung der bekannten Gleichung

$$(10)\qquad \int_0^u\int_0^v \varkappa[\sin^2\operatorname{am}(u+v)-\sin^2\operatorname{am}(u-v)]\,du\,dv$$
$$=\log(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v)$$

ansehen**), denn wenn man das durch Integration nach u erhaltene Resultat der gleich erwähnten Jacobi'schen Transformation unterwirft, so kommt man sogleich zur Gleichung (5) von Somoff, von welcher unsere Gleichung (6) eine weitere Umformung ist.

Ich will hier noch bemerken, dass man durch eine Integration derselben Gleichung (1), nur diesmal nach u, mit Hilfe derselben Transformation von selbst eine Gleichung von fundamentaler Bedeutung für die Integrale 3. Gattung:

---

*) Dieses Verfahren wurde später auch von Hrn. Handrikow in seiner „Elementartheorie der elliptischen Integrale und Functionen nebst einer Anwendung auf das Fundamentalproblem der Geodäsie." (Moskau. 1867. Russisch), wiederholt.

**) Diese Gleichung kommt explicite in den „Fundamenta" nicht vor, erhellt aber sogleich, wenn man die Gleichung (1) des § 49 daselbst mit der Gleichung (1) des § 55 vergleicht.

$$\Pi(u,v) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \,\Delta \operatorname{am} v \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v},$$

erhält, nämlich die Gleichung:

$$(11) \qquad \Pi(u,v) = u Z(v) + \frac{1}{2}\int_0^{u-v} Z(w)\,dw - \frac{1}{2}\int_0^{u+v} Z(w)\,dw.$$

Vertauscht man in dieser u mit v und zieht das so erhaltene Resultat von derselben ab, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass $\int_0^u Z(w)\,dw$ eine gerade Function ihres Argumentes ist, die Gleichung von Jacobi:

$$(12) \qquad \Pi(u,v) - \Pi(v,u) = u Z(v) - v Z(u),$$

die den Satz über die Vertauschung des Parameters mit dem Argument bei den Integralen 3. Gattung ausdrückt. Setzt man jetzt andererseits in dieselbe Gleichung (11) für die Integrale rechter Hand ihre Ausdrücke durch Θ-Functionen aus der Gleichung (8) ein, erhält man sogleich die wichtige Formel von Jacobi:

$$(13) \qquad \Pi(u,v) = u Z(v) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}.$$

Wie die Eigenschaften der $\Theta(w)$-Functionen aus der Definitionsgleichung (8) abzuleiten sind, ist bekannt (s. z. B. den Aufsatz von Hrn. Brill: „Ueber das Additionstheorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen". Mathemat. Ann. Bd. XVII, S. 100); darum brauche ich nicht darauf einzugehen.

Hätten wir statt der Gleichung (1) die Gleichung (4) als Ausgangspunkt genommen, so würden wir auf demselben Wege zur Definitionsgleichung der Function Al von Hrn. Weierstrass:

$$e^{-\int_0^w Z(w)\,dw} = \mathrm{Al}(w)$$

gelangt sein, worauf sich wieder alle Eigenschaften dieser Function ohne Mühe entwickeln lassen.

St. Petersburg, 20. Juni 1883.

Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte.

Von

Alfred Pringsheim in München.

I.

Historisches. — Fixirung des zu lösenden Problems.

Bedingt convergent heisst bekanntlich eine Reihe, deren Summe nur vermöge der verschiedenen Vorzeichen der einzelnen Terme einen bestimmten endlichen Grenzwerth besitzt, während die aus den absoluten Beträgen gebildete Reihe divergirt. Auf die Thatsache, dass solche Reihen bei Umordnung der Glieder verschiedene Summen liefern bezw. auch divergent werden können, dürfte wohl Dirichlet zuerst aufmerksam gemacht haben: in seiner berühmten Abhandlung über die arithmetische Progression*) (aus dem Jahre 1837) wird ausdrücklich erwähnt, dass von den beiden Reihen

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

die erste convergent, die zweite — durch eine einfache Umstellung der Glieder daraus hervorgehende — hingegen divergent sei, während die ähnlich gebildeten Reihen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

zwar beide convergiren, aber verschiedene Summen besitzen. Der Umstand, dass Dirichlet diese für die damalige Zeit doch wohl

*) „Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält." — Abh. der Berliner Akademie 1837. — In der Abhandlung über die Fourier'sche Reihe (Crelle's Journal, Bd. IV, 1829) wird zwar ebenfalls der wesentlich verschiedene Charakter von Reihen mit convergenter und solchen mit divergenter Modulreihe schon ausdrücklich betont, jedoch die hier in Rede stehende Eigenschaft der letzteren nicht erwähnt.

einigermassen überraschend erscheinende Behauptung ohne Beweis anführt und überhaupt von dieser merkwürdigen Erscheinung wie von etwas ziemlich selbstverständlichem spricht, legt die Vermuthung nahe, dass er selbst oder irgend ein anderer mathematischer Schriftsteller schon bei früherer Gelegenheit hiervon Erwähnung gethan: indessen ist es mir nicht gelungen, irgend welchen Beleg für eine derartige Annahme aufzufinden. Jedenfalls ist wohl aber Dirichlet zum mindesten der *erste* gewesen, welcher den wahren Grund für die Abhängigkeit solcher Reihensummen von der Anordnung der Glieder — nämlich die Divergenz der aus den absoluten Beträgen gebildeten Reihe — richtig erkannt und bei passender Gelegenheit immer wieder urgirt hat, so z. B. in einer zwei Jahre nach jener oben erwähnten publicirten zahlentheoretischen Abhandlung*) — freilich auch hier, ohne auf Beweise oder sonstige Einzelheiten einzugehen. In directem Gegensatze hierzu beschäftigt sich ein im nächsten Jahre erschienener Aufsatz von Ohm**) zwar mit der analytischen Herleitung der verschiedenen Summenwerthe, welche die von Dirichlet angeführte Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

bei gewissen Umstellungen der Glieder liefert, wohingegen dem Verfasser der wahre Grund einer derartigen Erscheinung noch völlig verborgen bleibt: er hält sie für eine Eigenthümlichkeit, die lediglich *numerischen* Reihen (im Gegensatze zu Potenzreihen) zukomme, und zieht daraus den merkwürdigen Schluss, dass man solche Reihen überhaupt aus der Analysis zu verbannen habe. Im übrigen beschränkt sich der Gesammtinhalt jenes Aufsatzes — trotz des scheinbar mehr versprechenden Titels — auf den Nachweis des einzigen Satzes, dass die Summe der obigen Reihe — in der ursprünglichen Anordnung — den Werth lg 2 hat, dagegen einen Zuwachs um die Grösse $\frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ erleidet, wenn die Anordnung so getroffen wird, dass immer auf p positive q negative Glieder folgen.

Von weitaus allgemeinerer Natur sind die hier ebenfalls zu erwähnenden Untersuchungen (1847), welche Eisenstein in seiner Abhandlung***) über die zur Entwicklung der elliptischen Functionen dienlichen Doppelproducte und gewisse damit im Zusammenhange stehende Reihen angestellt hat, namentlich auch insofern, als hier die

---

*) Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres. — Crelle's Journal Bd. 19, 1839. — cf. S. 329.

**) De nonnullis seriebus infinitis summandis. — Antritts-Programm zur Uebernahme der ordentlichen Professur. — Berlin 1839.

***) Crelle's Journal Bd. 35, S. 153. Forts. S. 185. Die verwandten Arbeiten von Cayley (Liouville's Journal, Serie I, Bd. X. 1845) und Schlaefli (Grunerts Archiv, Bd. XIV, 1853) gehen auf diesen Punkt nicht ausführlich ein.

bedingte Convergenz von *Doppel*reihen und die Möglichkeit, gewisse hierbei in Betracht kommende Kategorien von Gliederumstellungen analytisch zu fixiren, zum ersten Male erörtert wird: immerhin beziehen sich diese Untersuchungen, dem Zwecke der betreffenden Abhandlung gemäss, nur auf specielle Umordnungen zweier ganz *specieller Reihen*, nämlich der verallgemeinerten harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{\mu\alpha + \nu\beta + \gamma}$ (wo μ, ν alle ganzen Zahlenwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$ anzunehmen haben, während α, β, γ irgend welche festen complexen Grössen bedeuten) und der ebenfalls nur bedingt convergenten Doppelreihe $\sum \frac{(\mu\alpha + \nu\beta + \gamma)^2}{1}$, für welche die Theorie der einfach unendlichen Reihen kein Analogon bietet, da die entsprechende Reihe, nämlich $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} \frac{1}{(\mu\alpha + \gamma)^2}$ unbedingt convergirt.

Einen überaus wesentlichen Beitrag für die tiefere Erkenntniss des *allgemeinen* Charakters der bedingten Convergenz hat hingegen Riemann mit seiner Habilitationsschrift „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" (1854) geliefert: insbesondere wird dort*) gezeigt, dass eine Reihe der betrachteten Art bei verschiedener Anordnung der Glieder nicht bloss verschiedene Summen, sondern überhaupt jede beliebig vorgeschriebene Summe besitzt. Zum besseren Verständniss des folgenden möge die betreffende Stelle hier der Hauptsache nach angeführt werden. Die positiven Glieder der Reihe werden mit a_1, a_2, a_3, ..., die negativen mit $-b_1$, $-b_2$, $-b_3$, ... bezeichnet, $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$ werden als divergent, doch so, dass für $\nu = \infty$ $\lim a_\nu = 0$, $\lim b_\nu = 0$ vorausgesetzt. Sodann heisst es:

„Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth grösser als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da nun sowohl die Grössen a, als die Grössen b mit wachsendem Index zuletzt unendlich klein werden, so werden auch die Abweichungen von C, wenn man in der Reihe nur hinreichend weit fortgeht, beliebig klein werden, d. h. die Reihe wird gegen C convergiren."**)

*) Riemann, Gesammelte Werke S. 221.

**) Eine etwas weitere Ausführung des Riemann'schen Gedankens findet sich u. a. bei Dini in dem Aufsatze: Sui prodotti infiniti (Annali di Matematica, Serie II, T. II, p. 28); desgleichen in dessen Buche: Fondamenti par la teorica delle funzione di variabili reali (Pisa 1879) p. 95.

Diese Bemerkung Riemann's giebt also nicht nur einen Beweis dafür, dass eine solche Reihe jeden beliebigen Werth annehmen kann, sondern liefert zugleich auch eine bestimmte Methode, um eine solche Anordnung der Glieder herzustellen, dass ein beliebig vorgeschriebener Summenwerth zu Stande kommt. Immerhin ist aber diese Methode ein nur auf *numerische* Reihen anwendbares *Rechnungs*verfahren, sie giebt keinerlei Anhalt dafür, ob zwischen der zur Erzielung einer gewissen Werthveränderung vorzunehmenden Umordnung und dem Bildungsgesetze der Reihenglieder irgend welcher analytische Zusammenhang existirt, ja sie kann schwerlich auch nur dazu dienen, um etwa durch Induction derartige Gesetze vermuthen zu lassen.

Denn würde die Anwendung jener Methode bei der denkbar einfachsten und für eine bedingt convergente Reihe verhältnissmässig gut convergirenden Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu+1}$ sich schon ziemlich langwierig gestalten, sobald es sich um die Ausführung der betreffenden Rechnung für eine einigermassen grosse, zu irgend welchen allgemeinen Schlüssen Veranlassung gebenden Gliederzahl handelte, so wachsen die Schwierigkeiten nicht nur ganz erheblich, sobald an Stelle der rationalen Zahlen ν Irrationalitäten und Logarithmen treten, sondern die Anwendbarkeit jener Methode wird geradezu illusorisch, wenn die zu betrachtende Reihe einigermassen langsam convergirt — wie z. B. die Reihe $\sum (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\lg(\nu+1)}$, bei der noch die Glieder millionster Ordnung auf die erste Decimalstelle Einfluss haben. In der That ist denn auch trotz jenes Riemann'schen Satzes das oben erwähnte Beispiel der harmonischen Reihe (nebst einigen einfachen Modificationen) — wenigstens soweit ich die betreffende Litteratur controliren konnte — das einzige geblieben, bei der man einen bestimmten Zusammenhang zwischen einer gewissen Umordnung der Glieder und der hierdurch erzeugten Werthveränderung direct nachgewiesen hat. Auch der von Herrn Schlömilch bewiesene*), etwas allgemeiner erscheinende Satz:

„Wenn in der convergenten Reihe $s = \sum (-1)^\nu \cdot u_{\nu+1}$ die Glieder so umgestellt werden, dass immer p positive und q negative Terme auf einander folgen, so ist die Summe der neuen Reihe

$$S = s + \lim_{n=\infty} (n u_n) \cdot \frac{1}{2} \lg\left(\frac{p}{q}\right) \text{ —“}$$

ist, wie im weiteren noch deutlich werden wird, lediglich eine ganz unmittelbar aus dem Verhalten der harmonischen Reihe sich ergebende Folgerung.

Immerhin lassen sich schon auf ganz elementarem Wege auch

*) Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik, Bd. 18 (1873); S. 520.

andere Reihen construiren, welche bei einem bestimmten, verhältnissmässig einfachem Typus von Gliederumstellungen bestimmte, damit in erkennbarem Zusammenhange stehende Werthveränderungen erleiden. Als Beleg für diese Behauptung möge die folgende Reihe dienen, welche sogar von dem erwähnten Beispiele der harmonischen Reihe insofern einen gewissen Vorzug der Einfachheit hat, als sich die hierbei auftretenden Werthveränderungen ganz elementar bestimmen lassen (was dort nur mit Hülfe eines bestimmten Integrales ermöglicht wird), und die zugleich auch ein für Vorlesungszwecke ganz brauchbares Beispiel dafür giebt, wie unter Umständen eine rationale Zahl durch eine Folge von Irrationalzahlen definirt werden kann.

Es sei

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right\},$$

sodass also bei dieser Anordnung der Glieder $s = 0$. Ordnet man die Reihe so um, dass an Stelle von n positiven Gliedern $n + h$ treten, wo h eine mit n ebenfalls ins unendlich wachsende, noch näher zu bestimmende ganze positive Zahl bedeutet, so wird die neue Summe

$$s' = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{1}^{n+h} {}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right\} = \lim_{n=\infty} \sum_{n+1}^{n+h} {}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} = \lim s'_n$$

wo

$$s'_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+h}}$$

und daher

$$\frac{h}{\sqrt{n+1}} > s'_n > \frac{h}{\sqrt{n+h}}$$

eine Ungleichung, welche sofort zeigt, dass s'_n für $n = \infty$ dann und nur dann einen endlichen, von Null verschiedenen Werth annimmt, sobald h proportional mit $\sqrt{n}$ ins Unendliche wächst. Bezeichnet man nun mit a eine beliebige positive Zahl und setzt

$$h = E(a \cdot \sqrt{n})$$

(wenn $E(x)$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bedeutet), so hat man offenbar

$$\frac{h}{\sqrt{n+1}} = \frac{E(a\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}} < \frac{a \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}},$$

$$\frac{h}{\sqrt{n+h}} = \frac{E(a\sqrt{n})}{\sqrt{n+E(a\sqrt{n})}} > \frac{a \cdot \sqrt{n} - 1}{\sqrt{n + a\sqrt{n}}}$$

also

$$\frac{a \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > s'_n > \frac{a \cdot \sqrt{n} - 1}{\sqrt{n + a\sqrt{n}}}$$

und somit

$$\lim s'_n = s' = a$$

so dass also die Reihe

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{1}^{n+E(a\sqrt{n})} {}_{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right\}$$

die beliebig vorgeschriebene Summe a besitzt. Man kann nun zunächst diesem Resultate noch eine etwas einfachere Form geben. Sei etwa

$$a = \frac{q}{\sqrt{p}} \quad \text{(wo } p, q \text{ ganze, positive Zahlen bedeuten)}$$

und setzt man ausserdem

$$n = p \cdot m^2$$

so wird

$$n + E(a\sqrt{n}) = pm^2 + E\left(\frac{q}{\sqrt{p}} \cdot \sqrt{p} \, . m\right) = pm^2 + qm$$

und somit

$$\lim_{m=\infty} \left\{ \sum_{1}^{pm^2+qm} {}_{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sum_{1}^{pm^2} {}_{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right\} = \frac{q}{\sqrt{p}}$$

und dieser Ausdruck nimmt also je nach Wahl von p, q jeden beliebigen rationalen oder quadratisch-irrationalen Werth an. Zugleich lässt sich die hierbei stattfindende Beziehung zwischen der Anzahl der positiven und derjenigen der negativen Glieder durch eine nach einem einfachen Gesetze fortschreitende Anordnung der Glieder befriedigen. Da nämlich

$$pm^2 = p + 3p + 5p + \cdots + (2m - 1)p,$$
$$pm^2 + qm = (p + q) + (3p + q) + \cdots + ((2m - 1)p + q),$$

so wird man die zur Herstellung der Summe s' erforderliche Anordnung offenbar dadurch erzielen können, dass man zwar im allgemeinen je ein positives und ein negatives Glied alterniren lässt, jedoch nach den ersten p, den folgenden $3p$, den folgenden $5p$ Gliederpaaren u. s. f. jedesmal q positive Glieder einschaltet, also:

$$\begin{aligned} s' = {} & \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{p+q}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{p+q+1}} + \frac{1}{\sqrt{p+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4p+q}} - \frac{1}{\sqrt{4p}} + \frac{1}{\sqrt{4p+q+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4p+2q}} \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ = {} & \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} \left\{ \sum_{1}^{(2\nu+1)p} {}_{\varkappa} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu^2 p + \nu q + \varkappa}} - \frac{1}{\sqrt{\nu^2 p + \varkappa}} \right) + \sum_{1}^{q} {}_{\varkappa} \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)^2 p + \nu q + \varkappa}} \right\} = \frac{q}{\sqrt{p}} \, . \end{aligned}$$

(Für $p = 1$, $q = 1$ hat man also insbesondere:

$$s' = \sum_0^\infty \left\{ \sum_1^{2\nu+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu(\nu+1)+\varkappa}} - \frac{1}{\sqrt{\nu^2+\varkappa}} \right) + \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)(\nu+2)}} \right\} = 1.)$$

Zu bemerken ist hierbei übrigens, dass man behufs Erzielung einer convergenten Reihe mit der Summe $\frac{q}{\sqrt{p}}$ die betreffenden Terme nicht etwa einfach so anordnen dürfte, dass man auf je eine Gruppe von

$p + q \quad 3p + q \ldots \quad (2m - 1)p + q$ positiven Gliedern

bezüglich je eine Gruppe von

$p \quad 3p \quad (2m - 1)p$ negativen Gliedern

folgen lässt, weil in diesem Falle die Gruppen von Gliedern einerlei Zeichens in der Unendlichkeit nicht verschwindende, sondern bestimmte endliche Grenzwerthe besitzen. Man hat nämlich für eine solche Gruppe mit positivem Zeichen:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2p+nq+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2p+nq+(2n+1)p+q}} \begin{cases} < \dfrac{(2n+1)p+q}{\sqrt{n^2p+nq}} \\ > \dfrac{(2n+1)p}{\sqrt{(n+1)^2p+(n+1)q}} \end{cases}$$

und für eine Gruppe mit negativem Zeichen:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2p+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2p+(2n+1)p}} \begin{cases} < \dfrac{(2n+1)p}{\sqrt{n^2p}} \\ > \dfrac{(2n+1)p}{\sqrt{(n+1)^2p}} \end{cases}$$

und beide Ausdrücke besitzen offenbar für $n = \infty$ den Grenzwerth $2\sqrt{p}$, sodass also die Reihe bei dieser Anordnung der Glieder in den Grenzen $\frac{q}{\sqrt{p}}$ und $\frac{q}{\sqrt{p}} + 2\sqrt{p}$ oscilliren müsste — was bei der oben gegebenen Anordnung vermieden wird. Das hierher in Frage kommende Princip wird später noch allgemein erörtert werden.

Das oben entwickelte Beispiel und eine Anzahl ähnlicher — (es lässt sich nämlich, wie leicht zu übersehen, die eben angewandte Methode ohne weiteres auf die Untersuchung aller Reihen von der Form $\left\{\sum a_\nu - \sum a_\nu\right\}$ übertragen, sofern die beständig abnehmenden Grössen a_ν für $\nu = \infty$ merklich schwächer gegen Null convergiren als $\frac{1}{\nu}$) — führten mich auf die Vermuthung, dass für ganz allgemeine Classen bedingt convergirender Reihen ein einfacher analytischer Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze der Reihenglieder und dem zur Erzeugung einer gewissen Werthveränderung anzuwendenden *Umordnungsgesetze* sich angeben lassen müsse. Hierdurch würde dann das

durch jenen Riemann'schen Satz angeregte Problem zwar nicht in der Weise gelöst sein, dass man im Stande wäre, für eine aus zwei unbegrenzten, nach irgend welchem Gesetze fortschreitenden und schliesslich der Null zustrebenden Grössenfolgen (a_ν), $(-b_\nu)$ zu bildende Reihe durch ein analytisches Gesetz diejenige *Anordnung* der Glieder anzugeben, bei welcher eine bestimmte Summe s zum Vorschein kommt;*) wohl aber in der Weise, dass man aus einer beliebig gegebenen *convergenten* Anordnung jener Grössen, sowohl diejenige *Umordnung* analytisch bestimmen kann, bei welcher eine bestimmt vorgeschriebene *Werthveränderung* (bezw. wenn man die Summe für die ursprüngliche Anordnung kennt, eine bestimmt vorgeschriebene Summe) erzeugt wird, als auch umgekehrt im Stande ist, diejenige Werthveränderung anzugeben, welche einer beliebig vorgenommenen Umordnung entspricht.

Zunächst ist nun in Betreff der überhaupt möglichen Umordnungen noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen, der zwar sofort in die Augen fällt, aber, da er, wie mir scheint, noch nirgend eine besondere Erwähnung gefunden hat, hier ganz ausdrücklich hervorgehoben werden muss: nämlich dass bei den von Dirichlet angeführten und ähnlichen Beispielen, wie auch beim Beweise des Riemann'schen Satzes nur eine ganz specielle Art von Gliederumstellungen in Betracht gezogen wird. Es erscheinen hierbei sowohl die positiven Glieder unter sich, als auch die negativen von vornherein in einer durch die Folge der Indices ein für allemal festgesetzten Ordnung, und bei den verschiedenen Anordnungen der beiden Grössenfolgen kommt als unterscheidendes Merkmal nur das in Betracht, in welcher Anzahl und an welchen Stellen die negativen Glieder in ihrer bestimmten Reihenfolge in die ebenfalls feststehende Reihe der positiven Glieder eingeschaltet werden. Unveränderlich bleibt also hierbei immer die Anordnung innerhalb der beiden durch das Vorzeichen verschiedenen Hauptgruppen, veränderlich ist nur die relative Stellung der beiden Gruppen zu einander, d. h. schliesslich das Verhältniss zwischen der Anzahl der positiven und derjenigen der negativen Glieder, welche in einer beliebigen Anzahl von Gliedern enthalten sind. Ich will der Kürze wegen alle aus einer bestimmten anfänglichen Gliederanordnung auf die eben beschriebene Weise herzustellenden *Umordnungen* als solche *erster Art* bezeichnen.

Nun kann man aber von einer irgendwie als Ausgangspunkt festgesetzten Anordnung der gesammten Glieder u. a. auch in der Weise

*) Dies würde in der That in Verbindung mit dem folgenden nichts geringeres als die Möglichkeit involviren, eine beliebig vorgelegte Reihe durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck zu summiren, sodass die Lösbarkeit des Problems in dieser Form — selbst bei Einführung der später noch anzugebenden Beschränkungen — von vornherein ausgeschlossen erscheinen muss.

zu unendlich vielen anderen übergehen, dass man das Verhältniss zwischen der Anzahl der positiven und derjenigen der negativen Glieder (oder anders ausgedrückt die Stellung der Vorzeichen) ungeändert lässt, dagegen die Glieder einerlei Vorzeichens unter sich permutirt. Es ist klar, dass auch derartige Umordnungen, sobald sie eine schliesslich unendlich gross werdende Verschiebung der Glieder zur Folge haben, den Werth der Reihensumme im allgemeinen verändern werden: denn wenn auch die Permutation von Gliedern einerlei Zeichens, die eine *convergente* Reihe bilden, deren Summe nicht alterirt, so wird etwas analoges hier, wo die beiden aus Gliedern einerlei Zeichens zusammengesetzten Reihen *divergiren*, nicht stattfinden, vielmehr wird durch Verschiebungen der gedachten Art das Zunahmeverhältniss der beiden unbegrenzt wachsenden Reihensummen, und damit also die Summe der Gesammtreihe sich ändern. Hätte man z. B. die Reihe

$$s=\sum_0^\infty{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\cdots=0$$

und man ordnet jetzt die Reihe der positiven Glieder so an, dass auf ein Glied mit ungeradem Nenner immer zwei Glieder mit geradem Nenner folgen (bei im übrigen aufsteigender Zahlenfolge) — also folgendermassen:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=\sum_0^\infty{}^{\nu}\left(\frac{1}{2\nu+1}+\frac{1}{4\nu+2}+\frac{1}{4\nu+4}\right)$$

während etwa die Reihe der negativen Glieder ungeändert bleiben soll; so wird, wenn man wieder wie ursprünglich jedem positiven Gliede ein negatives zuordnet, die neue Reihe folgende Form annehmen:

$$s'=\sum_0^\infty{}^{\nu}\left\{\frac{1}{2\nu+1}-\frac{1}{3\nu+1}+\frac{1}{4\nu+2}-\frac{1}{3\nu+2}+\frac{1}{4\nu+4}-\frac{1}{3\nu+3}\right\}.$$

Bezeichnet man nun mit s_n' die Summe der ersten $6n$ Glieder dieser Reihe, so hat man

$$\begin{aligned}s_n'&=\sum_1^n{}^{\nu}\frac{1}{2\nu-1}+\sum_1^{2n}{}^{\nu}\frac{1}{2\nu}-\sum_1^{3n}{}^{\nu}\frac{1}{\nu}\\&=\sum_1^{2n}{}^{\nu}\frac{1}{\nu}+\sum_{n+1}^{2n}{}^{\nu}\frac{1}{2\nu}-\sum_1^{3n}{}^{\nu}\frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}\sum_{n+1}^{2n}{}^{\nu}\frac{1}{\nu}-\sum_{2n+1}^{3n}{}^{\nu}\frac{1}{\nu}.\end{aligned}$$

Da nun allgemein

$$\lim_{n=\infty}\sum_{pn+1}^{qn}{}^{\nu}\frac{1}{\nu}=\lim_{n=\infty}\left\{\frac{\frac{1}{n}}{p+\frac{1}{n}}+\frac{\frac{1}{n}}{p+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{q}\right\}=\int_p^q\frac{dx}{x}=\lg\frac{q}{p}$$

so wird

$$s' = \lim s''_n = \frac{1}{2} \lg 2 - \lg \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \lg \frac{8}{9}.$$

Analog würde sich ergeben, dass z. B. die folgende Reihe:

$$\sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} - \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} \right\}$$

bei Anwendung der nämlichen Umordnung divergent wird.

Eine Umordnung, wie sie eben betrachtet wurde, mag nun eine solche *zweiter Art* genannt werden. Alle überhaupt möglichen Umordnungen sind dann offenbar entweder solche von der ersten oder von der zweiten Art, oder sie lassen sich durch eine successive Vornahme je einer Umordnung erster und zweiter Art herstellen.

Es besteht aber zwischen den Umordnungen erster und denen zweiter Art bezw. den aus Combination beider Arten hervorgegangenen ein sehr wesentlicher Unterschied. Bei den ersteren handelt es sich lediglich um eine relative Verschiebung *zweier in sich unveränderlicher Folgen* entgegengesetzter Elemente und es kommt für den vorliegenden Zweck schliesslich nur auf die relative Häufigkeit der Elemente einer jeden Kategorie an; im zweiten Falle hingegen handelt es sich um die Betrachtung aller möglichen Permutationen von zweimal *unendlichvielen Elementen*. In Folge dessen wird aber offenbar die Möglichkeit einer alle wesentlich verschiedenen Fälle umfassenden analytischen Behandlung nur für die Umordnungen erster Art vorliegen, während die entsprechende Untersuchung für die Umordnungen zweiter Art sich in eine unbegrenzte Anzahl von Specialfällen zersplittern müsste. Aus diesem Grunde soll im folgenden lediglich von Umordnungen der ersten Art die Rede sein — zumal ja, wie der Beweis des Riemann'schen Satzes zeigt, *alle* möglichen Werthveränderungen schon durch diese allein hervorgebracht werden können. Wenn also im folgenden zuweilen schlechthin von „allen möglichen Umordnungen" gesprochen wird, so sind damit immer ausschliesslich diejenigen erster Art gemeint. —

II.

Zurückführung des Problem's auf die Untersuchung sogenannter singulärer Reihenreste. — Princip der Aequivalenz.

Es sei die Reihe $\sum_0^\infty u_\nu$ bedingt convergent und besitze in der durch die Folge der Indices bestimmten Anordnung eine gewisse Summe s. Bezeichnet man dann mit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die positiven, mit $-b_0, -b_1, -b_2, \ldots$ die negativen Glieder dieser Reihe (in der

festgesetzten Anordnung genommen), sodass also a_ν, b_ν wesentlich positiv sind und $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, $\lim\limits_{\nu=\infty} b_\nu = 0$ wird, so kann man die Beziehung zwischen der Anzahl der positiven und derjenigen der negativen Glieder innerhalb einer beliebig grossen Gesammtzahl von Gliedern in der allgemeinsten Weise offenbar so darstellen, dass man schreibt:

$$(1)\qquad s = \sum_0^\infty {}^\nu u_\nu = \lim_{\varrho=\infty} \left\{ \sum_0^{m_\varrho} {}^\nu a_\nu - \sum_0^{n_\varrho} {}^\nu b_\nu \right\} = \lim s_\varrho$$

wo m_ϱ, n_ϱ irgend welche positive, *ganzzahlige* mit wachsendem ϱ niemals abnehmende und für $\varrho = \infty$ selbst ins Unendliche wachsende Functionen einer positiven, stetig veränderlichen Grösse ϱ sind. Da es hierbei offenbar keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit ist, wenn wir annehmen, dass sich die m_ϱ, n_ϱ auf einmal nie um mehr als eine Einheit ändern, so können wir etwa setzen

$$(2)\qquad m_\varrho = E(\varphi(\varrho)), \qquad n_\varrho = E(\psi(\varrho))$$

wo $\varphi(\varrho)$, $\psi(\varrho)$ als stetige Functionen von ϱ zu denken sind.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Reihe (1) einen bestimmten endlichen Grenzwerth zur Summe hat, wird dann ausgedrückt durch die Beziehung

$$(3)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \left\{ \sum_{m_\varrho}^{m_\varrho+\sigma} {}^\nu a_\nu - \sum_{n_\varrho}^{n_\varrho+\sigma} {}^\nu b_\nu \right\} = 0 \qquad \text{(für jedes beliebige positive } \sigma)$$

d. h. es muss sich eine Zahl A angeben lassen, sodass für $\varrho \geqq A$ und beliebig grosse, positive Werthe von σ

$$\left| \sum_{m_\varrho}^{m_\varrho+\sigma} {}^\nu a_\nu - \sum_{n_\varrho}^{n_\varrho+\sigma} {}^\nu b_\nu \right| < \delta$$

wird, wo δ eine Grösse von vorgeschriebener Kleinheit bedeutet. Die durch Gleichung (1) definirte Grösse s lässt sich in diesem Falle folgendermassen in die übliche Form einer unendlichen Reihe mit bestimmter Gliederanordnung setzen:

$$(4)\qquad s = \sum_0^{m_\alpha} {}^\nu a_\nu - \sum_0^{n_\alpha} {}^\nu b_\nu + \sum_\alpha^\infty {}^\varrho \left\{ \sum_{1+m_\varrho}^{m_\varrho+1} {}^\nu a_\nu - \sum_{1+n_\varrho}^{n_\varrho+1} {}^\nu b_\nu \right\}$$

wenn etwa α den kleinsten Werth von ϱ bezeichnet, für welchen gleichzeitig m_α und $n_\alpha \geqq 0$, $m_{\alpha+1}$ und $n_{\alpha+1} \geqq 1$ sind. Diese letztere Schreibweise unterscheidet sich von der in Gleichung (1) angewandten wesentlich dadurch, dass jetzt ϱ nur noch ganzzahlig, also nicht mehr stetig variiren kann: doch ist dieser Umstand für das Zustandekommen des Grenzwerthes s bedeutungslos, da ja (wie die Bedingung (3) lehrt)

der Ausdruck (1) derselben Grenze s zustreben muss, gleichgültig, ob man ϱ continuirlich oder sprungweise ins Unendliche wachsen lässt. Nur ist in Betreff der Reihe (4) zu beachten, dass dieselbe nicht nach einzelnen Gliedern a_ν, $-b_\nu$, sondern nach ganzen Gliedergruppen von der Form

$$\left\{\sum_{1+m_\varrho}^{m_{\varrho+1}} a_\nu - \sum_{1+n_\varrho}^{n_{\varrho+1}} b_\nu\right\}$$

fortschreitet — d. h. nur, wenn man die Reihe mit dem *Schlussgliede* einer solchen Gruppe abbricht, wird man sicher sein können, für hinlänglich grosse Werthe von ϱ einen von s beliebig wenig abweichenden Werth zu erhalten. Man wird also die Reihe (4) zunächst nicht als eine aus den einzelnen Gliedern a_ν, $-b_\nu$ (in vorgeschriebener Ordnung) bestehende und in diesem Sinne bedingt convergirende aufzufassen haben: denn aus der Bedingung (3) folgt nur, dass

$$\lim_{\varrho=\infty}\left\{\sum_{1+m_\varrho}^{m_{\varrho+1}} a_\nu - \sum_{1+n_\varrho}^{n_{\varrho+1}} b_\nu\right\} = 0$$

wobei aber

$$\lim \sum_{1+m_\varrho}^{m_{\varrho+1}} a_\nu = \lim \sum_{1+n_\varrho}^{n_{\varrho+1}} b_\nu = C$$

einen von Null verschiedenen (endlichen oder unendlich grossen) Werth besitzen kann. In Folge dessen wird aber die Reihe (4), wenn man sie als solche in den einzelnen Gliedern a_ν, $-b_\nu$ auffasst, d. h. wenn man ihre Summe als Grenzwerth desjenigen Ausdrucks ansieht, welcher durch Abbrechen der Reihe an einer ganz *beliebigen* Stelle entsteht, in den Grenzen s und $s+C$ oscilliren, sie wird also ins besondere nur dann convergiren, wenn $C=0$ ist, wenn also ausser der Bedingung (3) noch die folgende erfüllt ist

$$(5) \qquad \lim \sum_{1+m_\varrho}^{m_{\varrho+1}} a_\nu = \lim \sum_{1+n_\varrho}^{n_{\varrho+1}} b_\nu = 0.$$

Betrachtet man also die durch die Schreibweise (4) angedeutete (allerdings auf der *willkürlichen* Supposition lediglich ganzzahliger ϱ basirende) Gliederanordnung speciell als die durch die besondere Wahl von m_ϱ, n_ϱ *definirte*, so wird man nur in dem letzteren Falle (d. h. wenn Gleichung (5) stattfindet) sagen können, es werde durch (m_ϱ, n_ϱ) eine *convergente* Anordnung der Glieder a_ν, $-b_\nu$ *definirt.*

Hätte man z. B. $a_\nu = b_\nu = \frac{1}{\nu+1}$ und der Reihe nach

1) $m_\varrho = n_\varrho = p\varrho$, 2) $m_\varrho = n_\varrho = \varrho^p$, 3) $m_\varrho = n_\varrho = p^\varrho$

wo p eine positive, ganze Zahl $\geqq 2$ bedeutet. Sei dann etwa

$$\lim \left\{ \sum_1^{p\varrho} \frac{1}{\nu} - \sum_1^{p\varrho} \frac{1}{\nu} \right\} = s_1, \qquad \lim \left\{ \sum_1^{\varrho^p} \frac{1}{\nu} - \sum_1^{\varrho^p} \frac{1}{\nu} \right\} = s_2,$$

$$\lim \left\{ \sum_1^{p^\varrho} \frac{1}{\nu} - \sum_1^{p^\varrho} \frac{1}{\nu} \right\} = s_3$$

(sodass also $s_1 = s_2 = s_3 = 0$), so werden nach dem oben gesagten hierdurch folgende Gliederanordnungen definirt sein:

$$s_1 = \sum_0^\infty \left\{ \sum_{p\varrho+1}^{p(\varrho+1)} \frac{1}{\nu} - \sum_{p\varrho+1}^{p(\varrho+1)} \frac{1}{\nu} \right\}, \qquad s_2 = \sum_0^\infty{}_\varrho \left\{ \sum_{\varrho^p+1}^{(\varrho+1)^p} \frac{1}{\nu} - \sum_{\varrho^p+1}^{(\varrho+1)^p} \frac{1}{\nu} \right\},$$

$$s_3 = \sum_0^\infty{}_\varrho \left\{ \sum_{p^\varrho+1}^{p^{\varrho+1}} \frac{1}{\nu} - \sum_{p^\varrho+1}^{p^{\varrho+1}} \frac{1}{\nu} \right\}.$$

Nun ist

$$\sum_{p\varrho+1}^{p(\varrho+1)} \frac{1}{\nu} = \frac{1}{p\varrho+1} + \cdots + \frac{1}{p\varrho+p} < \frac{p}{p\varrho+1},$$

$$\sum_{\varrho^p+1}^{(\varrho+1)^p} \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\varrho^p+1} + \cdots + \frac{1}{\varrho^p + p\cdot\varrho^{p-1} + \frac{1}{2}p(p-1)\varrho^{p-2} + \cdots}$$

$$< \frac{p\varrho^{p-1} + \frac{1}{2}p(p-1)\cdot\varrho^{p-2} + \cdots}{\varrho^p+1}$$

sodass der Grenzwerth dieser beiden Ausdrücke für $\varrho = \infty$ verschwindet: mithin werden in den beiden ersten Fällen durch die gegebene Wahl von m_ϱ, n_ϱ convergente Anordnungen definirt. Dagegen wird im dritten Falle

$$\lim_{\varrho=\infty} \sum_{p^\varrho+1}^{p^{\varrho+1}} \frac{1}{\nu} = \lim_{\lambda=\infty} \sum_{\lambda+1}^{p\lambda} \frac{1}{\nu} = \lg p,$$

sodass also diese Wahl von m_ϱ, n_ϱ *keine* convergente Anordnung definirt (die betreffende Reihe oscillirt in den Grenzen 0 und $\lg p$).

Man wird nun in solchen Fällen, wo auf die angegebene Weise eine convergente Reihe nicht zu Stande kommt, die Convergenz nachträglich dadurch hervorbringen können, dass man über die Anordnung der Glieder a_ν, $-b_\nu$ innerhalb der einzelnen Gruppen noch eine besondere Verfügung trifft — wie etwa bei dem in I gegebenen Beispiele,*)

*) Seite 460 und 461.

wo für $a_\nu = b_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$ und $m_\varrho = p\varrho^2 + q\varrho$, $n_\varrho = p\varrho^2$ die Convergenz der betreffenden Reihe erst durch eine specielle Anordnung der Glieder innerhalb der einzelnen Gruppen erzielt wurde. Dass sich übrigens derartige Anordnungen für die Untergruppen in jedem Falle, wo m_ϱ, n_ϱ eine convergente Anordnung nicht definiren, während s einen bestimmten endlichen Werth besitzt, stets herstellen lassen müssen, zeigt eine einfache Ueberlegung, ganz analog derjenigen, welche zum Beweise des Riemann'schen Satzes diente.

Statt in dieser Weise zu verfahren, kann man aber auch von vornherein die Functionen $m_\varrho = E(\varphi(\varrho))$, $n_\varrho = E(\psi(\varrho))$ durch Substitution einer neuen Variablen an Stelle von ϱ transformiren und bei geeigneter Wahl dieer Substitution eine convergente Gliederanordnung erzielen. Insbesondere lässt sich dies stets dadurch erreichen, dass man $\varphi(\varrho)$ oder $\psi(\varrho)$ zur unabhängigen Variablen macht. Setzt man etwa

$$\varphi(\varrho) = m$$

wodurch

$$\psi(\varrho) = \chi(m)$$

werden mag, so hat man, wenn m von vornherein nur ganzzahlig genommen wird,

$$s = \lim_{m=\infty} \left\{ \sum_0^m a_\nu - \sum_0^{[\chi(m)]} b_\nu \right\},$$

wenn noch an Stelle des Symbols $E(x)$ das kürzere $[x]$ eingeführt wird. Die hierdurch definirte Gliederanordnung, nämlich

$$s = \sum_0^\alpha a_\nu - \sum_0^{[\chi(\alpha)]} b_\nu + \sum_\alpha^\infty{}^m \left\{ a_{m+1} - \sum_{[\chi(m)]+1}^{[\chi(m+1)]} b_\nu \right\}$$

ist stets convergent, da die nach Analogie von Gleichung (3) gebildete, bei Existenz eines bestimmten Grenzwerthes s stets erfüllte Bedingung

$$\lim_{m=\infty} \left\{ a_{m+1} - \sum_{[\chi(m)]+1}^{[\chi(m+1)]} b_\nu \right\}$$

hier — wegen $\lim a_{m+1} = 0$ — stets auch die folgende

$$\lim \sum_{[\chi(m)]+1}^{[\chi(m+1)]} b_\nu = 0$$

nach sich zieht, ein Oscilliren der Reihe also ausgeschlossen ist.

Ebenso würde sich durch eine Substitution von der Form

$$\psi(\varrho) = n, \qquad \varphi(\varrho) = \omega(n)$$

ergeben

$$s = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{0}^{[\omega(n)]} a_\nu - \sum_{0}^{n} b_\nu \right\} = \sum_{0}^{[\omega(\beta)]} a_\nu = \sum_{0}^{\beta} b_\nu + \sum_{\beta}^{\infty}{}_{n} \left\{ \sum_{[\omega(n)]+1}^{[\omega(n+1)]} a_\nu - b_{n+1} \right\}$$

und man wird also allgemein setzen können

$$s = \lim \left\{ \sum_{0}^{m} a_\nu - \sum_{0}^{n} b_\nu \right\}$$

wo entweder n eine ganzzahlige Function der ganzen Zahl m oder umgekehrt, und in jedem dieser beiden Fälle eine convergente Anordnung durch (m, n) definirt ist.

Wird jetzt eine Umordnung der Glieder vorgenommen, bei welcher die positiven Glieder in grösserer Zahl auftreten als ursprünglich, also etwa auf n negative Glieder m' positive kommen, wo $m' > m$, so hat man als neuen Grenzwerth der Reihensumme

$$s' = \lim \left\{ \sum_{0}^{m'} a_\nu - \sum_{0}^{m} b_\nu \right\}$$

und die hierdurch definirte Neuanordnung der Glieder ist völlig bestimmt und convergent (bezw. in bestimmten Sinne divergent), wenn m' als Function von n oder auch — da zwischen n und m ebenfalls eine Functionalbeziehung stattfinden sollte — als Function von m gegeben ist. Um die bei dieser Umordnung resultirende positive Werthveränderung, nämlich

$$s' - s = \lim \sum_{m+1}^{m'} a_\nu \tag{6}$$

zu einer vorgeschriebenen zu machen, wird es also lediglich darauf ankommen, m' als Function von m so zu bestimmen, dass dieser Ausdruck für $m = \infty$ jenen vorgeschriebenen Werth zur Grenze hat. Und analog wird man jede neue Anordnung, bei welcher die negativen Glieder gegen früher überwiegen, in die Form setzen können

$$s'' = \lim \left\{ \sum_{0}^{m} a_\nu - \sum_{0}^{n'} b_\nu \right\} \quad (\text{wo } n' > n)$$

und die entsprechende negative Werthveränderung

$$s'' - s'' = - \lim \sum_{n+1}^{n'} b_\nu \tag{7}$$

wird alsdann durch geeignete Bestimmung von n' als Function von n eine vorgeschriebene Grösse erlangen.

Das Problem, eine bedingt convergente Reihe so umzuordnen, dass ihre Summe eine vorgeschriebene Werthveränderung erleidet, ist somit auf das folgende zurückgeführt:

Für den Rest einer aus lauter positiven Gliedern bestehenden divergenten Reihe solche Grenzen ausfindig zu machen, bezw. die obere Grenze als Function der unteren so zu bestimmen, dass ein bestimmter Grenzwerth zu Stande kommt.

Man könnte einen solchen Rest einer divergenten Reihe $\lim \sum_{m+1}^{m'} a_\nu$, wo m' nicht beliebig, sondern als bestimmte Function von m ins Unendliche wächst — nach Analogie eines von Cauchy für gewisse bestimmte Integrale eingeführten Ausdrucks — als *singulären Rest* bezeichnen, wie sich denn auch in der That die Untersuchung dieser Reste auf diejenige gewisser *singulärer Integrale* zurückführen lassen wird. Die Untersuchung dieser singulären Reste ist nun aber ganz allgemein ausführbar, wenn man die Grössen a_ν bezw. b_ν der Beschränkung unterwirft, dass

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} = 1$$

(wobei die a_ν, b_ν bei wachsendem Index in beliebigem Wechsel ab- und zunehmen können)

sein soll. Und zwar lässt sich hier zunächst zeigen, dass man, ohne die Gültigkeit der Resultate weiter einzuschränken, diese Bedingung bei allen ferneren Untersuchungen durch die wesentlich einfachere ersetzen darf, dass die für $\nu = \infty$ der Null zustrebenden Grössen a_ν, b_ν mit wachsendem Index niemals zunehmen sollen (dass dann auch immer $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim \frac{a_{\nu+1}}{b_\nu} = 1$ ist und nicht etwa < 1 sein kann, muss als selbstverständlich angenommen werden, weil sonst die Reihe der a_ν bezw. b_ν absolut convergiren würde und daher nur unbedingte Convergenz oder Divergenz der Gesammtreihe stattfinden könnte).

Ich führe bei dieser Gelegenheit für die folgenden Betrachtungen ausser den bereits auch anderwärts üblichen, soviel ich weiss, von Herrn Du Bois-Reymond herrührenden Bezeichnungen

$$1)\ f_1(x) \prec f_2(x), \quad 2)\ f_1(x) \sim f_2(x), \quad 3)\ f_1(x) \succ f_2(x)$$

(welche bekanntlich die Bedeutung haben, dass für unendlich wachsende Werthe der Variablen x der Quotient $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ 1) gegen Null convergirt; 2) endlich und von Null verschieden ist; 3) ins Unendliche wächst) noch die folgende ein:

$$4)\ f_1(x) \simeq A \cdot f_2(x)$$

(wo sich $f_2(x)$ eventuell auf eine Constante reduciren kann)

welche bedeuten soll, dass $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ für unendlich wachsende x dem Werthe

A zustrebt, welcher seinerseits Null, endlich oder unendlich sein kann, sodass also diese Beziehung je nach der Beschaffenheit von A jene ersten drei gemeinsam umfasst und insbesondere, wenn A endlich und bestimmt ist, den Grenzwerth von $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ganz direct angiebt, während die diesem Falle entsprechende Beziehung 2), nur aussagt, dass jener Grenzwerth weder Null noch unendlich gross ist. Sind $f_1(x)$, $f_2(x)$ für $x = \infty$ selbst endlich, so erhält offenbar die Beziehung 4) die Bedeutung einer gewöhnlichen Gleichung, sie ist in diesem Falle nur eine kürzere Schreibweise für

$$\lim f_1(x) = A \lim f_2(x), \quad (x = \infty).$$

Sollten in einer Relation der Form 4) mehrere Variablen oder Parameter vorhanden sein, sodass nicht zu erkennen wäre, welche dieser Grössen als unendlich werdend anzusehen ist, so soll dies in einer beigesetzten Klammer besonders bemerkt werden.

Mit Anwendung des obigen Zeichens wird nun die oben eingeführte Bedingung $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1$ folgendermassen lauten:

(8) $$a_{\nu+1} \cong a_\nu$$

Sei jetzt eine zweite Reihe von positiven Grössen a'_ν gegeben, welche der analogen Bedingung $a'_{\nu+1} \cong a'_\nu$ genügt und ausserdem zu jener ersten Reihe in der Beziehung steht, dass

(9) $a'_\nu \cong g\, a_\nu$ (wo g zunächst endlich und von Null verschieden) (welche zwei Bedingungen sich offenbar in die eine zusammenfassen lassen, dass für jedes *endliche* $\varkappa$ $a'_{\nu \pm \varkappa} \cong g\, a_\nu$ sein muss), so hat man

$$\sum_{m+1}^{m'}{}_\nu\, a'_\nu = \sum_{m+1}^{m'}{}_\nu\, \frac{a'_\nu}{a_\nu} \cdot a_\nu = M \cdot \sum_{m+1}^{m'}{}_\nu\, a_\nu$$

wo M einen Mittelwerth aus den Grössen

$$\frac{a'_{m+1}}{a_{m+1}}, \; \frac{a'_{m+2}}{a_{m+2}}, \; \ldots, \; \frac{a'_{m'}}{a_{m'}}$$

bedeutet. Hieraus folgt aber, dass für $m = \infty$

(10) $$\sum_{m+1}^{m'}{}_\nu\, a'_\nu \cong g \sum_{m+1}^{m'}{}_\nu\, a_\nu$$

wird — d. h. man kann die Werthbestimmung von $\sum\limits_{m+1}^{m}{}_\nu\, a'_\nu$ immer auf die entsprechende für eine andere Grössenreihe a_ν zurückführen, welche lediglich den Bedingungen (8), (9) zu genügen hat. Man wird also insbesondere hierfür auch stets eine solche Grössenreihe substituiren

können, bei welcher die Glieder mit wachsendem Index niemals zunehmen.

Hierbei war zunächst g als endlich und von Null verschieden gedacht. Die Beziehung (10) behält aber ihrer Herleitung gemäss noch Gültigkeit, wenn g gegen Null convergirt oder unendlich gross wird. Es wird danach, wenn m' als Function von m so bestimmt wird, dass $\lim \sum_{m+1}^{m'} a_\nu$ endlich und von Null verschieden ist, $\lim \sum_{m+1}^{m'} a_\nu$ Null oder unendlich gross, je nachdem $g = 0$ oder ∞ ist.

Ferner ist zu bemerken, dass die Relation (10) auch für geeignete complexe Grössenreihen a_ν' noch gültig bleibt. Ist nämlich

$$a_\nu' = \alpha_\nu' + i\beta_\nu',$$

wo die α_ν unter sich, ebenso die β_ν unter sich gleiche Zeichen besitzen, und hat man

$$\frac{a_\nu'}{a_\nu} = \frac{\alpha_\nu'}{a_\nu} + i\,\frac{\beta_\nu'}{a_\nu} \cong \gamma + i\delta,$$

so ergiebt sich ganz wie oben

$$\sum_{m+1}^{m'} a_\nu' = \sum_{m+1}^{m'} \alpha_\nu' + i \sum_{m+1}^{m'} \beta' \cong \gamma \sum_{m+1}^{m'} a_\nu + \delta i \sum_{m+1}^{m'} a_\nu$$
$$\cong (\gamma + \delta i) \sum_{m+1}^{m'} a_\nu.$$

Ist eine der Grössen γ oder δ Null, so kann offenbar die Beschränkung, dass die α_ν' bezw. β_ν' unter sich gleiches Zeichen haben, wegfallen.

Aus dem Gesagten folgt z. B. mit Benutzung der Relation

$$\sum_{p\,n+1}^{q\,n} \frac{1}{\nu} \cong \lg \frac{q}{p},$$

dass für jedes beliebige complexe z und a

$$\sum_{p\,n+1}^{q\,n} \frac{1}{a\nu \pm z} \cong \frac{1}{a} \lg \frac{q}{p}\ ^{*)}, \qquad \sum_{p\,n+1}^{q\,n} \frac{1}{a\nu \lg \nu \pm z} \cong 0,$$

$$\sum_{p\,n+1}^{q\,n} \frac{1}{a\sqrt{\nu} \pm z} \cong \infty,$$

---

*) Die von Herrn Catalan aufgestellte, von Herrn Laisant und de Tilly (in der Nouvelle Corresp. Math. T. I, 1879) bewiesene Formel

$$\sum_{1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{x + 2\nu - 1} + \frac{1}{x + 2\nu} - \frac{1}{x + \nu} \right\} = \lg 2$$

ist also nur ein specieller Fall dieses Beispieles zu (10).

und dass für alle reellen x

$$\sum_{pn+1}^{qn} \frac{1}{a\nu + b \sin \nu x} \cong \frac{1}{a} \lg \frac{q}{p}$$

sein muss. Und allgemein, wenn $f_\nu(z)$ eine von der complexen Variablen z und einem ganzzahligen Parameter ν abhängige Grösse bedeutet, welche der Bedingung genügt, dass für irgend einen Werthebereich z und für unendlich wachsendes ν

$$f_\nu(z) \cong c$$

wird, so hat man — wenn a_ν, a_ν' die frühere Bedeutung haben

$$\sum_{m+1}^{m'} a_\nu' \cdot f_\nu(z) \cong c \sum_{m+1}^{m'} a_\nu' \cong cg \sum_{m+1}^{m'} a_\nu .$$

Ist z. B. $\varphi_\nu(z)$ eine Function, welche für $\nu = \infty$ nicht unendlich oder doch nur so unendlich wird, dass

$$\varphi_\nu(z) \prec \frac{1}{a_\nu} \quad (\text{also } a_\nu \varphi_\nu(z) \cong 0 \text{ für } \nu = \infty),$$

so ergeben sich die Beziehungen:

$$(11) \qquad \sum_{m+1}^{m'} a_\nu(1 \pm a_\nu \varphi_\nu(z)) \cong \sum_{m+1}^{m'} a_\nu \qquad \sum_{m+1}^{m'} \frac{a_\nu}{1 \pm a_\nu \varphi_\nu(z)} \cong \sum_{m+1}^{m'} a_\nu .$$

Combinirt man das in (10) enthaltene Resultat mit dem zuvor über die Werthveränderungen bedingt convergirender Reihen Gesagten, so ergiebt sich, dass es bei der Bestimmung dieser Werthveränderungen gar nicht auf das specielle Bildungsgesetz der einzelnen Reihenglieder, vielmehr nur darauf ankommt, in welcher Weise die unendlich entfernten Glieder der Null zustreben.

Es werden daher zwei Reihen,

$$\left\{\sum a_\nu - \sum b_\nu\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\sum a_\nu' - \sum b_\nu'\right\},$$

die bei einer gewissen beiden gemeinsamen Anordnung der Zeichen convergiren, bei einer auf beide Reihen gleichmässig angewendeten Umordnung dieselbe Werthveränderung erleiden, falls $a_\nu' \cong a_\nu$ (wobei dann, wie leicht zu übersehen, in Folge der gemachten Voraussetzung auch $b_\nu' \cong b_\nu$ sein wird) — und proportionale Werthveränderungen wenn $a_\nu' \cong g \cdot a_\nu$ (g endlich und von Null verschieden). Dagegen wird jede Umordnung, welche der Reihe $\sum a_\nu$ eine endliche Werthveränderung ertheilt, die zweite unverändert lassen bezw. divergent machen, wenn $a_\nu' \prec a_\nu$ bezw. $a_\nu' \succ a_\nu$. (Der in der Einleitung erwähnte Schlömilch'sche Satz ist also nur ein specieller Fall dieser unmittelbar aus der Relation (10) hervorgehenden allgemeinen Folge-

rung: es wird dort die Werthveränderung, welche eine Reihe mit alternirenden Zeichen bei einer Umordnung in Gruppen von je p positiven und q negativen Gliedern erleidet, mit derjenigen verglichen, welche die betreffende Umordnung bei der Reihe

$$\sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu+1}$$

hervorbringt).

Es mögen hier zunächst einige Anwendungen des obigen Resultates auf specielle Fälle Platz finden.

1) Es sei die Reihe

$$s = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots,$$

(wo die α_ν sämmtlich positiv und $\alpha_{\nu+1} \cong \alpha_\nu$) convergent. Vergleicht man sie mit der ebenfalls convergenten Reihe

$$S = \alpha_0 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_1 + \cdots,$$

so hat man als Grenzwerth des Quotienten eines Gliedes der ersten und der entsprechenden der zweiten Reihe den Ausdruck $\lim \frac{\alpha_{2\nu}}{\alpha_\nu}$ $\left(\text{oder } \lim \frac{\alpha_{2\nu+1}}{\alpha_\nu} \text{ — was offenbar dasselbe ist}\right)$ und es wird daher eine Umordnung, die der Summe S eine gewisse Aenderung Δ ertheilt, bei der Summe s den Zuwachs $\lim \frac{\alpha_{2\nu}}{\alpha_\nu} \cdot \Delta$ hervorbringen. Hieraus folgt z. B. ohne Weiteres, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

bei einer Anordnung in Gruppen von p positiven und q negativen Gliedern einen Zuwachs $= \frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ erhält, weil der entsprechende Zuwachs für die Reihe

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots$$

nämlich $\lim \sum_{pn+1}^{pn} {}^\nu \frac{1}{\nu} = \lg \frac{p}{q}$ ist. Ferner würde die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

bei der in (I) betrachteten Umordnung (wobei immer auf $pn^2 + qn$ positive Glieder nur pn^2 negative kommen) mit Benutzung des dort für die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots$$

gefundenen Resultates — da hier $\lim \frac{\alpha_{2\nu}}{\alpha_\nu} = \lim \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2\nu}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ — die Werthveränderung $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{q}{\sqrt{p}} = \frac{q}{\sqrt{2p}}$ erlangen.

2) Die für $|x| < 1$ und beliebige positive $\varkappa$ unbedingt convergente Entwicklung

$$(1 + x)^{-\varkappa} = 1 - \frac{\varkappa}{1} x + \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{\varkappa \cdot (\varkappa+1)(\varkappa+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

convergirt noch bedingt für $x = +1$, wenn $\varkappa < 1$ ist, sodass also

$$\frac{1}{2^\varkappa} = 1 - \frac{\varkappa}{1} + \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{1 \cdot 2} - \frac{\varkappa(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \quad (\varkappa < 1).$$

Um die Aenderung zu bestimmen, welche die Summe dieser Reihe durch Umordnung der Glieder erleidet, hat man für deren $(\nu + 1)^{\text{tes}}$ Glied die bekannte Beziehung:

$$\lim \frac{1 \cdot 2 \ldots \nu}{\varkappa \cdot (\varkappa+1) \ldots (\varkappa+\nu-1)} \cdot \nu^{\varkappa-1} = \Gamma(\varkappa),$$

also

$$\frac{\varkappa \cdot (\varkappa+1) \ldots (\varkappa+\nu-1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} \cong \frac{1}{\Gamma(\varkappa) \cdot \nu^{1-\varkappa}},$$

sodass die obige Reihe in Bezug auf etwaige Werthveränderungen sich genau so verhalten muss, wie die folgende:

$$\frac{1}{\Gamma(\varkappa)} \left\{ \frac{1}{1^{1-\varkappa}} - \frac{1}{2^{1-\varkappa}} + \frac{1}{3^{1-\varkappa}} - \frac{1}{4^{1-\varkappa}} + \cdots \right\},$$

oder auch — nach dem in Beispiel (1) Gesagten — wie die noch etwas einfachere:

$$\frac{1}{2^{1-\varkappa} \cdot \Gamma(\varkappa)} \left\{ \frac{1}{1^{1-\varkappa}} - \frac{1}{1^{1-\varkappa}} + \frac{1}{2^{1-\varkappa}} - \frac{1}{2^{1-\varkappa}} + \cdots \right\},$$

d. h. sie erleidet durch eine Umordnung, bei der an die Stelle von m positiven bezw. negativen Gliedern $(m + h)$ treten, einen positiven bezw. negativen Zuwachs von der Grösse

$$\Delta = \frac{1}{2^{1-\varkappa} \Gamma(\varkappa)} \lim \sum_{m+1}^{m+h} \frac{1}{\nu^{1-\varkappa}}.$$

Da nun

$$\frac{h}{(m+1)^{1-\varkappa}} > \sum_{m+1}^{m+h} \frac{1}{\nu^{1-\varkappa}} > \frac{h}{(m+h)^{1-\varkappa}},$$

so wird offenbar

$$\lim \sum_{m+1}^{m+h} \frac{1}{\nu^{1-\varkappa}} = a,$$

wenn

$h = E(a \cdot m^{1-\varkappa})$ oder etwas allgemeiner, wenn $h \cong a \cdot m^{1-\varkappa}$, in welchem Falle dann

$$\Delta = \frac{a}{2^{1-\varkappa} \cdot \Gamma(\varkappa)}$$

als die entsprechende Werthveränderung der betrachteten Reihe sich ergiebt.

Setzt man speciell $\varkappa = \frac{1}{2}$, wodurch $\Gamma(\varkappa) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ wird, so verhält sich also die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \cdots$$

gerade so, wie die im ersten Paragraphen betrachtete

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \right\}$$

verhalten, sie erhält somit einen Zuwachs von $\pm \frac{q}{\sqrt{2\pi p}}$, wenn $pn^2 + qn$ positiven bezw. negativen Gliedern nur pn^2 des entgegengesetzten Zeichens zugeordnet werden.

3) Multiplicirt man die Reihe

$$\lg 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu}$$

mit sich selbst — wobei trotz der nur bedingten Convergenz dieser Reihe die Cauchy'sche Multiplicationsregel anwendbar ist*) — so wird

$$(\lg 2)^2 = \sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \omega_\nu,$$

wo

$$\omega_\nu = \sum_{1}^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa(\nu+1-\varkappa)} = \sum_{1}^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{1}{\nu+1} \left\{ \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\nu+1-\varkappa} \right\} = \frac{2}{\nu+1} \sum_{1}^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa},$$

sodass also, wenn

$$\sum_{1}^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} = \sigma_\nu$$

gesetzt wird, sich ergiebt

$$\frac{1}{2} (\lg 2)^2 = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{4} - \frac{\sigma_4}{5} + \cdots.$$

Da nun bekanntlich

$$\sigma_\nu \cong \lg(\nu + 1),$$

---

*) Wie ich bei früherer Gelegenheit gezeigt habe: Math. Annalen, Bd. XXI, S. 364.

so wird diese Reihe mit der folgenden:

$$\frac{\lg 2}{2} - \frac{\lg 3}{3} + \frac{\lg 4}{4} - \frac{\lg 5}{5} + \cdots$$

oder auch, weil $\frac{\lg(2\nu)}{2\nu} \cong \frac{\lg(2\nu+1)}{2\nu} \cong \frac{1}{2}\,\frac{\lg \nu}{\nu}$ mit:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\lg 2}{2} - \frac{\lg 2}{2} + \frac{\lg 3}{3} - \frac{\lg 3}{3} + \cdots\right\}$$

vergleichbar sein, d. h. sie erhält den positiven oder negativen Zuwachs

$$\Delta = \frac{1}{2} \lim \sum_{m+1}^{m+h}{}_{\nu} \frac{\lg \nu}{\nu},$$

wenn an die Stelle von m positiven bezw. negativen Gliedern $m+h$ treten. Da nun wiederum

$$\frac{h \lg(m+1)}{m+1} > \sum_{m+1}^{m+h}{}_{\nu} \frac{\lg \nu}{\nu} > \frac{h \lg(m+h)}{m+h},$$

so wird

$$\lim \sum_{m+1}^{m+h}{}_{\nu} \frac{\lg \nu}{\nu} = a, \qquad \text{wenn } h \cong a\,\frac{m}{\lg m},$$

sodass also die betrachtete Reihe in diesem Falle die Werthveränderung $\pm \frac{a}{2}$ erleidet.

4) Bedeutet, wie oben $\varphi_\nu(z)$ eine Function der complexen Variablen z und des ganzzahligen Parameters ν, welche für $\nu = \infty$ höchstens so unendlich wird, dass $|\varphi_\nu(z)| < \frac{1}{a_\nu}$ — wo die positive Grösse a_ν für $\nu = \infty$ verschwindet, so wird die folgende Reihe:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left\{\frac{a_\nu}{1 + a_\nu \varphi_\nu(z)} - \frac{a_\nu}{1 - a_\nu \varphi_\nu(z)}\right\} = -\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{2 a_\nu^2 \varphi_\nu(z)}{1 - a_\nu^2 \varphi_\nu^2(z)}$$

in dieser Anordnung stets convergiren, falls die Reihe $\sum a_\nu{}^2 \varphi_\nu(z)$ (also, wenn $\lim \varphi_\nu(z)$ endlich oder Null ist, die Reihe $\sum a_\nu{}^2$) unbedingt convergirt. Die Werthveränderungen, welche diese Reihe erleiden kann, sind dann identisch mit denjenigen der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} (a_\nu - a_\nu), \qquad (\text{da } a_\nu \varphi_\nu(z) \cong 0)$$

also von der Form

$$\Delta = \pm \lim \sum_{m}^{m'} a_\nu \text{ — mithin unabhängig von } z.$$

Nimmt man speciell $\varphi_\nu(z) = z$, $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, so hat man bekanntlich

$$\sum_1^\infty{}_{\nu} \left\{ \frac{1}{\nu+z} - \frac{1}{\nu-z} \right\} = -\frac{1}{z} + \pi \cdot \cot \pi z,$$

oder anders geschrieben

$$\lim_{n=\infty} \sum_{-n}^{+n}{}_{\nu} \frac{1}{z+\nu} = \pi \cot \pi z.$$

Mithin wird

$$\lim_{n=\infty} \sum_{-pn}^{+qn} \frac{1}{z+\nu} = \cot \pi z + \lim \sum_{pn+1}^{+qn} = \pi \cot \pi z + \lg \frac{q}{p} \text{ *)}.$$

III.

Digression über bedingt convergente Producte.

Da die Relation (10) auch die Anwendbarkeit der bisherigen und der im Weiteren noch anzustellenden Betrachtungen auf die Untersuchung bedingt convergenter Producte vermittelt, so mögen einige auf letztere sich beziehende Bemerkungen hier gleich eingeschaltet werden.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Product der Form

$$P = \prod_0^\infty{}_{\nu} (1 + u_\nu)$$

unbedingt convergirt, d. h. einen von der Anordnung der Factoren unabhängigen, endlichen und von Null verschiedenen, bestimmten Werth besitzt, besteht bekanntlich darin, dass die Reihe

$$s = \sum_0^\infty{}_{\nu} u_\nu$$

unbedingt convergirt. Ist hingegen diese Reihe nur bedingt convergent, so lässt sich hieraus allein bezüglich des Verhaltens jenes Productes nur der negative Schluss ziehen, dass dasselbe keinesfalls unbedingt convergiren kann: dagegen folgt etwa keineswegs, dass nunmehr P bedingt convergiren müsse, vielmehr kann ebenso gut auch Divergenz (sowohl gegen den Werth ∞, wie gegen 0) eintreten — wie das folgende Beispiel zeigt. Sei $\sum a_\nu$ eine divergente Reihe von Gliedern einerlei Vorzeichens, $\lim a_\nu = 0$, so ist das Product

*) Darauf dass diese besondere Reihe bei Umordnungen der betrachteten Art eine von z unabhängige Werthveränderung erleidet, hat auch Eisenstein in der oben genannten Abhandlung aufmerksam gemacht — s. a. a. O. S. 204. Er beweist dies, indem er die Glieder der Form $\frac{1}{z+\nu}$ nach Potenzen von z entwickelt.

$$\prod_{0}^{\infty}{}_{\nu}\,(1 + a_\nu)$$

divergent (und zwar $= 0$ oder $= \infty$, je nachdem die a_ν sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ) — folglich auch das damit identische Product

$$\lim_{n=\infty} \prod_{0}^{n}{}_{\nu}\,(1 + \sqrt{a_\nu}) \prod_{0}^{n} (1 - \sqrt{a_\nu}),$$

obschon die diesem Producte entsprechende Reihe, nämlich

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \sqrt{a_\nu} - \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \sqrt{a_\nu} \right\}$$

bedingt convergirt.

In der That hängt die Convergenz des Productes P in erster Linie gar nicht von derjenigen der Reihe $\sum u_\nu$, sondern vielmehr vermöge der Beziehung

$$\lg P = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \lg (1 + u_\nu)$$

von der Convergenz dieser letzteren Reihe ab. Da nun für $\nu = \infty$ $\lim u^{\nu} = 0$ vorausgesetzt wird und daher

$$(12) \qquad \lim_{\nu=\infty} \left\{ \frac{\lg (1 + u_\nu)}{u_\nu} \right\} = \lim \left\{ \frac{1}{u_\nu} \left(\frac{u_\nu}{1} - \frac{u_\nu^2}{2} + \frac{u_\nu^3}{3} - \cdots \right) \right\} = 1,$$

also

$$\lg (1 + u_\nu) \cong u_\nu$$

ist, so wird die *unbedingte* Convergenz der Reihe $\sum u_\nu$ auch stets diejenige der Reihe $\sum \lg(1 + u_\nu)$ nach sich ziehen und umgekehrt — da mit einer unbedingt convergirenden Reihe jede andere ebenfalls unbedingt convergirt, deren Glieder zu den entsprechenden der ersten in einem endlichen (bezw. auch verschwindenden) Verhältnisse stehen. Etwas ähnliches findet aber für bedingt convergirende Reihen *nicht* statt: mit anderen Worten, wenn von zwei nicht unbedingt convergenten Reihen die eine bedingt convergirt, während das Verhalten der anderen unbekannt ist, so kommt für dessen Beurtheilung das Verhältniss entsprechender Glieder überhaupt nicht in Betracht (da es für das Zustandekommen bedingter Convergenz nur darauf ankommt, in welcher Weise die irgendwie aus positiven und negativen Gliedern zusammengesetzten Gruppen, nicht aber wie die einzelnen Glieder der Null zustreben). Denn sei etwa $\sum u_\nu$ bedingt convergent, $\sum |u_\nu|$ also divergent und bezeichne $\sum v_\nu$ eine divergente Reihe von der

Beschaffenheit, dass $\lim\left|\frac{v_\nu}{u_\nu}\right| = 0$ (und solche Reihen $\sum v_\nu$ giebt es stets unendlich viele, auch wenn $\sum |u_\nu|$ beliebig langsam divergirt, wie aus einem Satze von Abel folgt*)), so wird offenbar die folgende Reihe: $\sum w_\nu = \sum (u_\nu + v_\nu)$ divergent sein, obschon $\lim\left|\frac{w_\nu}{u_\nu}\right| = \lim\left|\frac{u_\nu + v_\nu}{u_\nu}\right| = 1$ ist und die Reihe $\sum w_\nu$ — weil von einer bestimmten endlichen Stelle ab $|v_\nu| < |u_\nu|$ sein muss — von dieser nämlichen Stelle ab dieselbe Anordnung der Vorzeichen aufweist wie $\sum u_\nu$.

Hiernach wird aus der *bedingten* Convergenz der Reihe $\sum u_\nu$ *allein*, sich weder diejenige von $\sum \lg(1 + u_\nu)$ folgern lassen, noch umgekehrt. Dagegen wird aus der bedingten Convergenz von $\sum u_\nu$ soviel folgen, dass die u_ν theils positiv und theils negativ sind und $\lim u_\nu$ für $\nu = \infty$ verschwindet, dass also (wenigstens solange die u_ν reell sind) das Gleiche für die Grössen $\lg(1 + u_\nu)$ gilt und folglich nach dem Riemann'schen Satze unendlich viele Anordnungen existiren müssen, für welche die Reihe $\sum \lg(1 + u_\nu)$ einen endlichen Werth besitzt, das Product P also convergirt: nur werden eben im Allgemeinen die Anordnungen, welche die Reihe $\sum \lg(1 + u_\nu)$ — also das Product P — und diejenigen, welche die Reihe $\sum u_\nu$ convergent machen, im allgemeinen verschiedene sein können.

Hieraus entspringt nun die Frage, ob es nicht vielleicht allgemeine, durch eine einfache den Grössen u_ν aufzuerlegende Bedingung charakterisirte Fälle giebt, in denen einer convergenten Anordnung der Reihe $\sum u_\nu$ auch stets eine solche des Productes $\prod (1 + u_\nu)$ entspricht und umgekehrt?

Sei nun die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu$ (wo die u_ν jetzt auch complex sein dürfen) in der durch die Folge der Indices vorgeschriebenen Anordnung convergent. Sei dann ferner α eine endliche positive ganze Zahl von der Beschaffenheit, dass für $\nu \geqq \alpha$ $|u_\nu| < 1$ ist, so wird für alle in der Gleichung

$$\lg \prod_\alpha^n{}_\nu (1 + u_\nu) = \sum_\alpha^n{}_\nu \lg(1 + u_\nu)$$

*) Crelle's Journal, Bd. III, S. 80.

vorkommenden Grössen u_ν die Beziehung gelten:

$$\lg u_\nu = \frac{u_\nu}{1} - \frac{u_\nu^2}{2} + \cdots + (-1)^\varkappa \frac{u_\nu^{\varkappa-1}}{\varkappa-1} + (-1)^{\varkappa+1} \cdot \frac{u_\nu^\varkappa}{\varkappa} \cdot R_\nu,$$

wo

$$R_\nu = 1 - \varkappa \left\{ \frac{u_\nu}{\varkappa+1} - \frac{u_\nu^2}{\varkappa+2} + \frac{u_\nu^3}{\varkappa+3} - \cdots \right\},$$

also

$$|R_\nu - 1| < |u_\nu| + |u_\nu^2| + |u_\nu^3| + \cdots \text{ d. h. } < \frac{|u_\nu|}{1 - |u_\nu|}$$

sodass also R_ν für $\nu = 0$ der Grenze 1 zustrebt. Da hiernach

$$\lg \prod_\alpha^n{}^\nu (1 + u_\nu) = \frac{1}{1} \sum_\alpha^n{}^\nu u_\nu - \frac{1}{2} \sum_\alpha^n{}^\nu u_\nu^2 + \cdots$$

$$+ (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa - 1} \sum_\alpha^n{}^\nu u_\nu^{\varkappa-1} + (-1)^{\varkappa+1} \cdot \frac{1}{\varkappa} \sum_\alpha^n{}^\nu u_\nu^\varkappa R_\nu$$

sich ergiebt, so wird für die Convergenz dieses Ausdruckes bei unendlich wachsendem n *hinreichend* sein, dass die Reihen

$$\sum u_\nu, \quad \sum u_\nu^2, \quad \sum u_\nu^{\varkappa-1}$$

bedingt, die Reihe

$$\sum u_\nu^\varkappa$$

unbedingt convergiren (die letzte Bedingung ist aber keine nothwendige: es braucht eben schliesslich nur $\sum u_\nu^\varkappa \cdot R_\nu$ *bedingt* zu convergiren). Sind also diese Voraussetzungen erfüllt, so wird das Product

$$\prod_0^\infty{}^\nu (1 + u_\nu)$$

in der durch die Folge der Indices vorgeschriebenen Anordnung convergiren, und das Gleiche gilt offenbar auch von dem noch etwas allgemeineren Producte

$$\prod_0^\infty{}^\nu (1 + u_\nu z),$$

wo z jeden endlichen complexen Werth mit Ausschluss derjenigen von der Form $z = -\frac{1}{u_\nu}$ annehmen kann, da ja mit den obigen Reihen auch die folgenden

$$\sum u_\nu z, \quad \sum u_\nu^2 z \cdots \sum u_\nu^{\varkappa-1} z \quad \text{bedingt}$$

$$\sum u_\nu^\varkappa z \quad \text{unbedingt}$$

convergiren. Man hat also den folgenden Satz:

Sind die complexen Grössen $u_0 \cdots u_\nu$ so beschaffen, dass für ein bestimmtes endliches $\varkappa$ $\sum u_\nu^\varkappa$ unbedingt convergirt, während die Reihen $\sum u_\nu$, $\sum u_\nu^2 \cdots \sum u_\nu^{\varkappa-1}$ nur bedingt convergiren, so ist auch das Product $\prod (1 + \nu_\nu z)$ in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung für jedes endliche z (mit Ausschluss der Werthe $z = -\frac{1}{u_\nu}$, für welche das Product verschwindet) convergent.

Sind die u_ν sämmtlich reell, so besteht die Reihe $\sum u_\nu{}^2$ aus lauter positiven Grössen, muss also — wenn überhaupt — auch stets unbedingt convergent sein. In diesem Falle muss also, wenn der eben ausgesprochene Satz (der freilich, wie bemerkt, nur eine hinreichende, keine nothwendige Bedingung liefert) anwendbar sein soll, die Reihe $\sum u_\nu$ bedingt, $\sum u_\nu{}^2$ unbedingt convergiren. Hieraus folgt z. B. als specieller Fall, dass, wenn $a_0, a_1, \cdots, a_\nu \cdots$ mit wachsendem Index niemals zunehmende positive Grössen bedeuten, die Producte

$$\prod_0^\infty{}^{\nu} (1 + (-1)^\nu a_\nu z) \quad \text{für jedes complexe } z,$$

$$\prod_0^\infty{}^{\nu} (1 + a_\nu \cos \nu x), \quad \prod_0^\infty{}^{\nu} (1 - a_\nu \cos \nu x),$$

$$\prod_0^\infty{}^{\nu} (1 + a_\nu \sin \nu x), \quad \prod_0^\infty{}^{\nu} (1 - a_\nu \sin \nu x),$$

für jedes reelle x — in der vorgeschriebenen Anordnung convergent sind, sobald die Reihe $\sum a_\nu{}^2$ convergent, während $\sum a_\nu$ divergent sein darf.

Hätte man ferner

$u_\nu = i^\nu a_\nu$ (wo a_ν wieder dieselbe Bedeutung hat wie in dem eben betrachteten Falle)

sodass also

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu} (a_{4\nu} + i a_{4\nu+1} - a_{4\nu+2} - i a_{4\nu+3}) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \{(a_{4\nu} - a_{4\nu+2}) + i(a_{4\nu+1} - a_{4\nu+3})\},$$

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu^2 = \sum_0^\infty{}^{\nu} (a_{4\nu}^2 - a_{4\nu+1}^2 + a_{4\nu+2}^2 - a_{4\nu+3}^2) = \sum_0^\infty{}^{\nu} (a_{2\nu}^2 - a_{2\nu+1}^2),$$

$$\sum_0^\infty u_\nu^2 = \sum_0^\infty{}_\nu (a_{4\nu}^2 - i a_{4\nu+1}^2 - a_{4\nu+2}^2 + i a_{4\nu+3}^2) = \sum_0^\infty{}_\nu \{(a_{4\nu}^2 - a_{4\nu+2}^2) - i(a_{4\nu+1}^2 - a_{4\nu+3}^2)\},$$

$$\sum_0^\infty u_\nu^4 = \sum_0^\infty{}_\nu (a_{4\nu}^4 + a_{4\nu+1}^4 + a_{4\nu+2}^4 + a_{4\nu+3}^4) = \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu^4$$

und daher in Folge der gemachten Voraussetzung die drei ersten dieser Reihen unter allen Umständen zum mindesten bedingt convergiren würden, so brauchte hier erst die Reihe $\sum u_\nu^4 = \sum a_\nu^4$ unbedingt zu convergiren, damit nach dem obigen Satze das Product

$$\prod_0^\infty{}_\nu (1 + u_\nu z) = \prod_0^\infty{}_\nu (1 + i^\nu a_\nu z)$$

bedingt convergirt. —

Hinsichtlich der Werthveränderungen, welche bedingt convergente Producte durch Umordnung der Factoren erleiden können, ergiebt sich nun aus dem bisher über die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen Gesagten folgendes. Sei das Product

$$P = \prod_0^\infty{}_\nu (1 + u_\nu z)$$

wo die u_ν jetzt *reelle* Grössen bedeuten sollen, convergent (gleichgültig ob die Reihe $\sum u_\nu$ in der entsprechenden Anordnung convergirt oder nicht). Bezeichnet man dann mit $a_0, a_1, a_2, \cdots$ die positiven, mit $-b_0, -b_1, -b_2 \cdots$ die negativen unter den Grössen u_ν (und zwar in der Anordnung wie sie innerhalb der Folge $u_0, u_1, u_2, \cdots$ auftreten), so wird man setzen können

$$(13)\quad P = \prod_0^\infty{}_\nu (1 + u_\nu z) = \lim \left\{ \prod_0^m{}_\nu (1 + a_\nu z) \cdot \prod_0^n{}_\nu (1 - b_\nu z) \right\} \quad \binom{m=\infty}{n=\infty}$$

wo m und n in einer durch die Anordnung der Glieder bestimmten Beziehung zu einander stehen. Jede andere Anordnung (bei welcher wiederum die Reihenfolge der a_ν unter sich, wie der b_ν unter sich ungeändert bleiben soll) wird sich dann in eine der beiden Formen setzen lassen

$$P' = \lim \left\{ \prod_0^{m'}{}_\nu (1 + a_\nu z) \prod_0^n{}_\nu (1 - b_\nu z) \right\} \quad (m' > m),$$

$$P'' = \lim \left\{ \prod_0^{m}{}_\nu (1 + a_\nu z) \prod_0^{n'}{}_\nu (1 - b_\nu z) \right\} \quad (n' > n)$$

und die hierbei sich ergebenden Werthveränderungen sind also:

$$\frac{P'}{P} = \lim \prod_{m+1}^{m'}{}^{\nu} (1 + a_\nu z), \qquad \frac{P''}{P} = \lim \prod_{n+1}^{n'}{}^{\nu} (1 - b_\nu z).$$

Da hieraus

$$\lg \frac{P'}{P} \simeq \sum_{m+1}^{m'}{}^{\nu} \lg (1 + a_\nu z), \qquad \lg \frac{P''}{P} \simeq \sum_{n+1}^{n'}{}^{\nu} \lg (1 - b_\nu z),$$

folgt, und für unendlich wachsendes ν

$$\lg (1 + a_\nu z) \simeq a_\nu z, \qquad \lg (1 - b_\nu z) \simeq - b_\nu z$$

wird (s. Gl. (12)), so hat man mit Benutzung jener Relation (10)

$$\lg \frac{P'}{P} \simeq z \sum_{m+1}^{m'}{}^{\nu} a_\nu, \qquad \lg \frac{P''}{P} \simeq - z \sum_{n+1}^{n'}{}^{\nu} b_\nu,$$

also

$$(14) \qquad \frac{P'}{P} = e^{z \lim \sum_{m+1}^{m'} a_\nu}, \qquad \frac{P''}{P} = e^{- z \lim \sum_{n+1}^{n'} b_\nu}$$

d. h. die Werthveränderung des obigen Productes ist gleich einer Exponentialgrösse, welche die entsprechende Werthveränderung der Reihe $z \sum u_\nu$ (gleichgültig ob dieselbe bei der ursprünglichen Anordnung convergirt oder nicht) zum Exponenten hat.

So ist z. B.

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right) = \lim_{m=\infty} \left\{ \prod_{1}^{m}{}^{\nu} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) \prod_{1}^{m}{}^{\nu} \left(1 - \frac{z}{\nu}\right) \right\}$$

in der zweiten Form nur bedingt convergent. Ordnet man dieses letztere Product jetzt so an, dass immer auf p Factoren der Form $\left(1 + \frac{z}{\nu}\right)$ q Factoren der Form $\left(1 - \frac{z}{\nu}\right)$ folgen, so ergiebt sich nach dem Obigen

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \prod_{1}^{pn}{}^{\nu} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) \prod_{1}^{qn}{}^{\nu} \left(1 - \frac{z}{\nu}\right) \right\} = e^{z \lim \left\{ \sum_{0}^{pm} \frac{1}{\nu} - \sum_{0}^{qn} \frac{1}{\nu} \right\}} \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

$$= e^{z \lg \frac{q}{p}} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \left(\frac{q}{p}\right)^z \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

(eine Gleichung, die sich auch ergeben würde, wenn man die letzte Gleichung des vorigen Paragraphen mit dz multiplicirt und in den Grenzen 0 bis z integrirt). —

IV.

Darstellung des singulären Restes durch ein bestimmtes Integral. — Vollständige Erledigung der Fälle, in welchen die unendlich entfernten Reihenglieder nicht stärker gegen Null convergiren als $\lim \frac{c}{n}$.

Es handelt sich jetzt schliesslich nur noch darum, für einen singulären Rest von der Form $\sum_{m+1}^{m'} a_\nu$ — wo die a_ν mit Berücksichtigung des bisher Gesagten als positive, für wachsende Werthe von ν niemals zunehmende und für $\nu = \infty$ verschwindende Grössen vorausgesetzt werden dürfen — m' als Function von m so zu bestimmen, dass für $m = \infty$ ein vorgeschriebener Grenzwerth (einschl. Null und Unendlich) zu Stande kommt. Zu diesem Behufe soll zunächst dieser singuläre Rest durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden.

Es bezeichne $f(x)$ eine stetige, differenzirbare, mit wachsendem x niemals abnehmende Function von x, welche der Bedingung genügt, dass für jedes ganzzahlige positive ν (wenigstens von einer gewissen endlichen Stelle ab)

$$(15)\quad f(\nu) = \frac{1}{a_\nu} \quad \text{und daher für } \nu = \infty\text{:} \quad a_\nu \cong \frac{1}{f(\nu)}$$

wird.

Man hat alsdann

$$a_{\nu+1} \leq \int_\nu^{\nu+1} \frac{dx}{f(x)} \leq a^\nu$$

und wenn man der Reihe nach $\nu = m, m+1, \cdots, m'-1$ setzt und alles addirt:

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m'} \leq \int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)} \leq a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m'-1},$$

oder auch

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m'} \begin{cases} \leq \displaystyle\int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)}, \\ \geq \displaystyle\int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)} - (a_m - a_{m'}) \end{cases}$$

und somit für $m = \infty$

$$(16)\qquad \sum_{m+1}^{m'} a_\nu \cong \int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)}.$$

Die Function unter dem Integralzeichen wird für $x = \infty$ zwar zu Null, jedoch, da die Reihe $\sum a_\nu$ als divergent vorausgesetzt wird,

nur so, dass für *kein* noch so kleines, angebbares ε und beliebig grosses, angebbares, ganzzahliges $\varkappa$

$$a_\nu = \frac{1}{f(\nu)} \precsim \frac{1}{\nu \lg_1 \nu \lg_2 \nu \cdots \lg_{\varkappa-1} \nu \lg_\varkappa^{1+\varepsilon} \nu}$$

wird (wenn allgemein $\lg_r x$ den r-fach iterirten Logarithmus von x und $\lg_r^p x$ die p^{te} Potenz davon bezeichnet). Unter dieser Voraussetzung wird jenes bestimmte Integral je nach Wahl von m' als Function von m für $m = \infty$ jeden beliebigen „singulären" Werth (von 0 bis ∞) annehmen.

Zwischen der unendlichen Reihe und dem bestimmten Integrale in Gleichung (16) besteht insofern ein Unterschied, als das letztere nicht mehr an die Beschränkung gebunden ist, dass m und m' nur ganzzahlige Werthe annehmen können. Da nun aber, wenn m und m' zwei beliebige ganze Zahlen bedeuten,

$$\int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)} = \int_{E(m)}^{E(m')} \frac{dx}{f(x)} - \int_{E(m)}^{m} \frac{dx}{f(x)} + \int_{E(m)}^{m'} \frac{dx}{f(x)}$$

und

$$\int_{E(m)}^{m} \frac{dx}{f(x)} < \int_{m-1}^{m} \frac{dx}{f(x)} < a_{m-1}, \qquad \int_{E(m')}^{m'} \frac{dx}{f(x)} < \int_{m'-1}^{m'} \frac{dx}{f(x)} < a_{m'-1}$$

so wird für $m = \infty$ und $m' = \infty$

$$\int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)} \simeq \int_{E(m)}^{E(m')} \frac{dx}{f(x)}$$

d. h. man wird bei der Uebertragung der für jenes bestimmte Integral geltenden Resultate auf die Reihe $\sum_m^{m'} a_\nu$ m und m' ohne weiteres durch ganze Zahlen ersetzen können, indem man die unabhängige Variable m überhaupt nur ganzzahlige Werthe annehmen lässt und ausserdem, wenn etwa $m' = \psi(m)$ sich ergeben hätte, $E(\psi(m))$ an die Stelle von $\psi(m)$ treten lässt.

Ferner ist hinsichtlich des Verhaltens der hier in Betracht kommenden bestimmten Integrale noch folgendes zu beachten. Es sei $F_1(x)$ eine stetige, positive Function von x, welche für $x = \infty$ zwar gegen Null convergirt, aber wiederum nur in der Weise, dass das Integral $\int_m^{m'} F_1(x)dx$ bei unendlich wachsendem m und m' nicht für jede Wahl von m' als Function von m verschwindet, vielmehr je nach der Beschaffenheit von m' jeden positiven Werth von 0 bis ∞ annehmen kann.

Ist dann $F_2(x)$ eine Function von ähnlicher Beschaffenheit wie $F_1(x)$ und für unendlich wachsende x

(17) $$F_2(x) \cong A \cdot F_1(x)$$

(wo A endlich, 0 oder ∞ sein kann), so ergiebt sich — ganz analog wie für zwei singuläre Reihenreste (Gleichung (10)) — dass auch

(18) $$\int_m^{m'} F_2(x)\,dx \cong A \int_m^{m'} F_1(x)\,dx. \qquad (m=\infty,\ m'=\infty)$$

Ist insbesondere $A = 0$, also

(19) $$F_2(x) \prec F_1(x)$$

so kann man offenbar die Beschränkung, dass $F_2(x)$ ebenfalls beständig positiv sein soll, fallen lassen: denn da zunächst für endliche m — wenn $F_2(x)$ beliebig oft das Zeichen wechselt:

$$\left|\int_m^{m'} F_2(x)\,dx\right| < \int_m^{m'} |F_2(x)|\,dx$$

und unter der Voraussetzung (19) auch

$$|F_2(x)| \prec F_1(x)$$

ist, so wird für $m = \infty$

$$\int_m^{m'} |F_2(x)|\,dx \prec \int_m^{m'} F_1(x)\,dx$$

und daher um so mehr

(20) $$\left|\int_m^{m'} E_2(x)\,dx\right| \prec \int_m^{m'} F_1(x)\,dx,$$

für jede Wahl vom m' — also gleichgültig, ob das rechts stehende Integral 0, endlich oder unendlich ist. Es wird also das erste Integral in diesem Falle stets gegen das zweite verschwinden, d. h. gegen Null convergiren, wenn das zweite selbst Null wird oder einen endlichen Werth annimmt, und wenn das zweite unendlich gross wird, gar nicht oder jedenfalls von einer niedrigeren Ordnung unendlich werden. Hieraus folgt aber, dass unter der Voraussetzung (19)

(21) $$\int_m^{m'} \{F_1(x) \pm F_2(x)\}\,dx \cong \int_m^{m'} F_1(x)\,dx$$

d. h. der Werth eines solchen singulären Integrales wird nicht merklich (d. h. um keine noch so kleine angebbare Grösse, wenn der Gesammtwerth unter einer endlichen Grenze liegt, und höchstens um ein Unendliches niederer Ordnung, wenn jener Integralwerth unendlich

wird) geändert, falls man die zu integrirende Function um eine andere vermehrt, welche für $x=\infty$ stärker gegen Null convergirt.

Soll daher m' als Function von m so bestimmt werden, das $\int_m^{m'} F_1(x)\,dx$ für $m=\infty$ einen vorgeschriebenen Grenzwerth besitzt, so steht es frei, an Stelle des zu behandelnden Integrales eines von der Form $\int_m^{m'}\{F_1(x)\pm F_2(x)\}\,dx$ zu substituiren, wo $F_2(x)$ nur der Bedingung unterliegt, dass $\lim \frac{F_2(x)}{F_1(x)}=0$ ist. Der Vortheil, den eine derartige Transformation in vielen Fällen gewähren kann, besteht nun darin, dass man eine Function $F_1(x)$ durch Addition einer anderen $F_2(x)$ auf unendlich viele Weisen zu einem integrablen Differential machen kann, und dass also, jedesmal wenn man diese Function $F_2(x)$ so bestimmen kann, dass $F_2(x)\prec F_1(x)$, die Integration des vorgelegten Integrals explicite ausführbar sein wird. Setzt man nämlich

$$F_1(x)=u(x)\,.\,v'(x)$$

(was auf unendlich viele verschiedene Weisen geschehen kann) und nimmt alsdann

$$F_2(x)=u'(x)\,.\,v(x),$$

so wird, wenn die Functionen $u(x)$, $v(x)$ so bestimmt werden, dass man hat

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{u'(x)\cdot v(x)}{u(x)\cdot v'(x)}\right\}=\lim_{x=\infty}\frac{d(\lg u(x))}{d(\lg v(x))}=0 \tag{22}$$

nach Gleichung (21) sich ergeben:

$$\int_m^{m'} F_1(x)\,dx \simeq \int_m^{m'}\{u(x)v'(x)+u'(x)v(x)\}\,dx \simeq u(m')\,.\,v(m')-u(m)v(m). \tag{22}$$

Oder etwas anders ausgesprochen: Erhält man bei irgendwelcher Factorenzerlegung von $F_1(x)$ und Anwendung partieller Integration:

$$\int F_1(x)\,dx=\Phi(x)-\int F_2(x)\,dx$$

und es ist $F_2(x)<F_1(x)$, so darf man setzen

$$\int_m^{m'} F_1(x)\,dx \simeq \Phi(m')-\Phi(m) \tag{24}$$

sodass es sich also schliesslich nur darum handelt die rechts stehende Differenz zweier expliciter Functionen durch Wahl von m' für unendlich wachsendes m zu einem vorgeschriebenen Werthe zu machen. —

Nach dieser allgemeinen Bemerkung gehe ich jetzt zur Behandlung des in Gleichung (16) als Aequivalent für den singulären Reihenrest $\sum_{m+1}^{m'} a_\nu$ auftretenden Integrales

$$\Delta_m = \int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)}$$

über. Bei der Untersuchung desselben kommt es wesentlich darauf an, in welcher Weise $f(x)$ für unendlich grosse Werthe des Arguments ins Unendliche wächst und zwar sind hierbei die folgenden drei Fälle zu trennen:

$$1)\ f(x) \prec x, \qquad 2)\ f(x) \sim x, \qquad 3)\ f(x) \succ x.$$

Setzt man $m' = m + h$, so ergiebt sich zunächst noch allgemein:

$$\Delta_m = \int_m^{m+h} \frac{dx}{f(x)} = \frac{h}{f(m+\vartheta h)} = \frac{h}{f(m) + \vartheta h f'(m+\eta h)} \qquad (0 < \eta < \vartheta < 1)$$

oder wenn man $h = \overline{f(m)}$ setzt:

$$(25) \qquad \Delta_m = \int_m^{m+\overline{f(m)}} \frac{dx}{f(x)} = \frac{\dfrac{\overline{f(m)}}{f(m)}}{1 + \vartheta \dfrac{\overline{f(m)}}{f(m)} f'\left\{m + \eta \overline{f(m)}\right\}}.$$

Ist jetzt 1) $f(x) \prec x$, also $f'(x) \cong 0$ für $x = \infty$, so wird offenbar für $m = \infty$

$$(26) \qquad \int_m^{m+\overline{f(m)}} \frac{dx}{f(x)} \cong \frac{\overline{f(m)}}{f(m)}$$

wenn $\dfrac{\overline{f(m)}}{f(m)}$ für $m = \infty$ nicht unendlich wird; und es wächst der Ausdruck (25) ins Unendliche, wenn $\lim \dfrac{\overline{f(m)}}{f(m)} = \infty$ ist. Es nimmt also jenes bestimmte Integral einen vorgeschriebenen Werth a (endlich oder Null) an, wenn die im übrigen beliebige Function $\overline{f(x)}$ so bestimmt wird, dass

$$(27) \qquad \overline{f(x)} \cong a \,.\, f(x)$$

und wächst über alle Grenzen, wenn man a über alle Grenzen wachsen lässt. Insbesondere wird daher — wenn a endlich ist oder für $m = \infty$ der Null zustrebt —

$$(28) \qquad \lim_{m=\infty} \int_m^{m+a.f(m)} \frac{dx}{f(x)} = a$$

sein.*)

Ist 2) $f(x) \sim x$, also $f'(x)$ für $x = \infty$ endlich und von Null verschieden, so liefert die Gleichung (25) ein bestimmtes Resultat nur dann, wenn $\lim \frac{\overline{f(m)}}{f(m)} = 0$ ist: in diesem Falle ergiebt sich offenbar auch $\lim \Delta_m = 0$. Ist hingegen $\lim \frac{\overline{f(m)}}{f(m)}$ endlich und von Null verschieden, so folgt aus Gleichung (25) nur soviel, dass $\lim \Delta_m$ einen endlichen Werth besitzt, derselbe ist indessen wegen der Unbestimmtheit des Bruches ϑ aus diesem Ausdrucke nicht bestimmbar. Aus demselben Grunde giebt für $\lim \frac{\overline{f(m)}}{f(m)} = \infty$ die Gleichung (25) überhaupt kein erkennbares Resultat (da ϑ möglicherweise beliebig gegen Null convergiren kann). Man hat nun aber unter der hier geltenden Voraussetzung — nämlich $f(x) \sim x$ — etwa

$f(x) \cong gx$ (wo g endlich und von Null verschieden)

und daher für $m = \infty$

$$(29) \qquad \Delta_m = \int_m^{m+\overline{f(m)}} \frac{dx}{f(x)} \simeq \frac{1}{g} \int_m^{m+\overline{f(m)}} \frac{dx}{x} \simeq \frac{1}{g} \lg \left(1 + \frac{\overline{f(m)}}{f(m)}\right)$$

folglich wird — wenn wiederum zunächst a nicht unendlich,

$$(30) \qquad \int_m^{m+a.f(m)} \frac{dx}{f(x)} \simeq \frac{1}{g} \lg (1 + ag)$$

und es wird dieses Integral logarithmisch unendlich, wenn a selbst unendlich wird.

Ist 3) $f(x) > x$, so wird $\lim f'(x) = \infty$ für $x = \infty$, und es liefert also die Gleichung (25) wegen der Unbestimmtheit von

---

*) Es wird also in diesem Falle

$$\sum_{m+1}^{m+\left[a \cdot \frac{1}{a_m}\right]} a_\nu \cong a$$

ein Resultat, welches sich offenbar (ganz analog wie bei dem Beispiele in I und dem Beispiele 3) in II) auch ohne Vermittlung des bestimmten Integrals hätte herleiten lassen. Da jedoch das bestimmte Integral für die Behandlung der übrigen Fälle nicht entbehrlich erschien, so wurde es der Gleichförmigkeit halber auch hier benützt.

$$\vartheta \,.\, f'\left\{m + \eta f(m)\right\}$$

hier überhaupt kein brauchbares Resultat, wenn nicht gerade

$$\lim \frac{\overline{f(m)}}{f(m)} = 0$$

ist, in welchem Falle sich hier — gerade so wie früher — $\lim \Delta = 0$ ergiebt. Man kann nun hier, wo $f(x)$ stärker unendlich wird als x, setzen:

$$f(x) = x \,.\, \varphi(x) \quad \text{— wo } \lim \varphi(x) = \infty \text{ für } x = \infty.$$

Dadurch wird

$$(31) \qquad \Delta_m = \int\limits_m^{m+\overline{f(m)}} \frac{dx}{f(x)} = \int\limits_m^{m+\overline{f(m)}} \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\lg\left(1 + \frac{\overline{f(m)}}{m}\right)}{\varphi\left\{m + \vartheta \cdot \overline{f(m)}\right\}}$$

$$= \frac{\lg\left\{1 + \frac{\overline{f(m)}}{f(m)} \cdot \varphi(m)\right\}}{\varphi\left\{m + \vartheta \cdot \overline{f(m)}\right\}}$$

und es wird somit $\lim \Delta_m = 0$, sobald $\lim \frac{\overline{f(m)}}{f(m)}$ nicht unendlich wird (also endlich oder Null). Wird dagegen $\lim \frac{\overline{f(m)}}{f(m)} = \infty$, so giebt auch dieser Ausdruck kein erkennbares Resultat, und es lässt sich nur soviel übersehen, dass derselbe je nach der Art und Weise, wie $\frac{\overline{f(m)}}{f(m)}$ mit m der Unendlichkeit zustrebt, jeden beliebigen Werth annehmen wird. Dieser Fall wird also noch einer besonderen Untersuchung bedürfen. Im übrigen lässt sich das Gesammtresultat dieser letzten Betrachtung folgendermassen zusammenfassen:

Das Integral

$$\int\limits_m^{m+\overline{f(m)}} \frac{dx}{f(x)}$$

hat für $m = \infty$ stets den Grenzwerth 0, wenn $\lim \frac{\overline{f(m)}}{f(m)} = 0$. Ist $\lim \frac{\overline{f(m)}}{f(m)} = a$ endlich und von Null verschieden, so hat es bezw. die Werthe

$$a, \qquad \frac{1}{g} \lg(1 + ag), \qquad 0$$

je nachdem

$$f(x) \prec x, \qquad f(x) \cong gx, \qquad f(x) \succ x.$$

Ist $\lim \frac{\overline{f(m)}}{f(m)} = \infty$, so wird auch jenes Integral unendlich gross, falls $f(x) \precsim x$, kann dagegen jeden beliebigen positiven Werth annehmen, wenn $f(x) \succ x$.

Hierdurch ist aber auf Grund des in II Gesagten das Umordnungsgesetz für solche Reihen, deren Glieder nicht rascher gegen Null convergiren, als $\frac{c}{\nu}$ für $\nu = \infty$ (c endlich und von Null verschieden) vollständig erledigt: es wird nämlich eine Umordnung, bei welcher m Glieder a_ν durch $\{m + \overline{f(m)}\}$ ersetzt werden, der Reihe gar keine, bezw. eine endliche oder unendliche Werthveränderung ertheilen, je nachdem $\lim \{a_m . \overline{f(m)}\}$ für $m = \infty$ Null bezw. endlich oder unendlich ist. Ist insbesondere $\lim \{a_m \overline{f(m)}\} = a$ (endlich), so hat jene Aenderung den Werth a bezw. $c \lg \left(1 + \frac{a}{c}\right)$, je nachdem $a_\nu < \frac{1}{\nu}$ oder $a_\nu \cong \frac{c}{\nu}$ ist. Während für stärker convergirende Reihen sich zunächst nur das negative Resultat ergiebt, dass alle Umordnungen, bei welchen an die Stelle von m Gliedern a_ν deren $(m + \overline{f(m)})$ treten, die Reihensumme unverändert lassen, sobald $\lim \{a_m \cdot \overline{f(m)}\}$ für $m = \infty$ nicht unendlich wird. Vor der weiteren Behandlung dieses letzten Falles soll erst die Richtigkeit des zuletzt gefundenen Resultates an einigen speciellen Beispielen, welche eine directe Ausführung der Integration zulassen, geprüft werden.

1) Sei zunächst wiederum $f(x) \prec x$, so bieten sich hier noch drei besondere Möglichkeiten dar, nämlich je nachdem $f(x)$ um keine noch so kleine angebbare Ordnung d. h. um keine noch so kleine angebbare Potenz x^ε (also höchstens um einen logarithmischen Factor) schwächer unendlich wird als x; oder aber von einer angebbaren Ordnung schwächer als x und selbst von einer mindestens angebbaren Ordnung (also: so wie $x^{1-\varepsilon}$, eventuell auch noch multiplicirt mit einem logarithmischen Factor); oder endlich selbst von keiner angebbaren Ordnung (z. B. wie ein einfacher oder iterirter Logarithmus). Diesen verschiedenen Möglichkeiten entsprechen die drei Beispiele:

$$f(x) = \frac{x}{\lg x}, \quad f(x) = x^{1-\varepsilon} \ (0 < \varepsilon < 1), \quad f(x) = \frac{\lg^2 x}{\lg x - 1},$$

welche bei Ausführung der unbestimmten Integration die Beziehungen liefern:

$$\int \frac{\lg x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \lg^2 x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} x^\varepsilon + C,$$

$$\int \frac{\lg x - 1}{\lg^2 x}\, dx = \frac{x}{\lg x} + C.$$

Setzt man jetzt im ersten Falle $\overline{f(m)} = a \cdot f(m) = a \cdot \frac{m}{\lg m}$, so wird

$$\int\limits_m^{m+a\frac{m}{\lg m}} \frac{x}{\lg x}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\lg^2 m\left(1+\frac{a}{\lg m}\right) - \lg^2 m\right\}$$

$$= \lg m \,.\, \lg\left(1+\frac{a}{\lg m}\right) + \frac{1}{2}\lg^2\cdot\left(1+\frac{a}{\lg m}\right)$$

folglich für $m = \infty$

$$\lim \int\limits_m^{m\left(1+\frac{a}{\lg m}\right)} \frac{x}{\lg x}\,dx = \lim \lg\left\{\left(1+\frac{a}{\lg m}\right)^{\lg m}\right\} = \lg e^a = a.$$

Diese Beziehung definirt dasselbe Umordnungsgesetz, welches sich im Beispiel (3) des § II ergab.

Ebenso wird im zweiten Falle für $\overline{f(m)} = a\,.\,m^{1-\varepsilon}$

$$\int\limits_m^{m+am^{1-\varepsilon}} \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}\left\{m^\varepsilon\,(1+am^{-\varepsilon}) - m^\varepsilon\right\}$$

$$= \frac{m^\varepsilon}{\varepsilon}\left\{\varepsilon\,.\,am^{-\varepsilon} + \frac{\varepsilon\cdot(\varepsilon-1)}{1\cdot 2}\,a^2\,.\,m^{-2\varepsilon}\,(1+\vartheta a m^{-\varepsilon})^{\varepsilon-2}\right\}$$

also

$$\lim \int\limits_m^{m+am^{1-\varepsilon}} \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = a$$

offenbar eine Verallgemeinerung des im ersten Paragraphen auf die Reihe $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{v}}\right)$ angewendeten Umordnungsgesetzes (s. auch II, Beispiel 2)).

Im dritten Falle werde $\overline{f(m)} = a \lg m$ (also $\overline{f(m)}$ zwar nicht $= a\,.\,f(m)$, aber $\simeq af(m)$) gesetzt, so ergiebt sich

$$\int\limits_m^{m+a\lg m} \frac{\lg x - 1}{\lg^2 x}\,dx = \frac{m + a\lg m}{\lg(m + a\lg m)} - \frac{m}{\lg m} = \frac{a\cdot\lg m}{\lg(m+a\lg m)}$$

$$- \frac{m\cdot\lg\left(1+\frac{a\lg m}{m}\right)}{\lg m\cdot\lg(m+a\lg m)}$$

folglich

$$\lim \int\limits_m^{m+a\lg m} \frac{\lg x - 1}{\lg^2 x}\,dx = a - \lim \frac{\lg e^{a.\lg m}}{\lg m\,\lg(m+a\lg m)} = a.$$

Da

$$\frac{\lg x - 1}{\lg^2 x} \simeq \frac{1}{\lg x},$$

so folgt hieraus, dass die Reihe

$$\sum_2^\infty {}_\nu \left\{ \frac{1}{\lg \nu} - \frac{1}{\lg \nu} \right\} = \lim_{m=\infty} \left\{ \sum_2^m {}_\nu \frac{1}{\lg \nu} - \sum_2^m {}_\nu \frac{1}{\lg \nu} \right\} = 0$$

die Werthveränderung a erleidet, wenn man an Stelle von m positiven Gliedern deren $\{m + [a \lg m]\}$ treten lässt, dass also

$$\lim \left\{ \sum_2^{m+[a\lg m]} {}_\nu \frac{1}{\lg \nu} - \sum_2^m \frac{1}{\lg \nu} \right\} = \sum_2^\infty {}_\nu \left\{ \sum_{\nu+[a\lg(\nu-1)]}^{\nu+[a\lg \nu]} {}_\varkappa \frac{1}{\lg \varkappa} - \frac{1}{\lg \nu} \right\} = a$$

wird. Und da $\lg x \cong \lg (2x) \cong \lg (2x+1)$, so wird auch die Reihe $\sum_2^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\lg \nu}$ bei dieser Umordnung dieselbe Werthveränderung erleiden.

2) Als Beispiel für den Fall $f(x) \sim x$ werde etwa gesetzt:

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

also

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2 \,.\, \lg (1 + \sqrt{x}) + C.$$

Wird jetzt $\overline{f(m)} = am$ (also $\cong a \,.\, f(m)$) gewählt, so ergiebt sich

$$\int_m^{m(1+a)} \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2 \lg \frac{1 + \sqrt{m(1+a)}}{1 + \sqrt{m}} = 2 \lg \frac{\frac{1}{\sqrt{m}} + \sqrt{1+a}}{\frac{1}{\sqrt{m}} + 1}$$

mithin

$$\lim \int_m^{m(1+a)} \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2 \lg \sqrt{1+a} = \lg (1+a) \quad \left(\text{also in der That} \cong \int_m^{m(1+a)} \frac{dx}{x}\right).$$

3) Sei endlich

$$f(x) = x \lg x \qquad (\text{also } f(x) \succ x),$$

sodass also

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{x \lg x} = \lg \lg x + C.$$

Setzt man alsdann $\overline{f(x)} = am \lg m - m$ (also wiederum $\cong a \,.\, f(m)$, nämlich $\cong a \,.\, m \,.\, \lg m$), so wird

$$\int_m^{am\lg m} \frac{dx}{x \cdot \lg x} = \lg \frac{\lg (am \lg m)}{\lg m} = \lg \frac{\lg a + \lg m + \lg \lg m}{\lg m},$$

also

$$\lim \int^{am\lg m} \frac{dx}{x \cdot \lg x} = 0,$$

solange a *nicht* unendlich ist oder doch schwächer unendlich wird, als jede noch so kleine angebbare Potenz von m. Hat man hingegen $a = m^b$ (wo b endlich und positiv), so wird

$$\lim \int_m^{m^{1+b}\cdot \lg m} \frac{dx}{x\cdot \lg x} = \lim \lg \frac{(1+b)\lg m + \lg\lg m}{\lg m} = \lg(1+b)$$

und sogar schon

$$\lim \int_m^{m^{1+b}} \frac{dx}{x\cdot \lg x} = \lim \lg \frac{(1+b)\lg m}{\lg m} = \lg(1+b)$$

(es übt also hier der Factor $\lg m$ in der oberen Grenze auf den Integralwerth gar keinen Einfluss aus: der Grund hiervon wird noch durch die allgemeine Untersuchung des folgenden Paragraphen deutlich werden). Wird schliesslich a stärker unendlich als jede angebbare Potenz von m, etwa wie b^m (wo $b > 1$), so ergiebt sich

$$\lim \int_m^{b^m} \frac{dx}{\lg x} = \lim . \lg \frac{m\cdot \lg b}{\lg m} = \infty$$

und es zeigt also dieses Beispiel, dass in der That ein Integral der betrachteten Art (d. h. für $f(x) \succ x$) jeden beliebigen Werth annehmen kann, wenn für die untere Grenze m die obere noch stärker unendlich wird als $f(m)$ (wobei schon $f(m) \succ m$).

Schreibt man ferner in der vorletzten Gleichung p statt $1+b$, also

$$\lim \int_m^{m^p} \frac{dx}{x\cdot \lg x} = \lg p$$

(eine Gleichung, welche offenbar auch für $p < 1$ gültig bleibt)

so folgt, dass die Reihe

$$\sum_2^\infty{}^{\nu} \left\{ \frac{1}{\nu \lg \nu} - \frac{1}{\nu \lg \nu} \right\} = \lim_{m=\infty} \left\{ \sum_2^{m^p}{}^{\nu} \frac{1}{\nu \lg \nu} - \sum_2^{m}{}^{\nu} \frac{1}{\nu \lg \nu} \right\}$$

die Werthveränderung $\lg p$ erleidet, wenn man m^p positiven Gliedern m negative zuordnet, sodass also — wenn etwa p eine ganze positive Zahl bedeutet —

$$\sum_1^\infty{}^{\nu} \left\{ \sum_{(\nu-1)^p+1}^{\nu^p}{}^{\varkappa} \frac{1}{(\varkappa+1)\lg(\varkappa+1)} - \frac{1}{(\nu+1)\lg(\nu+1)} \right\} = \lg p$$

und wenn q ebenfalls eine ganze positive Zahl ist:

$$\sum_1^\infty \left\{ \sum_{(\nu-1)^p+1}^{\nu^p} \frac{1}{(\varkappa+1)\lg(\varkappa+1)} - \sum_{(\nu-1)^q+1}^{\nu^q} \frac{1}{(\varkappa+1)\lg(\varkappa+1)} \right\} = \lg \frac{p}{q}.$$

Setzt man insbesondere $p = 2$, $q = 1$, so wird eine beliebige Gruppe von positiven Gliedern, nämlich $\sum_{(\nu-1)^2+1}^{\nu^2} \frac{1}{(\varkappa+1)\lg(\varkappa+1)}$, aus $(2\nu - 1)$ Gliedern bestehen — d. h. ordnet man die positiven Glieder in Gruppen an, welche der Reihe nach aus $1, 3, 5, \ldots, (2\nu - 1), \ldots$ Termen bestehen und schaltet zwischen je zwei Gruppen ein negatives Glied ein, so resultirt als Summe der Reihe der Werth $\lg 2$.

V.

Der Fall, wo die unendlich entfernten Reihenglieder stärker gegen Null convergiren als $\lim \frac{c}{n}$.

Es bleibt jetzt noch die allgemeine Untersuchung des Integrales $\int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)}$ für den Fall zu erledigen, dass $f(x)$ mit x stärker unendlich wird als x selbst, aber immerhin schwächer als

$$x \lg_1 x \lg_2 x \ldots \lg_{\varkappa-1} x \lg_\varkappa^{1+\varepsilon} x$$

für jedes noch kleine angebbare ε und beliebig grosse angebbare $\varkappa$. Man wird hiernach unter Berücksichtigung der allgemeinsten Möglichkeiten setzen können:

$$(32)\quad f(x) \cong g.x\lg_1 x.\lg_2 x \ldots \lg_{\varkappa-1} x \lg_\varkappa^{1-p} x.\lg_{\varkappa+1}^{q_1} x \ldots \lg_{\varkappa+\lambda}^{q_\lambda} x.\vartheta(x)$$

wo g eine endliche positive Constante bedeutet;

$\varkappa$ eine ganze positive Zahl ≥ 1 (und zwar im Falle $\varkappa = 1$ $\lg_{\varkappa-1} x = \lg_0 x = x$ zu setzen ist) und die Reihe der Indices $1, 2, \ldots, (\varkappa - 1)$ als vollständig zu denken ist;

p eine positive, um ein angebbares von Null verschiedene, im übrigen beliebig grosse Zahl, $q_1 \ldots q_\lambda$ beliebige positive oder negative Zahlen (einschliesslich der Null) bedeuten;

$\vartheta(x)$ eine beständig zunehmende Function bezeichnet, die für $x = \infty$ schwächer unendlich wird als jede noch so niedrige Potenz eines iterirten Logarithmus von beliebig hoher Rangstufe.*)

Nimmt man an, dass q_α der erste von Null verschiedene Exponent in der Reihe $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda$ ist, und unterscheidet ausserdem noch die

*) Auf die Möglichkeit derartiger Unendlichkeiten hat Herr Dubois-Reymond aufmerksam gemacht: Crelle's Journal Bd. 76, S. 88.

beiden Fälle $p = 1$ und $p \gtrless 1$, so wird sich $f(x)$ in eine der folgenden beiden Formen setzen lassen:

$$\left.\begin{array}{l}(A)\ f(x) \simeq x.\lg_1 x \ldots \lg_{\varkappa-1} x.\varphi(x)\\(B)\ f(x) \simeq x.\lg_1 x \ldots \lg_{\varkappa-1} x.\lg_\varkappa^{1-p} x.\varphi(x)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{wo}\\ \varphi(x) = g.\lg_{\varkappa+\alpha}^{q_\alpha} x \ldots \lg_{\varkappa+\lambda}^{q_\lambda} x.\vartheta(x).\\ (\alpha \geqq 1)\end{array}$$

Hierbei wird $\varphi(x)$ mit unendlich wachsendem x entweder beständig zu- oder abnehmen, und schliesslich ∞ bezw. 0 werden, je nachdem q_α positiv oder negativ ist.

Die beiden Fälle (A), (B) sind für die weitere Untersuchung zu trennen. Man hat zunächst:

$$\text{(A)}\quad \Delta_m = \int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)} \simeq \int_m^{m'} \frac{dx}{x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x} \frac{1}{\varphi(x)} \simeq \left[\frac{\lg_\varkappa x}{\varphi(x)}\right]_m^{m'} + \int_m^{m'} \frac{\lg_\varkappa x \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)} dx.$$

Nach dem früher gesagten (Gleichung (23), (24)) wird das zweite Glied der rechten Seite gegen das erste verschwinden, wenn

$$\frac{\lg_\varkappa x \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \prec \frac{1}{x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \cdot \varphi(x)},$$

wenn also:

$$(33)\qquad \lim_{x=\infty} \left\{x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right\} = 0.$$

Man hat nun

$$\begin{aligned}x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} &= x \cdot \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \cdot \frac{d \lg \varphi(x)}{dx}\\ &= x \cdot \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \cdot \frac{d}{dx} \left\{q_\alpha \cdot \lg_{\varkappa+\alpha+1} x + \cdots\right.\\ &\qquad\qquad \left. + q_\lambda \lg_{\varkappa+\lambda+1} x + \lg \vartheta(x)\right\}\\ &= x \cdot \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \cdot \left\{\frac{q_\alpha}{x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa+\alpha} x} + \cdots\right.\\ &\qquad\qquad \left. + \frac{q_\lambda}{x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa+\lambda} x} + \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}\right\}\\ &= \frac{q_\alpha}{\lg_\varkappa x \cdots \lg_{\varkappa+\alpha} x} + \cdots + \frac{q_\lambda}{\lg_\varkappa x \cdots \lg_{\varkappa+\lambda} x}\\ &\qquad\qquad + \frac{d \lg \vartheta(x)}{d \lg_\varkappa x}.\end{aligned}$$

Da nun $\vartheta(x) \prec \lg_{\varkappa+1} x$ und daher um so mehr

$$\lg \vartheta(x) \prec \lg_{\varkappa+1} x$$

so wird nicht nur von einer bestimmten endlichen Stelle x ab $\lg \vartheta(x) < \lg_{\varkappa+1} x$

sein, sondern auch langsamer zunehmen als $\lg_{\varkappa+1} x$, sodass man also auch setzen darf

$$\frac{d \lg \vartheta(x)}{dx} < \frac{d \lg_{\varkappa+1} x}{dx}$$

und folglich — da

$$\frac{d \lg_{\varkappa+1} x}{dx} \prec \frac{d \lg_{\varkappa} x}{dx}$$

ist:

$$\frac{d \lg \vartheta(x)}{dx} \prec \frac{d \lg_{\varkappa} x}{dx}.$$

Es wird somit der obige Ausdruck für $x = \infty$ in der That verschwinden, und man erhält auf diese Weise:

$$(34) \qquad \Delta_m \simeq \frac{\lg_\varkappa m'}{\varphi(m')} - \frac{\lg_\varkappa m}{\varphi(m)}.$$

Behufs weiterer Behandlung dieses Ausdruckes setze ich zur Abkürzung:

$$(35) \quad \lg_\varkappa m = n, \quad \varphi(m) = g \,.\, \lg_\alpha^{q_\alpha} n \lg_{\alpha+1}^{q_{\alpha+1}} n \ldots \lg_\lambda^{q_\lambda} n \,.\, \xi(n) = \psi(n)$$

wo

$$\xi(n) = \xi(\lg_\varkappa m) = \vartheta(m)$$

als Function von n betrachtet für $n = \infty$ noch schwächer unendlich wird, als jede noch so niedrige Potenz eines beliebig oft iterirten Logarithmus von n.

Ferner werde m' durch die Gleichung definirt

$$(36) \qquad \lg_\varkappa m' = \lg_\varkappa m + h = n + h$$

(wo h eine noch zu bestimmende Function von n bezw. m bedeutet), sodass also

$$\begin{aligned} \varphi(m') &= g \,.\, \lg_{\varkappa+\alpha}^{q_\alpha} m' \ldots \lg_{\varkappa+\lambda}^{q_\lambda} m' \,.\, \vartheta(m') \\ &= g \,.\, \lg_\alpha^{q_\alpha}(n+h) \ldots \lg_\lambda^{q_\alpha}(n+h) \,.\, \xi(n+h) = \psi(n+h) \end{aligned}$$

wird. Alsdann ergiebt sich:

$$(37\text{a}) \quad \Delta_m = \frac{n+h}{\psi(n+h)} - \frac{n}{\psi(n)} \simeq \frac{h}{\psi(n+h)} - \frac{n\left\{\psi(n+h) - \psi(n)\right\}}{\psi(n)\,\psi(n+h)}.$$

Das letzte Glied der rechten Seite lässt sich folgendermassen umformen:

$$\frac{n\left\{\psi(n+h) - \psi(n)\right\}}{\psi(n)\,\psi(n+h)} = \frac{n \cdot h \cdot \psi'(n+\vartheta h)}{\psi(n) \cdot \psi(n+h)} = \frac{n}{n+\vartheta h} \cdot \frac{h}{\psi(n)} \cdot \frac{\psi(n+\vartheta h)}{\psi(n+h)} \cdot \varepsilon_n,$$

wo

$$\varepsilon_n = \frac{(n+\vartheta h) \cdot \psi'(n+\vartheta h)}{\psi(n+\vartheta h)} = \frac{x \cdot \psi'(x)}{\psi(x)} \quad (\text{wenn } n+\vartheta h = x);$$

mithin

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

ist — für jedes beliebige positive h.

Setzt man jetzt $h = \overline{\psi(n)}$, sodass also

$$(37\text{b})\qquad \Delta_m \simeq \frac{\overline{\psi(n)}}{\psi\left\{n + \overline{\psi(n)}\right\}} - \frac{n}{n + \overline{\psi(n)}} \cdot \frac{\overline{\psi(n)}}{\psi(n)} \cdot \frac{\psi\left(n + \vartheta \cdot \overline{\psi(n)}\right)}{\psi\left(n + \overline{\psi(n)}\right)} \cdot \varepsilon_n$$

wird, so ergiebt sich

$$(38\text{a})\qquad \lim \Delta_m \begin{cases} = 0 & \text{falls } \overline{\psi(n)} \prec \psi(n) \\ = a & \;\;-\;\; \overline{\psi(n)} \simeq a \cdot \psi(n) \end{cases}$$

wenn man beachtet, dass — wegen $\psi(n) \prec n$ und $\psi(2n) \simeq \psi(n)$ — in diesen Fällen auch $\overline{\psi(n)} \prec n$ und

$$\psi\left\{n + \overline{\psi(n)}\right\} \simeq \psi\left\{n + \vartheta\, \overline{\psi(n)}\right\} \simeq \psi(n)$$

ist. Hat man dagegen $\overline{\psi(n)} \succ \psi(n)$ und zwar zunächst nur so, dass immerhin $\overline{\psi(n)} \precsim n$, so behält diese letzte Beziehung noch Gültigkeit, und es ergiebt sich daher ohne weiteres

$$\lim \Delta_m = \infty .$$

Da aber der Werth des Integrales Δ_m offenbar noch vermehrt wird, wenn $\overline{\psi(n)}$ noch grösser genommen wird, so folgt allgemein, dass

$$(38\text{b})\qquad \lim \Delta_m = \infty \quad \text{falls} \quad \overline{\psi(n)} \succ \psi(n).$$

Führt man jetzt wieder statt der Variabeln n die ursprüngliche m ein und setzt etwa

$$\overline{\psi(n)} = \overline{\varphi(m)}\,,$$

sodass also nach Gleichung (36)

$$(39)\qquad \lg_\varkappa m' = n + \overline{\psi(n)} = \lg_\varkappa m + \overline{\varphi(m)}$$

wird, so lässt sich das gefundene Resultat folgendermassen aussprechen:

Das Integral

$$\int_m^{m'} \frac{dx}{x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \cdot \varphi(x)}\,,$$

wo

$$\varphi(x) \simeq g \lg_{\varkappa+\alpha}^{q_\alpha} x \cdots \lg_{\varkappa+\lambda}^{q_\lambda} x \cdot \vartheta(x) \qquad (\alpha \geqq 1)$$

ist, nimmt, wenn m' durch die Gleichung

$$\lg_\varkappa m' = \lg_\varkappa m + \overline{\varphi(m)}$$

bestimmt wird, für $m = \infty$ die Werthe

$$0 \qquad a \qquad \infty$$

gleichzeitig mit $\lim \dfrac{\overline{\varphi(m)}}{\varphi(m)}$ an.

Es wird also insbesondere jenes Integral den endlichen Grenzwerth a besitzen, wenn m' so bestimmt wird, dass

$$\lg_{\varkappa} m' \simeq \lg_{\varkappa} m + a \,.\, \varphi(m).$$

Setzt man speciell $\varkappa = 2$, $\varphi(x) = 1$, sodass sich also das zu behandelnde Integral auf das als Beispiel 3) des vorigen Paragraphen betrachtete

$$\int_m^{m'} \frac{dx}{x \lg x}$$

reducirt, so wird man zur Erzielung eines endlichen Grenzwerthes, der mit $\lg p$ bezeichnet werden möge,

$$\begin{aligned} \lg_2 m' &= \lg_2 m + \lg p \\ &= \lg (p \lg m) = \lg_2 (m^p) \end{aligned}$$

zu setzen haben, sodass also

$$m' = m^p$$

wird — in Uebereinstimmung mit dem einen in § IV, Beispiel 3) gefundenen Resultate. Man braucht nun aber zur Erzielung des Grenzwerthes $\lg p$ — nach dem obigen Satze — $\overline{\varphi(m)}$ gar nicht

$$= \lg p \,.\, \varphi(m) \quad \text{d. h.} \quad = \lg p \; (\text{da } \varphi(m) = 1),$$

sondern nur $\overline{\varphi(m)} \simeq \lg p$ (für $m = \infty$) zu setzen, also etwa

$$\overline{\varphi(m)} = \lg (p + \alpha_m),$$

wo α_m für $m = \infty$ verschwindet. Hierdurchwird dann

$$\lg_2 m' = \lg m + \lg (p + \alpha_m) = \lg_2 m^{p + \alpha_m}$$

also

$$m' = m^{p + \alpha_m}.$$

Setzt man nun z. B. $\alpha_m = \frac{\lg_2 m}{\lg m}$ (sodass also die Bedingung $\lim \alpha_m = 0$ in der That erfüllt ist), so wird

$$m^{\alpha_m} = e^{\lg m \cdot \frac{\lg \lg m}{\lg m}} = \lg m$$

also

$$m' = m^p \cdot \lg m$$

ein Resultat, das ebenfalls bereits an der eben erwähnten Stelle zum Vorschein kam, das aber jetzt erst seine allgemeine Erklärung findet. —

(B) Ich behandle jetzt den zweiten der oben charakterisirten Unterfälle, wo also

$$\Delta_m = \int\limits_m^{m'} \frac{dx}{x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \lg_\varkappa^{1-p} x} \cdot \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{p} \cdot \left[\frac{\lg_\varkappa^p x}{\varphi(x)}\right]_m^{m'} + \frac{1}{p} \int\limits_m^{m'} \frac{\lg_\varkappa^p x \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)} dx$$

$$(p \lesseqgtr 1).$$

Die Bedingung für das Verschwinden des letzten Gliedes, nämlich

$$\frac{\lg_\varkappa^p x \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)} < \frac{1}{x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \cdot \lg_\varkappa^{1-p} x \cdot \varphi(x)}$$

stimmt, auf die Form

$$\lim_{x=\infty} x \lg_1 x \cdots \lg_\varkappa x \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0$$

gebracht, mit der entsprechenden in (A) (Gleichung (33)) vollständig überein, ist daher, wie dort stets erfüllt, sodass also zunächst

$$\Delta_m \cong \frac{1}{p} \cdot \frac{\lg_\varkappa^p m'}{\varphi(m')} - \frac{1}{p} \cdot \frac{\lg_\varkappa^p m}{\varphi(m)}$$

oder wenn man wiederum

(40) $\lg_\varkappa m = n, \qquad \varphi(m) = \psi(n)$

(41) $\lg_\varkappa m' = \lg_\varkappa m + h = n + h, \quad$ also: $\varphi(m') = \psi(n+h)$

setzt:

$$\Delta_m \cong \frac{1}{p} \frac{(n+h)^p}{\psi(n+h)} - \frac{1}{p} \cdot \frac{n^p}{\psi(n)}$$

wird. Unter der Voraussetzung, dass

$$h < n$$

genommen wird, ist aber

$$(n+h)^p = n^p \left(1 + \frac{h}{n}\right)^p = n^p \left\{1 + p \cdot \frac{h}{n} \left(1 + \vartheta \frac{h}{n}\right)^{p-1}\right\} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

$$= n^p + p \cdot c_n \cdot n^{p-1} h$$

wo

$$c_n = \left(1 + \vartheta \frac{h}{n}\right)^{p-1} \quad \text{also:} \quad \lim_{n=\infty} c_n = 1.$$

Folglich wird

$$\Delta_m \cong c_n \cdot \frac{n^{p-1} h}{\psi(n+h)} - \frac{n^p \left\{\psi(n+h) - \psi(n)\right\}}{p \cdot \psi(n)\, \psi(n+h)}$$

$$\cong c_n \cdot \frac{n^{p-1} h}{\psi(n+h)} - \frac{n^p h \psi'(n + \vartheta h)}{p \cdot \psi(n)\, \psi(n+h)}$$

und wenn man jetzt

(42) $n^{p-1} h = \overline{\psi(n)} \qquad$ also: $h = n^{1-p}\, \overline{\psi(n)}$

setzt:

(43) $$\Delta_m \cong c_n \frac{\overline{\psi(n)}}{\psi(n+h)} - \frac{n \cdot \psi(\overline{n})\, \psi'(n+\vartheta h)}{p \cdot \psi(n) \cdot \psi(n+h)}$$

ein Ausdruck, welcher in allen seinen wesentlichen Bestandtheilen mit dem entsprechenden für den Fall (A) (Gleichung (37 b)) übereinstimmt und daher — immer unter der Voraussetzung $h \prec n$ — gerade so wie dort die drei Resultate liefert:

(44) $$\lim \Delta_m = \begin{cases} = 0 & \text{falls } \overline{\psi(n)} \prec \psi(n), \\ = a & \quad - \quad \overline{\psi(n)} \cong a\,\psi(n), \\ = \infty & \quad - \quad \overline{\psi(n)} \succ \psi(n). \end{cases}$$

Was nun die hierbei noch gemachte Beschränkung betrifft, dass $h \prec n$ d. h. nach Gleichung (42) $\overline{\psi(n)} \prec n^p$ (wo $p > 0$), so ist dieselbe offenbar in den beiden ersten Fällen, wo $\overline{\psi(n)} \precsim \psi(n)$ vorausgesetzt wird, eo ipso erfüllt. Im dritten Falle, wo $\overline{\psi(n)} \succ \psi(n)$, kann hingegen schliesslich auch $\overline{\psi(n)} \gtrsim n^p$ werden; da aber $\lim \Delta_m$ schon unendlich wird, sobald $\psi(n) \prec \overline{\psi(n)} \prec n^p$, so geschieht dies wiederum um so mehr, wenn $\overline{\psi(n)}$ noch grösser genommen wird: die Gleichungen (44) gelten also ganz allgemein.

Wird jetzt wieder

$$\overline{\psi(n)} = \overline{\varphi(m)}$$

gesetzt, sodass Gleichung (41) in Verbindung mit (42) übergeht in:

(45) $$\lg_\varkappa m' = n + n^{1-p} \,.\, \overline{\psi(n)} = \lg_\varkappa m + \lg_\varkappa^{1-p} m \,.\, \overline{\varphi(m)}$$

so lässt sich das gefundene Resultat analog wie in (A) folgendermassen aussprechen:

Das Integral

$$\int_m^{m'} \frac{dx}{x \lg_1 x \cdots \lg_{\varkappa-1} x \cdot \lg_\varkappa^{1-p} x \cdot \varphi(x)} \qquad (0 < p \gtrless 1),$$

wo

$$\varphi(x) \cong g \lg_{\varkappa+\alpha}^{q_\alpha} x \ldots \lg_{\varkappa+\lambda}^{q_\lambda} x \,.\, \vartheta(x) \qquad (\alpha \geq 1)$$

ist, nimmt, wenn m' durch die Gleichung

$$\lg_\varkappa m' = \lg_\varkappa m + \lg_\varkappa^{1-p} m \,.\, \overline{\varphi(m)}$$

bestimmt wird, für $m = \infty$ die Werthe

$$0 \qquad a \qquad \infty$$

gleichzeitig mit $\lim \frac{\overline{\varphi(m)}}{\varphi(m)}$ an.

Vergleicht man jetzt aber dieses Resultat mit dem sub (A) für den

Fall $p = 1$ gefundenen, so zeigt sich, dass jenes erstere aus dem eben abgeleiteten auch hervorgeht, wenn man darin $p = 1$ setzt. Man kann also die beiden Fälle, deren Trennung sich für die Durchführung der Untersuchung als nothwendig erwies, jetzt wieder in einen einzigen zusammenfassen und demgemäss folgenden Satz aussprechen:

Das Integral

$$\int_m^{m'} \frac{dx}{f(x)},$$

wo

$$f(x) \cong x \,.\, \lg_1 x \ldots \lg_{\varkappa-1} x \,.\, \lg_\varkappa^{1-p} x \,.\, \varphi(x) \quad (\varkappa \geqq 1,\; p > 0)$$

ist, und $\varphi(x)$ nur Factoren enthält, die für $x = \infty$ *höchstens* so unendlich oder Null werden, wie eine beliebige Potenz von $\lg_{\varkappa+1} x$, nimmt, wenn m' aus der Gleichung bestimmt wird:

$$\lg_\varkappa m' = \lg_\varkappa m \left\{1 + \lg_\varkappa^{-p} m \,.\, \overline{\varphi(m)}\right\} \tag{46}$$

für $m = \infty$ die drei Werthe

$0 \qquad a \qquad \infty$ (wo a endlich und von Null verschieden)

gleichzeitig mit $\lim \dfrac{\overline{\varphi(m)}}{\varphi(m)}$ an.

Berlin, April 1883.

Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes.

Von

O. Stolz in Innsbruck*).

In der Arbeit über Bolzano**) p. 269 habe ich auf eine Lücke hingewiesen, welche in dem Euclid'schen Beweise des Satzes: „Zwei Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser“ (Elem. XII. prop. 2.) gefunden werden kann. Diesen Gegenstand will ich nun eingehender besprechen und daran einige allgemeinere Betrachtungen, insbesondere über das *System der griechischen Geometrie* knüpfen.

1. Es ist schon öfter***) hervorgehoben worden, dass Euclid implicite den *Grundsatz* gebraucht: *eine Grösse kann so oft vervielfältigt werden, dass sie jede andere, ihr gleichartige, übertrifft.* (Vgl. insbesondere X. prop. 1). Bei Archimedes begegnet man einer ausdrücklichen *Annahme*, welche mit diesem Grundsatze übereinstimmt (vgl. a. a. O.). Derselbe mag daher kurz als *das Axiom des Archimedes* bezeichnet werden†). Eine Untersuchung, ob der in Rede stehende Satz als Grundsatz zu gelten hat oder nicht, erfordert zunächst, dass man sich über den Begriff „Grösse“ verständige.

---

*) Diese Arbeit, zuerst in den *Berichten des naturwissenschaftlich-medicinischen Vereines in Innsbruck* Jg. XII, p. 74 gedruckt, erscheint hier mit einigen Verbesserungen und Zusätzen.

**) Vgl. diese Annalen Bd. XVIII, p. 255. Alleinstehende Seitenangaben beziehen sich auf den genannten Band der A. — Euclid's Elemente sind nach der Ausgabe von Peyrard citirt.

***) Vgl. des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher . . . in das Hochdeutsche übersetzt von Joh. Christoph Sturmius, Nürnberg 1670, p. 8. — Archimedes Werke übersetzt von Nizze p. 44. — Hankel, Zur Geschichte der Mathematik 1874, p. 122.

†) Archimedes sagt in der Vorrede zur Schrift de quad. parabolae ausdrücklich, dass den in Rede stehenden Grundsatz schon frühere Geometer benutzten. Dazu gehört, wie aus dem Anfange des I. B. von der Kugel und dem Cylinder hervorgeht, unzweifelhaft Eudoxus. Wahrscheinlich ist er noch älter. Vgl. M. Cantor, Geschichte der Mathematik I, p. 209.

Unter *„Grössenbegriff“* verstehe ich mit H. Grassmann (Lehrbuch der Arithmetik p. 1) einen solchen Begriff, dass je zwei der darunter enthaltenen Objecte entweder als gleich oder als ungleich erklärt werden können. Hierbei sind zwei Forderungen zu erfüllen. Zunächst muss festgestellt werden, unter welcher Bedingung zwei Objecte derselben Art als gleich, beziehungsweise als ungleich anzusehen sind. Eine solche Festsetzung kann willkürlich vorgenommen werden, wenn sie nur so gegeben wird, dass falls zufolge derselben $A = B$, $B = C$ zu sagen ist, auch $A = C$ sein muss und dass als gleich bezeichnete Grössen in eindeutigen Verknüpfungen einander vertreten können. Ob die zuletzt erwähnte Forderung erfüllt ist, wird sich erst a posteriori und successive nachweisen lassen in dem Maasse als eindeutige Verknüpfungen der betrachteten Grössen zur Sprache gebracht werden. Das eben auseinandergesetzte Verfahren, Objecte irgend welcher Art mathematisch aufzufassen, findet sich schon im 5. Buch von Euclid durchgeführt. Gerade darin scheint mir der bleibende Werth dieses ausgezeichneten Denkmales des hellenischen Scharfsinnes zu bestehen.

Durch eine weitere Definition wird, wenn es überhaupt möglich oder auch nur wünschenswerth erscheint, festgesetzt, dass unter je zwei ungleichen Grössen eine die grössere heissen soll. Sie muss so gewählt werden, dass wenn ihr zufolge $A = B$, $B \geqq C$ gesagt wird, auch aus demselben Grunde $A > C$ sein muss. Die Erfüllung dieser Bedingung, welche man ebenfalls bei Euclid a. a. O. angegeben findet, erscheint jedoch *nicht immer hinreichend**).

Nunmehr schreitet man zur Erklärung der Addition und Subtraction der betrachteten Grössen. Im Folgenden soll stets vorausgesetzt werden, dass die Addition und Subtraction nach denselben

---

*) Würde man das Bestehen der Bedingung „$A > B$, $B \geqq C$ also $A > C$“ als ausreichend betrachten, um die Bezeichnung der grösseren unter zwei ungleichen Grössen zu rechtfertigen, so könnte man die Vergleichung der *reellen Zahlen* $a, b \ldots$ auch so vornehmen, dass man sagt $a > b$, falls $|a| > |b|$ und $a > -a$, a jetzt positiv gedacht. Um diese Möglichkeit auszuschliessen, muss noch *ein weiteres Postulat* aufgestellt werden, d. i. der Satz: „Ist $a > a'$, so ist $a + b > a' + b$“. — Es dürfte nicht ohne Interesse sein, dass dasselbe erfüllt ist, wenn man zur Vergleichung von je zwei *complexen Zahlen mit gewöhnlicher Addition und Subtraction:*

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = a \quad \text{und} \quad \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n = b$$

mit Hrn. Thomae (Abriss e. Theorie d. complexen Functionen 1870, p. 41) die Regel aufstellt: Es sei $a > b$, falls die erste der Differenzen $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2$, $\ldots \alpha_n - \beta_n$, welche nicht verschwindet, eine positive Zahl ist. Demnach ist es mehr bequem, als mit dem Systeme der allgemeinen Arithmetik vereinbarlich, von zwei gemeinen complexen Zahlen diejenige, deren absoluter Betrag grösser ist, auch die grössere zu nennen, wie es ab und zu vorkommt.

Regeln vorgenommen werden können, wie mit den ganzen absoluten Zahlen. Endlich nehmen wir noch an, dass jede Grösse in beliebig viele gleiche und mit ihr gleichartige (d. h. in dem Grössensysteme bereits vorhandene) Theile zerlegbar sei*).

Wenn man über ein System von Grössen nicht mehr voraussetzt, als bis jetzt angenommen worden ist (wie z. B. Euclid über *die Strecken*), so lässt sich das Axiom des Archimedes in der That *nicht* als eine nothwendige Folge der Prämissen darstellen. Denn es giebt ein Grössensystem, welches den eben aufgestellten Bedingungen genügt, ohne dass der genannte Grundsatz erfüllt ist**). Derselbe ist somit nicht, wie man wohl geglaubt, die Bedingung der Gleichartigkeit der betrachteten Grössen.

Es müssen somit die Grössen von den angegebenen Eigenschaften, die *absolute* Grössen heissen mögen, in zwei Classen getheilt werden, je nachdem das Axiom des Archimedes besteht oder nicht. Die Grössen der ersten Classe hat Hr. P. du Bois-Reymond treffend als *lineare*

---

*) Nothwendige und hinreichende Postulate für *absolute Grössen*. Ausser den bekannten Relationen

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C,$$

zufolge welcher die Summe commutativ und associativ ausfällt, sind noch zu nennen die Sätze: 1) $A + B > A$, 2) $A + B = A + C$ wenn $B = C$, 3) $A + B > A + C$ wenn $B > C$. Sowie die Summe $A + B$ eine Grösse des ursprünglich vorgelegten Systemes sein muss, so muss auch falls $A > B$, eine (und zufolge 3) nur eine) Grösse X existiren, welche die Gleichung $A = B + X$ erfüllt. Endlich soll eine Grösse X vorhanden sein von der Art, dass $nX = A$; wobei n jede beliebige ganze positive oder auch nur bestimmte solche Zahlen bedeuten kann.

**) Es ist das von Hrn. P. du Bois-Reymond aufgestellte und eingehend untersuchte System der *Unendlich der reellen Functionen*. (Vgl. Brioschi Ann. 2, IV (1871), p. 338 etc., und insbesondere diese Annalen Bd. XI, p. 147). Zur Beleuchtung des Folgenden mögen nachstehende Bemerkungen über dasselbe hier wiedergegeben werden. Wir gehen von einem Systeme von reellen Functionen $f(x)$, $f_1(x)$ ... aus, welche die Eigenschaft besitzen, dass jede für $\lim x = +\infty$ den Grenzwerth $+\infty$ hat und dass der Quotient von je zwei derselben beim nämlichen Grenzübergange einen Grenzwerth hat. Jeder dieser Functionen $f(x)$ wird eine Grösse zugeordnet, *die ihr Unendlich* heisst und für unseren Zweck (und nur für diesen) mit $\mathfrak{U}(f)$ bezeichnet werden mag. Man sagt $\mathfrak{U}(f) = \mathfrak{U}(f_1)$, wenn $\lim [f(x) : f_1(x)]$ weder 0 noch $+\infty$ ist; $\mathfrak{U}(f) > \mathfrak{U}(f_1)$, wenn derselbe Grenzwerth $+\infty$, $\mathfrak{U}(f) < \mathfrak{U}(f_1)$ wenn er 0 ist. Als untere Grenze dieses Grössensystemes wird die *uneigentliche* Grösse $\mathfrak{U}(1)$ eingeführt.

Hat das in Rede stehende System von Functionen die fernere Eigenschaft, dass auch jedes unendlich werdende Monom $f(x)^n f_1(x)^{n_1} \ldots$, worin $n, n_1 \ldots$ beliebige rationale Zahlen mit Einschluss der 0 bedeuten, dazu gehört; so kann man ihre „Unendlich" auf gewöhnliche Weise addiren *und* subtrahiren. Unter $\mathfrak{U}(f) + \mathfrak{U}(f_1)$ wird $\mathfrak{U}(ff_1)$ (und jedes ihm gleiche Unendlich), unter $\mathfrak{U}(f) - \mathfrak{U}(f_1)$, falls $\mathfrak{U}(f) > \mathfrak{U}(f_1)$ ist, $\mathfrak{U}(f : f_1)$ verstanden. Demnach ist $n\mathfrak{U}(f) = \mathfrak{U}(f^n)$; und es sei endlich

bezeichnet*); die der zweiten Classe sollen *nicht-lineare* genannt werden.

Der Grassmann'sche Grössenbegriff ist so allgemein, als man nur wünschen kann. Als Grössen specieller Art kann man die verschiedenen Arten der *Zahlen* betrachten. Gegenwärtig scheint es nicht mehr begründet, mit den Griechen die Grössen den Zahlen (d. i. den natürlichen Zahlen, oder nach späterer Auffassung den absoluten) gegenüberzustellen. Man spricht z. B. von gemeinen complexen Grössen, wenn man sich als Einheiten zwei gegebene Strecken denkt, von gemeinen complexen Zahlen, wenn man von solchen concreten Einheiten abstrahirt oder dieselben rein formal annimmt.

2. Es lässt sich nun zeigen, dass ein System von absoluten Grössen dem Axiome des Archimedes genügen muss, *wenn es als stetig vorausgesetzt wird.*

Wir setzen demnach ein Grössensystem Σ von den folgenden Eigenschaften voraus.

1) Je zwei Grössen des Systemes können entweder als gleich oder ungleich und im letzteren Falle kann die eine von ihnen als die grössere bezeichnet werden.

2) Die Grössen lassen sich addiren wie die natürlichen Zahlen, insbesondere *ist die Summe je zweier eine Grösse des Systemes.*

3) Falls $A < B$, so existirt *im Systeme* eine und nur eine Grösse X, so dass $A + X = B$.

$$\mathfrak{U}(\sqrt[n]{f}) = \frac{1}{n}\,\mathfrak{U}(f).$$

Die „Unendlich" des in der angegebenen Weise beschränkten Functionensystemes entsprechen demnach allen für die absoluten Grössen aufgestellten Bedingungen.

Die Gesammtheit derjenigen Functionen, welche ein System von der ersten oder zweiten Art bilden, lässt sich gegenwärtig noch nicht definiren (vgl. P. du Bois-Reymond in diesen Ann. XIV, p. 506). Es ist jedoch ohne Schwierigkeit zu zeigen, dass die Functionen $f(x)$, welche *rational* gebildet sind aus Potenzen mit positiven constanten Exponenten der Functionen, $x, lx, l_2x = l(lx) \ldots \ldots l_n x = l(l_{n-1}(x))$; $e^x = e(x)$, $e_2(x) = e(e^x), \ldots, e_n(x) = e(e_{n-1}(x))$, allen unseren Forderungen Genüge leisten. Wir wollen dieses System noch erweitern durch die Functionen $e(f(x))$. — Da nun $\lim(e^x : x^n) = +\infty$ für $\lim x = +\infty$, wie gross auch die ganze positive Zahl n sein mag, so ist $\mathfrak{U}(x) < \mathfrak{U}(e^x)$; aber es giebt keine ganze positive Zahl p, so dass $p\,\mathfrak{U}(x) > \mathfrak{U}(e^x)$ ist.

Hr. Thomae hat a. a. O. die *Ordnungen* des Verschwindens einer Function ebenfalls als Grössen aufgefasst, und insbesondere die den Functionen

$$x^\alpha \cdot \frac{1}{(lx)^\beta} \cdot \frac{1}{(l_2x)^\gamma} \cdots (\lim x = +0)$$

entsprechenden Grössen als *complexe Zahlen* von der Form $\alpha + \beta l + \gamma l_2 + \cdots$ dargestellt, was auch möglich ist.

*) Vgl. die allgemeine Functionentheorie I. p. 43.

4) Zwischen je zwei ungleichen Grössen liegt immer noch eine Grösse des Systemes und es giebt neben jeder Grösse noch eine kleinere, somit keine kleinste. Der letztere Umstand wird kurz dadurch ausgedrückt, dass man dem Systeme Σ die untere Grenze Null verleiht, wobei 0 eine adjungirte uneigentliche Grösse bedeutet.

Wie die Stetigkeit des Grössensystemes Σ zu definiren ist, hat Hr. R. Dedekind gelehrt*). Unsere Aufgabe besteht nun darin, die von ihm entwickelten Ideen genauer auszuführen.

Aus dem Systeme Σ denken wir uns ein System Π_0 zwischen den Grenzen 0 und B abgesondert, das ohne gerade alle Grössen von Σ zu enthalten, doch noch die obigen Eigenschaften besitzt. Insbesondere sollen zwischen je zwei Grössen $P < Q$ von Π_0 nicht allein unendlich viele Grössen liegen, sondern was aus 3) und 4) unmittelbar folgt, falls R eine Grösse zwischen P und Q bedeutet und D eine gehörig kleine, sonst beliebige Grösse von Π_0, so sollen im Intervalle (P, Q) auch Grössen S, S^1 vorkommen, so dass $R < S < R+D$, $R > S^1 > R-D$. Das System Π_0, sowie jeder Theil Π desselben begrenzt von irgend zwei Grössen $A'B'$ des Systemes Π_0, wird im Allgemeinen jedenfalls Lücken aufweisen, wie man auf folgende Weise erkennen kann.

Eine *Lücke* des Grössensystemes Π_0, bez. eines Theiles Π derselben heisst jede Theilung der ihm angehörigen Grössen P in zwei Gruppen von den folgenden Eigenschaften:

1) Jede Grösse P gehört einer und nur einer Gruppe an,

2) Wenn P_1 eine Grösse der ersten Gruppe ist, so auch jede Grösse $P < P_1$; wenn P_2 eine Grösse der zweiten Gruppe ist, so auch jede Grösse $P > P_2$. (Somit ist notwendig $P_1 < P_2$).

3) Ist P_1 eine Grösse der ersten Gruppe, so gehört zu ihr auch eine Grösse, welche P_1 überschreitet und ist P_2 aus der zweiten Gruppe, so befindet sich darin auch eine Grösse $P < P_2$.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder bleibt der Unterschied $P_2 - P_1$, was immer auch P_1 für eine Grösse der ersten, P_2 der zweiten Gruppe sein möge, über einer bestimmten Grösse von Π_0, oder er kann kleiner sein als irgend eine Grösse von Π_0. Lücken der letzteren Art sollen nach Hrn. Dedekind *Schnitte* von Π_0, bez. Π heissen. Wenn nun das System Π_0 nur Lücken der zweiten Art darbietet, so gilt der Satz: Bezeichnet M eine beliebige nicht zu Π_0 gehörige Grösse des Systemes Σ, die kleiner als B ist, so existiren im Systeme Π_0 Grössen P, welche von M weniger abweichen als eine gegebene Grösse D von Π_0 d. h. $P-D < M < P$ und $P' < M < P'+D$.— Denn angenommen, es sei stets $M - P_1 \geqq D$ und $P_2 - M \geqq D$, so würde das System Π_0 auch eine Lücke der ersten Art darbieten. Man

*) Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872.

bilde aus den Grössen von Π_0 die Gruppen $P_1 < M$ und $P_2 > M$, so werden sie den obigen Bedingungen entsprechen. So giebt es in der ersten Gruppe neben dem beliebigen P_1 noch eine grössere Grösse Q. Ist nämlich $D' < D$, so findet man in Π_0 Grössen $Q_1 < P_1 + D'$. Dabei muss $Q_1 > M$ sein, da sonst $Q_1 - M < D'$ wäre. Auf ähnliche Art weist man in der zweiten Gruppe eine Grösse Q_2 nach, welche kleiner als P_2 ist. Da nun durchaus $P_1 < M - D'$, $P_2 > M + D'$, so folgt $P_2 - P_1 > 2D'$, gegen die Voraussetzung. — Der analoge Satz gilt auch von jedem Systeme Π.

Je nachdem ein System Π_0 oder Π *nur Schnitte* aufweist oder auch Lücken der ersten Art zeigt, kann man es als zwischen seinen Grenzen *allenthalben* oder *stellenweise überall-dicht* bezeichnen*). Dieser Begriff erscheint aber hier etwas allgemeiner gebraucht, als von Hrn. G. Cantor, indem keineswegs vorausgesetzt wird, dass jedem Paare von Grössen M, N des Systemes Σ, welche innerhalb der Grenzen eines allenthalben überall-dichten Systemes Π_0 (bez. Π) liegen, aber nicht zu Π_0 gehören, Grössen P des Systemes Π_0 entsprechen, welche zwischen denselben gelegen sind: $M < P < N$.

Zur *Stetigkeit* des Systemes Σ ist nun erforderlich die Abwesenheit von Lücken. Allein das ist nicht hinreichend, da die Möglichkeit vorhanden ist, dass Schnitte eines aus Σ entnommenen überall-dichten Systemes Π durch mehr als eine Grösse von Σ geschlossen werden d. h. dass es mehrere Grössen in Σ giebt, welche grösser als alle P_1, kleiner als alle P_2 sind.

Die Stetigkeit des Systemes Σ wird demnach folgendermassen zu definiren sein (l. c. p. 18):

„Das Grössensystem Σ heisst zwischen den Grenzen A und B *stetig dann und nur dann*, wenn aus den ihm zugehörigen Grössen überall-dichte Systeme Π zwischen den genannten Grenzen gebildet werden können und wenn jeder Lücke erster Art eines solchen unzählig viele Grössen S aus Σ entsprechen, jede grösser als alle P_1

---

*) In der ersten Ausgabe der vorliegenden Arbeit wurde die Unterscheidung von Lücken erster und zweiter Art ausser Acht gelassen. Aehnliche Fehler sind auch Anderen untergelaufen; so Bolzano bei der Definition des Continuums, wie Hr. G. Cantor (diese Annalen Bd. XXI, p. 576) bereits hervorgehoben hat. Derselben genügt auch jede Punktmenge, welche aus einer gegebenen Strecke dadurch entsteht, dass eine in ihr enthaltene Strecke mit ihren Endpunkten entfernt wird. Hrn. Cantor's Bedingung des „Zusammenhanges" einer Menge kann ich hier nicht verwenden; denn sie setzt voraus, dass für die zum Systeme Π_0 gehörigen Grössen das Axiom des Archimedes bestehen soll. Soll nämlich für je zwei Grössen $P < Q$ von Π_0 bei vorgegebener beliebiger Grösse D von Π_0 eine endliche Anzahl von Grössen $R_1 R_2 \cdots R_n$ in Π_0 vorhanden sein, so dass die Unterschiede $R_1 - P_1$, $R_2 - R_1 \cdots Q - R_n$ sämmtlich kleiner sind als D, so würde eben folgen, dass $Q - P < (n+1)\,D$ sein muss.

und kleiner als alle P_2, jedem Schnitte aber *eine und nur eine solche Grösse* S*)". Nach der Definition einer Lücke ist es selbstverständlich, dass die soeben erwähnten Grössen S nicht dem bezüglichen Systeme Π angehören.

3. Satz. „Wenn für ein Grössensystem Σ ausser den schon im Eingange von Nr. 2 gemachten Voraussetzungen noch die *Stetigkeit* festgesetzt wird, so folgt notwendig:

1) *Die Theilbarkeit jeder Grösse A des Systemes Σ in beliebig viele* (n) *gleiche Theile*, d. i. im Systeme Σ existirt eine Grösse X, so dass $nX = A$;

2) *dass das Axiom des Archimedes besteht.*"

Beweis. Zu 1. Man bemerke zunächst: ist B eine gegebene Grösse von Σ, n eine beliebige natürliche Zahl, so existirt immer eine Grösse Y von der Art, dass $nY < B$. Dies ergiebt sich aus den Voraussetzungen in Nr. 2 unmittelbar. Würde man nun annehmen, es sei keine Grösse X vorhanden von der Art, dass $nX = A$ so könnte man im Systeme $(0, A)$ eine Lücke nachweisen, gegen die Voraussetzung der Stetigkeit. In der That ist $P < A$ so ist nP entweder $< A$ oder $> A$. Dadurch werden die Grössen $(0, A)$ in zwei Gruppen P_1, P_2 getheilt; $nP_1 < A$; $nP_2 > A$; welche den oben aufgestellten Bedingungen Genüge leisten. Insbesondere: ist P_1 eine Grösse der ersten Gruppe, so auch $P_1 + Y_1$ woferne nur Y_1 so gewählt wird, dass
$nY_1 < A - nP_1$; steht P_2 in der zweiten Gruppe, so auch $P_2 - Y_2$, woferne nur $nY_2 < nP_2 - A$.

*) Von besonderer Wichtigkeit ist die Forderung, dass jedem Schnitte nur *eine* Grösse zugeordnet sei. In dem oben aufgestellten Systeme von „Unendlich" giebt es Schnitte, denen unzählig viele Grössen entsprechen. So stellen die Grössen $\mathfrak{U}(x^\mu)$ — $0 < \mu < 1$ — einer- und die Grössen $\mathfrak{U}(x^\nu)$ — $\nu > 1$ — andererseits die Gruppen eines Schnittes dar, dem aber nicht allein die Grösse $\mathfrak{U}(x)$ entspricht, sondern auch alle Grössen $\mathfrak{U}(g_n)$, wo

$$g_n = x^{\frac{l_n(x)}{1+l_n(x)}} \qquad (n \geqq 2).$$

Für diese von Hrn. du Bois-Reymond a. a. O. angegebene Function ergiebt sich in der That

$$\lim_{x=+\infty} \frac{g_n(x)}{x^\mu} = 0 \text{ oder } +\infty, \text{ je nachdem } \mu > \text{ oder } < 1.$$

Und es ist ferner für $\lim. x = +\infty$

$$\text{Lim.} \frac{g_n(x)}{x} = 0, \quad \lim. \frac{g_m(x)}{g_n(x)} = +\infty \quad (m < n).$$

Zu 2. Es sei $A < B$. Würde die Reihe wachsender Grössen $A, 2A \cdots nA \cdots$ die Grösse B nicht überschreiten, so müsste sie einen Grenzwerth $C \leqq B$ haben, so dass $C > nA$ aber $C - A < mA$. Darin liegt ein Widerspruch, da $C < (m + 1)\ A$ folgen würde.

Es ist nur nachzusehen: ob der hier benutzte Satz (vgl. Dedekind l. c. p. 29): „Wenn $M_1 M_2 \cdots M_n \cdots$ eine unbegrenzte Reihe wachsender Grössen des stetigen Systemes $\Sigma : (0, B)$ bezeichnet, welche die Grösse B nicht überschreiten, so existirt eine und nur eine Grösse $C \leqq B$ von der Art, dass C grösser ist als alle M_n; dass jedoch zu jeder Grösse D des Systemes eine ganze Zahl m gehört, welche der Bedingung genügt $M_n > C - D$ für $n \geqq m$" — nicht das Axiom des Archimedes voraussetzt. Das ist jedoch nicht der Fall. In der That, würde die Existenz einer solchen Grösse C nicht zugestanden, so wäre im Systeme $(0, B)$ eine Lücke vorhanden. Die erste Gruppe wird gebildet von allen Grössen P_1, die kleiner sind als irgend ein M_n; die zweite von denjenigen P_2, die grösser sind als jedes M_n. Diese beiden Gruppen entsprechen vollkommen den in Nr. 2 aufgestellten Bedingungen, wie leicht ersichtlich ist. So findet man z. B. in der zweiten Gruppe stets eine Grösse $P < P_2$. Denn es darf zufolge Annahme nicht sein bei beliebigem D $M_n > P_2 - D$ für alle hinlänglich grossen Werthe von $n : n \geqq m$; so dass, wie gross auch n vorausgesetzt werden mag, eine Zahl $r > n$ vorhanden sein muss, wofür $M_r \leqq P_2 - D$. Somit muss es Grössen D geben so beschaffen, dass wenn P beliebig gewählt wird zwischen $P_2 - D$ und P_2, $P > M_r > M_n$ ist. — Und zwar existirt nur *eine* Grösse C. Denn hätte C' dieselben Eigenschaften, und wäre $C' > C$ angenommen, so wäre, wie klein auch D sein mag, $C + D > M_m + D > C'$. Ebensowenig kann $C' < C$ sein. (Vgl. Nr. 5).

Nunmehr folgt auch der Satz: „Das überall-dichte Grössensystem Π_0 enthält Grössen kleiner als jede gegebene Grösse E des stetigen Systemes Σ". Angenommen es seien alle Grössen P von $\Pi_0 \geqq E$ folglich $> E'$. Nun ist leicht einzusehen zufolge der 3. Eigenschaft von Π_0 (vgl. Nr. 2), dass es im Systeme Π_0 Grössen Y giebt von der Art, dass $nY < P$, wie gross auch n sein mag. Gemäss der Voraussetzung wäre nun auch $Y > E'$, folglich $P > nE'$ gegen das Axiom des Archimedes. — Der vorstehende Satz ist identisch mit dem folgenden: „Es seien im Systeme Π_0 $(0, B)$ eine unbegrenzte Reihe wachsender Grössen $M_1 M_2 \cdots M_n \cdots$ gegeben, welche B nicht überschreiten, dieser Grösse aber näher kommen als irgend eine Grösse D von Π_0. Ist nun das Grössensystem Σ im Intervalle $(0, B)$ stetig, so muss jede Grösse S von Σ die kleiner als B und verschieden von den M_n ist, entweder kleiner als M_1 sein oder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Grössen M_m und M_{m+1} der obigen Reihe liegen." — In

der That, da $D < B - S$ angenommen werden kann, so folgt schliesslich $M_n > B - D > S$. — Für die „Unendlich" gilt keiner der beiden Sätze (P. du Bois-Reymond l. c.).

Ferneres ergiebt sich: „Ist das System Σ zwischen seinen Grenzen A, B *stetig* und Π ein daraus entnommenes Grössensystem, allenthalben zwischen den Grenzen A, B überall-dicht; sind ferner M, N zwei beliebige Grössen von Σ, welche nicht zu Π gehören, *so giebt es im Systeme* Π *Grössen* P, *welche zwischen* M *und* N *liegen*". Es sei $M < N$. Nun giebt es in Π Grössen P, so dass $M < P < M + D$, wo D eine beliebige Grösse aus Π_0 bedeutet. Wegen der Stetigkeit von Σ kann man aber $D < N - M$ voraussetzen, woraus der Satz unmittelbar folgt.

4. Somit ist erwiesen, dass das Axiom des Archimedes für die *Strecken* im Sinne der alten Geometrie als Corollar erscheint, wenn man zu den ihnen von Eudlid beigelegten Eigenschaften noch die Stetigkeit des Systemes derselben .fügt. Soll aber diese Annahme unterbleiben, so müsste der erwähnte Grundsatz für *das System der Strecken* (sowie auch *für das der Winkel*) unter die Axiome der Geometrie aufgenommen werden.*)

5. Zufolge des oben angeführten Grassmann'schen Grössenbegriffes lassen sich Dinge derselben Art nur dann als Grössen ansehen, wenn ein Verfahren angegeben wird, nach welchem die Vergleichung von irgend zwei derselben durchgeführt werden soll. Die griechischen Geometer schlugen hinsichtlich der Raumgebilde (Strecken, Flächenräume, Körper) gerade den umgekehrten Weg ein. Ihnen steht *die Vergleichbarkeit* von je *zwei gleichartigen derselben von vorneherein* fest, d. h. ohne dass die Möglichkeit der Vergleichung auf geometrischem Wege nachgewiesen zu werden brauchte**). Ausserdem legen sie den Raumgrössen die Eigenschaften 2) — 4) in Nr. 2 bei, ferner die Theilbarkeit einer jeden in gleiche und mit ihr gleich-

---

*) Es scheint mir sicher zu sein, dass Archimedes den oft erwähnten Satz als Axiom bezeichnet hat, weil er ihn aus seinen Voraussetzungen über die geometrischen Grössen nicht abzuleiten vermochte Wie ich bereits p. 269 anmerkte, folgt er nicht aus den in Nr. 2 angegebenen Eigenschaften 1) — 4) eines Grössensystemes Σ, sondern bildet neben ihnen eine nothwendige Voraussetzung über ein System von linearen absoluten Grössen. Es ist offenbar, dass diese Ansicht gerade durch die Bekanntschaft mit dem Systeme der „Unendlich" begründet wird. Ich sehe die von Hrn. du Bois-Reymond entdeckte Unterscheidung zwischen linearen und nicht-linearen Grössen als einen fundamentalen Gedanken an und habe ihn demgemäss (sowie auch die übrigen in diesem Aufsatze entwickelten Ansichten) für meine Vorlesungen über allgemeine Arithmetik in W. S. 1881|2 benutzt.

**) Dieselbe Voraussetzung macht Hrn. de Tilly's erstes Axiom der Geometrie. (Mémoires de Bordeaux 2 sér. T. III. p. 3).

artige Theile*) und die im Axiome des Archimedes ausgesprochene Eigenschaft.

Für eine solche Darstellung sind Euclid's Axiome 1—9 *sämmtlich* unentbehrlich. Sein 8. und 9. Axiom geben zwar die geometrische Erklärung *specieller Fälle* der Gleichheit und Ungleichheit von Raumgebilden (welche bezüglich der Strecken und Winkel allgemein ausreichen), aber man sucht bei Euclid vergebens eine solche, in Betreff zweier gleichen Flächenräume und Körper, die nicht gleich und ähnlich sind. Um seine Darstellung der Sätze über die gleichen Polygone in obigem Sinne zu verbessern, hat man bekanntlich von der Definition auszugehen: Gleich sind zwei Zellen (d. i. von je einer einfachen geschlossenen Linie begrenzte Flächen), wenn sie entweder gleich und ähnlich sind, oder aus Theilen bestehen, die gleich und ähnlich sind.**) Da eine geradlinig- und eine krummlinig-begrenzte Zelle „weder congruent noch in congruente Flächentheile zerfällbar sind, so ist es, von dem hier angegebenen Standpunkte aus, insoferne man den Begriff der Gleichheit in dessen geometrischer Klarheit und Bestimmtheit erhalten will, nicht wohl abzusehen, auf welche Weise sich jemals eine Vergleichung zwischen beiden Gattungen von Flächen, dem Begriffe der Nothwendigkeit nach, werde zu Stande bringen lassen."***) Hier giebt es eben keinen anderen Ausweg als den Flächeninhalt der letzteren Zelle mit Hülfe von Infinitesimalbetrachtungen zu definiren.

*) Genau genommen wird allerdings nur die Theilbarkeit durch 2 gefordert, wie aus Euclid. X prop. 1, Archimedes de quadratura parabolae prop. 20 etc. hervorgeht.

**) P. Gerwien hat gezeigt (Crelle J. X. p. 229), dass zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und Höhen in Stücke zerschnitten werden können, welche bezüglich gleich und ähnlich sind. Einfacher hat Duhamel (vgl. des Methodes dans les sciences de raisonnement II, p. 445) die Lehre von den gleichen Polygonen in der Ebene dargestellt. Er bemerkt ausdrücklich, dass bei Zugrundelegung der im Texte erwähnten Definition das 3. und 7. Axiom, welche Euclid im Beweise der Sätze Elem. I 35 - 38 benützt, nicht mehr zulässig seien. Die in diesen Axiomen ausgesprochenen Sätze erscheinen vielmehr als Folgerungen, nachdem die Vergleichbarkeit aller geradlinig begrenzten Zellen in obigem Sinne nachgewiesen ist, was übrigens auch von Duhamel nicht vollständig geleistet wurde. Hierzu ist noch zu zeigen, dass die in Euclid. Elem. I. prop. 43 als gleich bezeichneten Parallelogramme sich auch in gleiche und ähnliche Stücke zerlegen lassen. Solche erhält man, wenn man die zweite Diagonale desjenigen Parallelogrammes, in welchem die ersteren liegen, zieht und zu ihr durch die gemeinsame Ecke ebenderselben eine Parallele.

***) Die angeführten Worte stehen in der Abhandlung von E. H. Dirksen: „Ueber die Anwendung der Analysis auf die Rectification der Curven etc." (Abh. der kgl. Academie zu Berlin aus dem Jahre 1833), indess bezogen auf eine ebene und krumme Fläche, Wie mir scheint, passen sie auch auf zwei beliebige ebene Zellen z. B. auf einen Kreis und ein Quadrat. Erscheint es, wie a. a. O. p. 128

Wesentlich davon verschieden musste das Verfahren der Griechen sich gestalten. Nachdem durch die Axiome 8. und 9. die Vergleichung von räumlichen Grössen in gewissen Fällen anschaulich gelehrt ist, wird vermöge der übrigen Axiome *rein dialectisch* die Vergleichung in einigen Fällen erzielt, die nicht unter die erstgenannten Axiome unterzubringen sind. Diese Methode reicht jedoch nicht weit; es musste daher ein neues Mittel ersonnen werden, das allerdings von den Alten nicht ausdrücklich als der leitende Gedanke erklärt ist.

Die Griechen geben vielmehr zu den von ihnen gefundenen Sätzen über die Quadratur krummlinig-begrenzter Zellen stets indirecte Beweise. Die Schwierigkeit, die man manchmal in denselben gefunden hat, verschwindet bei näherer Betrachtung. Sie lassen sich nämlich *sämmtlich* auf folgenden Satz zurückführen: „Zwei geometrische Grössen A, B sind einander gleich, falls sich zeigen lässt, dass bei der Annahme $A > B$ der Unterschied $A - B$, und bei der Annahme $A < B$ der Unterschied $B - A$ kleiner wäre als jede mit A, B gleichartige Grösse.“*) *Es ist dies der einzige Ausweg, den die Alten einschlagen konnten.*

Die Benützung dieses Satzes wird ermöglicht durch das Axiom von Archimedes. Dasselbe lässt sich, wenn es für die Strecken festgesetzt ist, für zwei beliebige Zellen A, B *wenigstens in der Euclid'schen Geometrie* leicht nachweisen, wie mir Herr Dantscher v. Kollesberg mittheilt. Ist $A < B$, so construire man ein Quadrat

---

ausgeführt ist, nothwendig, vor Allem die Länge einer krummen Linie als Zahl zu definiren, so wird man dieselbe Forderung auch gegenüber den ebenen Zellen aufstellen müssen und den Inhalt einer solchen nicht als das geometrische Verhältniss ihrer Grösse zu der Grösse eines Quadrates, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist, definiren können, wie es a. a. O. pag. 141 geschieht. — Der Bogen CC' wird hier so definirt, wie p. 273; jedoch beschränkt sich Dirksen durchaus auf die Annahme der gleichen Theilung des Intervalles $a' - a$

$$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = (a' - a) : n.$$

Auch, fehlt wenigstens im Sinne von p. 259, der Nachweiss, dass für lim $n = +\infty$ ein Grenzwerth vorhanden sei. (Vgl. auch L. Ballauf: über die mathematischen Definitionen und Axiome. Programm Varel 1879).

*) Vgl. Encyclopédie. Art. Exhaustion. Wenn Hankel (a.a. O. p. 126) bemerkt: „Von einer Exhaustionsmethode zu sprechen ist sonach insoferne kaum zulässig, als die Alten niemals ihr Verfahren der Quadratur und Kubatur unter einem allgemeineren Gesichtspunkte ... dargestellt u. s. w.“; so hat er allerdings Recht. Aber man sollte auch nicht unterlassen hervorzuheben, dass aus dem im Texte angeführten Satze und der Theorie der Verhältnisse in Euclid's V. B., welche den Alten den Gebrauch irrationaler Zahlen erspart, ihr geometrisches System consequent und methodisch sich entwickeln lässt. Man wird ferner zugeben, dass auf diesem Standpunkte die Darstellung im Wesentlichen nicht anders ausfallen konnte, abgerechnet den Beweis des in Nr. 7 erwähnten Satzes.

E, ganz innerhalb A gelegen, und lege soviele (p) Quadrate E nebeneinander, bis B vollständig bedeckt ist. Dann ist $pA > B$.

6. Geht man das 5. Buch von Euclid's Elementen durch, so wird man finden, dass gesagt wird, ein Verhältniss haben irgend zwei Grössen eines Systemes von Grössen, welche sich untereinander vergleichen, wie die absoluten Zahlen addiren, subtrahiren, theilen lassen und dem Axiome des Archimedes genügen (vgl. Elem. V. def. 4, prop. 8). Dabei müssen also auch die Summe und Differenz zweier Grössen, sowie jeder als möglich geltende aliquote Theil einer solchen wieder Grössen des Systems bilden. Zufolge der Annahmen, welche nach Nr. 5 die Griechen über die geometrischen Grössen gemacht haben, sind sie sonach berechtigt, von dem Verhältnisse je zweier gleichartiger unter denselben zu sprechen. Wenn man aber diese Voraussetzungen nicht machen will, so ist schon der Nachweis nicht mehr möglich, dass zwei Kreisflächen K, K' ein Verhältniss haben. Denn im Systeme der Kreisflächen lässt sich zwar die Vergleichung unmittelbar herstellen; aber es geht nicht an, die Fläche $K + K'$, welche durch Aneinanderlegen beider Kreise entsteht, *auf geometrischem Wege* in einen Kreis zu verwandeln oder auch nur mit einem beliebigen Kreise zu vergleichen*)

Es ist ein Verdienst R. Simson's, des trefflichen Kenners der alten Geometrie, die Darstellung Euclid's im 5. Buche mit vollem Verständnisse gewürdigt zu haben. Mit ihm stimmt Hankel überein.**) Für Euclid hat die Frage, was das Verhältniss zweier Grössen sei, keinen Sinn, er setzt nur fest, unter welcher Bedingung der Ausdruck: „A steht in *demselben* Verhältniss zu B, wie C zu D“ gebraucht werden soll. Daher giebt es für ihn auch nicht *ἰσότης τῶν λόγων* (Gleichheit), sondern *ταυτότης* (Dieselbigkeit). Dadurch treten „Grössen“ und „Verhältnisse“ in einen für die alte Geometrie charakteristischen Gegensatz, der ihre Darstellung ziemlich schwerfällig gemacht hat.

Wenn wir aber den in Nr. 1 aufgestellten Grössenbegriff gebrauchen, so können wir auch die „Verhältnisse“ als Grössen auffassen. Zunächst ist uns die Nebeneinanderstellung zweier gleichartiger geometrischen Grössen A, B mit Beachtung ihrer Aufeinanderfolge ein Gedankenobject, das wir ihre Beziehung nennen mögen. Dann stellen wir durch Definitionen, die an sich willkürlich sind (wenn sie nur den in Nr. 1 erwähnten formalen Bedingungen Genüge leisten), die Vergleichbarkeit der „Verhältnisse“ her und machen sie dadurch zu Grössen.

*) Demnach lassen sich auch die Kreisflächen für sich betrachtet, zufolge der in Nr. 2 aufgestellten Definition nicht unmittelbar als stetiges Grössensystem auffassen.

**) Vgl. R. Simson, The elements of Euclid. etc. 3. Edition 1767 und Hankel, zur Geschichte der Mathematik p. 389.

Bedienen wir uns hierzu der Erklärungen Elem. V. Def. 6, 7; so ergeben sich die Sätze des 5. Buches; hätten wir aber z. B. festgesetzt, es soll $(A : B) >, =, <$ sein als $(C : D)$, falls $A + D >, =, <$ ist als $B + C$, so würden wir zur Theorie der „arithmetischen Verhältnisse" gelangen, welche aber nur dann etwas Neues liefern würde, wenn man bei positiven Differenzen $A - B \, (A > B)$ stehen bleiben wollte.

Voreilig ist es, die „Verhältnisse" nun, nachdem sie zu Grössen gemacht sind, sofort als absolute Zahlen im Sinne der Arithmetik zu erklären — ein Verfahren, dessen sich schon Newton bedient, um diese Zahlen zu definiren (Arithmetica universalis 1732, pag. 4). Indem nach V. Def. 6 die Verhältnisse zweier commensurablen Grössenpaare $A = aE \; B = bE$; $C = cF \; D = dF$ gleich sind, falls die Quotienten $a : b = c : d$, so können diese Verhältnisse der rationalen Zahl $a : b$ zugeordnet oder gleich gesetzt werden. Nun steht es allerdings frei, auch das Verhältniss zweier incommensurabelen Grössen eine Zahl zu nennen; aber aus dem Vorstehenden lässt sich über die Eigenschaften dieser Zahlen nichts entnehmen.

Man hat daher zuerst nachzuweisen, dass die Verhältnisse *alle* Eigenschaften der absoluten Zahlen besitzen, d. i. die vier Species nach den für die ganzen positiven Zahlen geltenden Gesetzen zulassen. Mit Hilfe der von Euclid a. a. O. gegebenen Begriffe und Sätze lässt sich dies wohl leicht machen; aber es darf nicht unterbleiben, wenn man auf dem von Newton benutzten Wege die absoluten Zahlen in die Arithmetik einführen will.

7. Der Beweis, den Euclid zum 2. Satze des XII. B. seiner Elemente beibringt, wurde in neuerer Zeit wieder eingehend besprochen; doch ist hierbei ein Umstand unbeachtet geblieben, der nach dem Zeugnisse des Jesuiten Claudius Richardus der Aufmerksamkeit älterer Erklärer Euclid's nicht entging.*) Der in Rede stehende Satz lässt sich, sowie der 5., 11., 12., 18. Satz desselben Buches, als specieller Fall des folgenden auffassen: „Wenn die wachsenden Grössen $P_1, P_2 \ldots P_n \ldots$ einer Grösse K; die wachsenden Grössen $P_1', P_2' \ldots P_n' \ldots$ einer Grösse K' beliebig nahe kommen und dabei die Verhältnisse $P_1 : P_1'$, $P_2 : P_2' \ldots P_n : P_n' \ldots$ demselben Verhältnisse $A : A'$ gleich sind, so ist auch $K : K' = A : A'$." Nach der Methode der Alten wird der Satz indirect bewiesen. Wären die Verhältnisse $K : K'$ und $A : A'$ nicht einander gleich, so müsste es eine mit K, K' gleichartige Grösse X geben, so dass $K : X = A : A'$. Und nun wird gezeigt,

*) Vgl. Duhamel l. c. II. pag. 384, Hankel l. c. pag. 123 und Euclidis elementorum geometricorum libros XIII . . . illustravit . . . Cl. R. Antverpiae 1645 pag. 143.

dass X weder grösser noch kleiner als K' sein kann.*) — Die Existenz der Grösse X kann aber wenigstens im Allgemeinen, nicht dargethan werden; *man steht also vor einem neuen Axiom.***) Die Geometrie der Alten hätte sich dasselbe allerdings ersparen können; denn es lässt sich unmittelbar zeigen, dass das Verhältniss $K : K'$ weder grösser noch kleiner sein kann als das Verhältniss $A : A'$.***)

8. Wirft man die Frage auf, was die Gleichheit zweier Raumgebilde für die Anschauung zu bedeuten habe, so wird man in den Meisterwerken der griechischen Geometrie vergebens nach einer Antwort suchen. Nach Euclid. XII. prop. 5 — 7 sind Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe einander gleich. Da nun solche Pyramiden bis auf den heutigen Tag nicht in gleiche und ähnliche Theile zerlegt werden konnten, so bleibt keine andere Antwort auf obige Frage übrig, als dass ihnen gleiche Zahlen zugeordnet werden können. Bei den Griechen, denen nur die rationalen Zahlen bekannt sind, wird man sie natürlich nicht finden. Der Uebergang von der rein dialectischen Darstellung der Griechen zu unserer möglichst geometrischen Auffassung, im Alterthume selbst in der geometrischen Praxis bereits durchgeführt (man denke an die Sehnentafeln des Ptolemäus) hat sich gleichwohl sehr langsam vollzogen. Es dürfte wohl erst Legendre gewesen sein, der ihn abgeschlossen hat, indem er im III. Buche seiner Elemente der Geometrie den Satz aufstellte, dass die geometrischen Grössen sich durch Zahlen ausdrücken lassen.†)

---

*) Hierzu kann auch der in Nr. 5 erwähnte Satz dienen.

**) Dass in einem stetigen Grössensysteme zu K eine Grösse X gehört, ist durch die Methode der Schnitte nachweisbar.

***) Bezeichnet D eine beliebige Grösse, so gehört nach Voraussetzung dazu eine Zahl m, so dass für $n > m$

$$\text{(a)} \qquad P_n < K < P_n + D, \qquad P'_n < K' < P'_n + D$$

Würde angenommen $(K : K') > (A : A')$; so müsste (Euclid. V, Def. 7) mindestens ein Paar ganzer Zahlen p, p' existiren, so dass zugleich $pK > p'K'$, $pA \leqq p'A$, woraus wegen $P_n : P'_n = A : A'$ folgen würde $pP_n \leqq p'P'_n$ (V. Def. 5), wo $n = 1, 2, \ldots$ sein kann. Zufolge (a) hat man nun für $n > m$

$$pK < p'P'_n + pD < p'K' + pD \quad \text{d. i.} \quad pK - p'K' < pD.$$

Und da pD ebenfalls eine beliebig kleine Grösse darstellt, so kann unmöglich $pK > p'K'$ sein. Somit kann $(K : K')$ nicht grösser als $(A : A')$ sein; ebensowenig $(K' : K) > (A' : A)$ d. i. $(K : K') < (A : A')$; folglich ist $K : K' = A : A'$. — Dieser aus der Theorie der Verhältnisse nach Eudoxus abgeleitete Beweis des in Rede stehenden Satzes scheint Hankel entgangen zu sein (Vgl. l. c. p. 124 Note). Man kann sich übrigens oben auf die Annahme $pA < p'A'$ beschränken.

†) Ich kann mich der Ansicht von Hankel (Theorie d. complexen Zahlensysteme p. 66) nicht anschliessen, der Legendre's Vorgang ein ὕστερον πρότερον nennt; sondern glaube vielmehr, dass derselbe, indem er *den endgültigen Bruch*

Auch Bolzano legte denselben seinen geometrischen Arbeiten zu Grunde. Der genannte Satz braucht nicht als ein Axiom betrachtet zu werden; er lässt sich erweisen zunächst für die Strecken der geraden Linie, nachdem die unbeschränkte Theilbarkeit derselben gezeigt (in der Nicht-euclid'schen Geometrie vorausgesetzt) und das Axiom des Archimedes für sie angenommen ist. Ein Axiom aber ist es, wie Herr G. Cantor zuerst ausgesprochen hat*), dass umgekehrt auch zu jeder in der Arithmetik definirten reellen Zahl eine Strecke gehört. Damit gleichbedeutend erscheint die Annahme, dass die Strecken ein *stetiges Grössensystem im Sinne von* Nr. 2 bilden (womit dann aber auch die gerade erwähnten Annahmen entfallen). Denn liegt eine arithmetische Theorie der irrationalen Zahlen vor, wie wir solche den Bemühungen der Herren G. Cantor, Dedekind, Heine, Weierstrass verdanken, so kann auch der zuletzt erwähnte Satz durch einen Beweis erhärtet werden. — Es wäre jedoch voreilig, für die Bögen einer krummen Linie ohne Beweis auch nur den Legendre'schen Satz zuzulassen.

Ich benutze die hier gebotene Gelegenheit, um meinem Aufsatze über Bolzano im XVIII. Bande der Mathematischen Annalen p. 255ff. folgende Berichtigungen zuzufügen:

1. Man kann nicht behaupten, wie es a. a. O. pag. 256 heisst, dass Cauchy die gleichmässige Convergenz der Functionen zweier Veränderlichen zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerthen, dass eine der Veränderlichen sich einem und demselben Grenzwerthe nähert, völlig unbekannt geblieben sei. Vielmehr stimmt dasjenige, was er zur Richtigstellung seines Satzes über die Stetigkeit der Reihensummen**) dreissig Jahre später vorbrachte,***) mit der durch den soeben erwähnten Begriff bewirkten Beschränkung dieses Satzes überein. Die Hinfälligkeit desselben hat bekanntlich zuerst Abel durch das Verhalten der Function $\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots$ in der Umgebung der Werthe $x = (2m + 1)\pi$ dargethan.†) Abel gelangte jedoch nicht mehr zur vollständigen Einsicht über die Bedingung, unter welcher auf die

mit der Geometrie der Alten bedeutet, einen wesentlichen Fortschritt der Geometrie darstellt. Die französischen Geometer, wie die Herrn Rouché und Comberousse, thun daher wohl daran, diese Errungenschaft ihres grossen Landsmannes festzuhalten.

*) Vgl. diese Annalen Bd. V. p. 128.

**) Vgl. Cauchy Cours d'Analyse (1821) pag. 131.

***) Vgl. Comptes rendus T. 36 (1853) pag. 455.

†) Vgl. Abel, Oeuvres complètes par Sylow et Lie. I, pag. 224.

Stetigkeit einer Function, die als die Summe einer convergenten unendlichen Reihe $\Sigma f_n(x)$ gegeben ist, geschlossen werden kann. Er erledigte zwar den Fall der Potenzreihen,*) seine Ansicht über die Reihe $\Sigma \delta^n f_n(x)$**) erscheint aber heute nicht mehr sicher begründet.

2. Zu II. a. a. O. pag. 257. Bolzano's Definition eines Continuums, worüber er ausführlicher Pr. § 38 sich verbreitet, entspricht nicht einmal einer in einem gegebenen Intervalle allenthalben überalldichten Punktvertheilung. Denn nach derselben bilden z. B. alle *rationalen* Zahlen ξ, genügend einer der beiden Bedingungen $1 \leqq \xi < \sqrt{2}$, $\sqrt{3} < \xi \leqq 2$, ein Continuum.***)

3. Ich war früher der Ansicht, dass die Stetigkeit eines Grössensystemes†) die Annahme voraussetze, dass sich die Grössen in eine fortlaufende Reihe ordnen lassen. Eben dieselbe Forderung schien mir (ausser der selbstverständlichen, dass die Theorie der irrationalen Zahlen begründet sei) dem Bolzano'schen Beweise *des Satzes von der oberen Grenze einer Veränderlichen* zu Grunde zu liegen, wie ich a. a. O. pag. 258 2. Note anmerkte. Diese Ansicht habe ich nun aufgegeben und ziehe daher die Aeusserung a. a. O.: „Es liegt ihm .... werden könne" zurück. Heute halte ich dafür, dass der erwähnte Beweis nichts weiter voraussetze, als dass die Veränderliche, d. h. alle ihre unendlich vielen Werthe definirt seien.††)

Innsbruck, den 10. März und 1. October 1883.

---

*) Vgl. Oeuvres complètes I, pag. 223. Theorème IV, und A. Pringsheim diese Annalen Bd. XXI, pag. 376, dessen Kritik einer älteren, gegentheiligen Aeusserung von mir ich als zutreffend anerkennen muss.

**) Vgl. l. c. Theorème V und die Note der Herren Herausgeber über diesen Satz T. II, pag. 303.

***) Die Mängel der in Rede stehenden Definition hat bereits Herr G. Cantor hervorgehoben (diese Annalen Bd. XXI, pag. 576).

†) Vgl. diese Annalen Bd. XXII, pag. 508.

††) Zugleich berichtige ich folgende Druckfehler in meiner Arbeit: p. 273, Z. 5, l. a' statt b, p. 278, Z. 12, l. $<$ statt $>$.

Ueber conjugirte binäre Formen und deren geometrische Construction.*)

Von

Otto Schlesinger in Breslau.

Einleitung.

Nach einer von Herrn Prof. Rosanes eingeführten Bezeichnung**) nennt man zwei binäre Formen des $n$ten Grades:

$$a_x^n \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n \equiv a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

$$\alpha_x^n \equiv (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n \equiv \alpha_0 x_1^n + \binom{n}{1} \alpha_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + \alpha_n x_2^n$$

) Die vorliegende Untersuchung ist im Jahre 1881 in Folge einer freundlichen Anregung von Seiten meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. Rosanes, begonnen worden, dem ich auch für mannigfachen Rath bei Fortführung derselben zu lebhaftem Danke verpflichtet bin. Im Februar 1882 war ich in der Lage, Herrn Prof. Rosanes von dem wesentlichen Inhalt der hier wiedergegebenen Arbeit Mittheilung zu machen. Nachdem ich sie alsdann Mai 1882 zum Zweck meiner Promotion der philosophischen Făcultät der Universität Breslau überreicht und im October desselben Jahres als Dissertation hatte drucken lassen, war es zunächst meine Absicht, die erlangten Resultate noch eingehender zu verfolgen und später in erweiterter Fassung einem grösseren Leserkreise zuzuführen. Inzwischen hat Herr W. F. Meyer in Tübingen ein Buch „Ueber Apolarität und rationale Curven" (März 1883) herausgegeben, welches neben Anderem einige Sätze darbietet, die auch in einem Theil meiner Arbeit (nämlich den §§ 1, 2 und 8) enthalten sind). Diese Publication lässt es mir wünschenswerth erscheinen, einerseits auf den abweichenden Gesichtspunkt hinzuweisen, der mich auf die von Herrn Meyer entwickelten Sätze geführt hat, andrerseits die übrigen Resultate meiner Abhandlung zu veröffentlichen, welche zur Lösung eines constructiven Problems hinführen und überdies jene ersterwähnten Sätze in neuem Lichte erscheinen lassen.

**) „Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen." Crelle's Journal. Bd. 76.

---

*) Auf Wunsch von Herrn Meyer füge ich die Bemerkung bei, dass Herr Meyer bei Publication seiner Untersuchungen von der Dissertation des Herrn Schlesinger selbstverständlicherweise keine Kenntniss gehabt hat. Man vergleiche übrigens auch Herrn Meyer's Noten in Bd. XXI dieser Annalen. F. Klein.

„zu einander conjugirt“, sobald die in den Coefficienten beider Formen lineare Invariante:

$$(a\alpha)^n = a_0\alpha_n - \binom{n}{1} a_1\alpha_{n-1} \pm \cdots + (-1)^n a_n\alpha_0$$

den Werth Null hat. Vermöge dieser Beziehung gehören zu jeder binären Form $n$ten Grades unendlich viele conjugirte Formen, welche alle derselben n-gliedrigen linearen Gruppe angehören, wenn allgemein unter einer p-gliedrigen Gruppe die Gesammtheit der Formen verstanden wird, welche sich aus gewissen p Formen linear zusammensetzen lassen. In gleicher Weise bilden die Formen, welche gleichzeitig zu q gegebenen binären Formen conjugirt sind, eine $(n + 1 - q)$-gliedrige lineare Gruppe; da indessen jedes Element der Letzteren zu jeder Form conjugirt ist, welche aus den q gegebenen linear zusammengesetzt werden kann, so erkennt man, „dass jeder q-gliedrigen Gruppe von Formen $n$ten Grades eine $(n + 1 - q)$-gliedrige als deren ‚conjugirte‘ derart gegenübersteht, dass jede Form der einen zu jeder Form der andern conjugirt ist“. Durch diese Gegenüberstellung ist zugleich ein Mittel gegeben, jede lineare Identität zwischen binären Formen durch die Beziehung des Conjugirtseins zu interpretiren und umgekehrt die letztere auf die Existenz gewisser linearer Identitäten zurückzuführen, da die Thatsache, dass eine Form $n$ten Grades einer p-gliedrigen Gruppe angehört, zusammenfällt damit, dass sie zu einer bestimmten $(n + 1 - p)$-gliedrigen conjugirt ist.

An diese algebraischen Definitionen knüpfen sich, sobald man irgend eine geometrische Repräsentation der binären Formen (z. B. als Punktgruppen einer unicursalen Curve) ins Auge fasst, 2 Reihen von Aufgaben, nämlich

1) Die Aufgabe, zu einer oder mehreren gegebenen Formen die conjugirten zu construiren;
2) die Aufgabe, alle Elemente einer q-gliedrigen Gruppe zu construiren, welche durch q ihrer Formen gegeben ist.

Während die Lösung dieser Aufgaben für Formen 2ten Grades, d. h. die constructive Herstellung harmonischer und involutorischer Punktepaare seit langer Zeit bekannt ist, haben von den übrigen darin geforderten Constructionen bisher nur wenige eine Erledigung gefunden. Für Formen 3ten Grades, auf einer cubischen Raumcurve als Träger, sind die Aufgaben (1) und (2) von Herrn Sturm*) gelöst worden; anderseits hat Herr Serret**) indem er sich der Darstellung auf einem Kegelschnitt bediente, die Lösung der Aufgabe gegeben, alle Formen zu construiren, welche sich aus 4 gegebenen Formen des vierten Grades linear zusammensetzen lassen.

*) Crelle's Journal. Bd. 86.

**) Comptes rendus 87, 2.

Im Nachfolgenden soll versucht werden, diejenigen der Aufgaben (1) zu behandeln, welche bei der Repräsentation der Formen auf einem Kegelschnitte einerseits, auf einer Raumcurve dritter Ordnung anderseits, eine lineare Lösung zulassen; ich werde mich also insbesondere mit der folgenden Aufgabe beschäftigen: „Wenn auf einer ebenen Curve 2ter Ordnung (resp. einer Raumcurve dritter Ordnung) als Träger eine Form $p$ten Grades durch die sie repräsentirenden p Punkte gegeben ist, so sollen alle zu ihr conjugirten Formen construirt werden."

Da indessen alle diese conjugirten Formen eine p-gliedrige Gruppe bilden, so wird die Ausführung der letztgenannten Constructionen zugleich einen Einblick in den Zusammenhang gewähren, der zwischen irgend $(p+1)$ Formen einer p-gliedrigen Gruppe besteht, und obwohl dieser Einblick nicht ausreicht, um die entsprechenden Aufgaben (2) allgemein zu erledigen, so wird er doch erkennen lassen, in welcher Richtung die Lösung derselben zu suchen ist.

Bevor ich an den Gegenstand meiner Untersuchung herantrete, will ich eine Reihe von Sätzen und Definitionen zusammenstellen, deren ich mich weiterhin bedienen werde.

I. Wenn 2 binäre Formen $n$ten Grades zu einander conjugirt sind, so lässt sich die eine derselben aus den $n$ten Potenzen der Linearfactoren der andern linear zusammensetzen.*)

II. Eine Form ungeraden Grades ist zu sich selbst conjugirt. — Jeder Linearfactor einer Form $n$ten Grades f stellt zur $n$ten Potenz erhoben, eine zu f conjugirte Form dar.**)

III. Liegt eine binäre Form $n$ten Grades $a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$ und eine ebensolche $p$ten Grades α_x^p vor, und ist $p < n$, so versteht man unter der Polare von α_x^p in Bezug auf a_x^n die binäre Form derjenigen Punkte, deren $(n-p)$te Polare in Bezug auf die Form $n$ten Grades zu der Form $p$ten Grades conjugirt ist. Diese Polare wird durch $(a\alpha)^p a_x^{n-p}$ dargestellt.***)

IV. Zwei binäre Formen ungleichen Grades nennt man „zu einander apolar", wenn die Form des höheren Grades zu jeder Form conjugirt ist, welche die des niederen Grades als Factor enthält.†) Sollen demnach a_x^n und α_x^p (für $n > p$) zu einander apolar sein, so

---

*) Rosanes. l. c.

**) Rosanes. l. c.

***) Reye, Crelle's Journal, Bd. 78.

†) Reye, Crelle's Journal, Bd. 78.

muss $(a\alpha)^p a_x^{n-p}$ für jedes x verschwinden; mit Beziehung auf III. ergiebt sich demnach der Satz:

V. Zwei binäre Formen sind dann und nur dann apolar, wenn die Polare der Form des niederen ($p$ten) in Bezug auf die Form des höheren ($n$ten) Grades identisch verschwindet, oder, was dasselbe sagt, wenn die $(n-p)$te Polare jedes Punktes in Bezug auf die Form des $n$ten Grades zu der Form $p$ten Grades conjugirt ist.

Da ferner, wenn wir a_x^n als fest gegeben ansehen, die Identität $(a\alpha)^p a_x^{n-p} \equiv 0$ mit $(n-p+1)$ Bedingungsgleichungen für die $(p+1)$ Coefficienten von α_x^p äquivalent ist, so folgt:

VI. Alle Formen $p$ten Grades, welche zu einer Form $n$ten Grades (für $n > p$) apolar sind, bilden eine $[(p+1)-(n-p+1)] = [2p-n]$-gliedrige Gruppe. Ebenso bilden alle Formen $p$ten Grades, welche zu q Formen $n$ten Grades gleichzeitig apolar sind, eine $[(p+1) - q(n-p+1)]$-gliedrige Gruppe.

VII. Der Kürze halber soll weiterhin eine p-gliedrige Gruppe von binären Formen des $n$ten Grades als eine G_p^n von Formen bezeichnet werden. Wenn nunmehr eine bestimmte G_p^n und irgend eine Form $i$ten Grades c_x^i gegeben ist (wobei $i < n$ sein soll), so kann man nach denjenigen Formen $(n-i)$ten Grades fragen, welche mit c_x^i multiplicirt ein Element der G_p^n liefern. Man sieht sofort, dass alle solche Formen eine bestimmte G_{p-i}^{n-i} bilden, von der wir sagen wollen, dass sie in der G_p^n „enthalten" sei, und dass sie innerhalb der G_p^n der Form c_k^i oder auch den i Punkten dieser Form zugehört.

VIII. Der Beziehung, dass 2 binäre Formen zu einander conjugirt sind, entspricht im ternären (resp. quaternären) Gebiet einer Relation zwischen einer Ordnungs- und einer Classencurve (resp. Fläche). Man nennt die Curven (Flächen) $a_x^n = 0$, $u_\alpha^n = 0$ „zu einander conjugirt", sobald die Invariante a_α^n verschwindet. Irgend einer p-gliedrigen Gruppe von Curven $n$ter Ordnung (resp. Classe) steht eine

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - p\right]\text{-}$$

gliedrige Gruppe von Curven $n$ter Classe (oder Ordnung) als „conjugirt" gegenüber, derart, dass jede Curve der einen zu jeder Curve der andern Gruppe conjugirt ist.*)

In demselben Sinne besitzt jede p-gliedrige Gruppe von Flächen $n$ter Ordnung (resp. Classe) eine

*) Rosanes l. c. — Für $n = 2$ ist der Begriff der conjugirten Curven behandelt worden von Smith, proceedings of the London Math. Society, vol. 2, Darboux, Bulletin des Sciences Mathématiques t. I, sér. 1.

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}-p\right]\text{-}$$

gliedrige Gruppe von conjugirten Flächen $n$ter Classe (resp. Ordnung).

IX. Ist eine Curve (resp. Fläche) $n$ter Classe $u_\alpha^n = 0$ gegeben und ist ein System von n Geraden (resp. Ebenen), als Curve (Fläche) $n$ter Ordnung aufgefasst, zu $u_\alpha^n = 0$ conjugirt, so bezeichnet man diese n Geraden (resp. Ebenen) als ein „conjugirtes n-Seit (resp. n-Flach)" der Curve, resp. Fläche*). Die gemischte Polare von irgend $(n-1)$ Geraden (Ebenen) eines solchen n-Seits (n-Flachs) in Bezug auf $u_\alpha^n = 0$ ist ein Punkt, der auf der $n$ten Geraden (resp. Ebene) gelegen ist.

X. Hat man eine Curve (Fläche) $n$ter Classe $u_\alpha^n = 0$ und eine Curve (Fläche) $p$ter Ordnung $a_x^p = 0$, so versteht man, falls $p < n$ ist, unter der Polare von $a_x^p = 0$ in Bezug auf $u_\alpha^n = 0$ die Curve (resp. Fläche) $(n-p)$ter Classe $a_\alpha^p u_\alpha^{n-p} = 0$, d. h. den Ort der Geraden (Ebenen), deren $(n-p)$te Polare in Bezug auf $a_\alpha^n = 0$ zu $a_x^p = 0$ conjugirt ist.**) Ist $p > n$, so ist analog $a_\alpha^p a_x^{p-n} = 0$ die Polare von $u_\alpha^n = 0$ in Bezug auf $a_x^p = 0$.

XI. Man nennt eine Ordnungs- und eine Classencurve von ungleicher Ordnungs- resp. Classenzahl „zu einander apolar", wenn die Curve der höheren Zahl zu allen Curven conjugirt ist, welche die Curve der niederen Zahl als Theil enthalten.***) Sollen demnach $a_x^p = 0$ und $u_\alpha^n = 0$ für $n > p$ zu einander apolar sein, so muss die Gleichung $a_\alpha^p u_\alpha^{n-p} = 0$ identisch in u erfüllt werden, d. h.

XII. Damit eine Curve $p$ter Ordnung C^p zu einer Curve $n$ter Classe K^n für $n > p$ apolar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Polare von C^p in Bezug auf K^n identisch verschwinde.

Was den Inhalt der folgenden Abschnitte anbetrifft, so bemerke ich, dass die §§ 1—6 die conjugirten binären Formen unter der Voraussetzung betrachten, dass ein Kegelschnitt als Träger derselben gewählt sei. Die Sätze, welche für diesen Fall die Lösung der oben fixirten Aufgaben ermöglichen, gestatten eine sehr ausgedehnte Erweiterung und führen so auf eine Reihe von curventheoretischen Sätzen, welche ich in § 7 zusammengestellt und bewiesen habe. Der übrige Theil ist der Betrachtung der binären Formen auf der Raumcurve dritter Ordnung gewidmet.

---

*) Rosanes l. c.
**) Reye l. c.
***) Reye l. c.

§ 1.

Die apolaren Curven eines Kegelschnitts als „beigeordnete Curven" der binären Formen geraden Grades auf demselben.

Ich gehe nunmehr dazu über, die binären Formen auf einem Kegelschnitt zu betrachten: Bekanntlich kann jede nicht zerfallende Curve 2ter Ordnung durch geeignete Wahl des Coordinatensystems in der Gleichungsform $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$ dargestellt werden, und ich werde daher für das Folgende den Kegelschnitt dieser Gleichungsform als Grundkegelschnitt S wählen. Zu jedem Punkte $x(x_1\, x_2\, x_3)$ von S gehört alsdann ein Parameterpaar $\varkappa_1\, \varkappa_2$ derart, dass die Relation:

(1) $$x_1 : x_2 : x_3 = \varkappa_1^2 : \varkappa_1\, \varkappa_2 : \varkappa_2^2$$

besteht. Der Punkt x soll daher auch als Punkt $\varkappa$ bezeichnet werden.

Trifft eine Gerade $u\,(u_1\, u_2\, u_3)$ den Kegelschnitt in den Punkten $\lambda\, \mu$, so sind $(\lambda_1\, \lambda_2)$ und $(\mu_1\, \mu_2)$ Wurzelpaare der Gleichung:

$$u_1 \varkappa_1^2 + u_2 \varkappa_1 \varkappa_2 + u_3 \varkappa_2^2 = 0$$

und mithin sind die Grössen $u_1\, u_2\, u_3$ den elementar-symmetrischen Functionen von $\lambda\, \mu$ proportional, welche wir der Reihe nach mit $(\lambda\mu)_1$, $(\lambda\mu)_2$, $(\lambda\mu)_3$ bezeichnen, so dass wir schreiben können:

(2) $$u_1 : u_2 : u_3 = \lambda_2 \mu_2 : -(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) : \lambda_1 \mu_1$$
$$= (\lambda\mu)_1 : (\lambda\mu)_2 : (\lambda\mu)_3.$$

Daraus folgt, dass jede symmetrische homogene Function von $\lambda\, \mu$ vermöge (2) in eine homogene Function von u übergeführt werden kann, d. h. jede solche Function $f(\lambda\mu) = f(\mu\lambda)$ kann als linke Seite der Gleichung einer bestimmten Classencurve angesehen werden. $f(\lambda\mu) = 0$ stellt alsdann die Bedingung dar, welche zwischen zwei Punkten von S erfüllt sein muss, damit ihre Verbindungslinie die betreffende Curve tangirt. Diese Art, die Gleichung einer Classencurve darzustellen, soll auf eine besondere Gattung von Curven Anwendung finden:

Nach XI. der Einleitung ist nämlich eine Curve $n$ter Classe K^n zu der Curve 2ter Ordnung S apolar, sobald alle Curven $n$ter Ordnung, welche S als Theil enthalten, zu K^n conjugirt sind. Ich will im Folgenden die Classencurven dieser Eigenschaft näher untersuchen.

Wenn $c_x^n = 0$ eine Curve $n$ter Ordnung sein soll, welche S als Theil enthält, so ist nach (1) nothwendig und hinreichend, dass:

(3) $$(c_1 \varkappa_1^2 + c_2 \varkappa_1 \varkappa_2 + c_3 \varkappa_2^2)^n = 0$$

sei für jedes $\varkappa_1\, \varkappa_2$. Aus dieser Identität (3) können andere durch Differentiation nach $\varkappa$ resp. durch Polarenbildung abgeleitet werden. Eine solche sei durch:

$$(4) \qquad f(c_1\, c_2\, c_3,\, x_1\, x_2) \equiv 0$$

dargestellt, wo f die Symbole c nur zum $n$ten Grade enthält. Setzt man nun auf der linken Seite von (4):

$$(5) \qquad \begin{aligned} c_1 &= \lambda_2\, \mu_2 = (\lambda\, \mu)_1, \\ c_2 &= -(\lambda_1\, \mu_2 + \lambda_2\, \mu_1) = (\lambda\, \mu)_2, \\ c_3 &= \lambda_1\, \mu_1 = (\lambda\, \mu_3) \end{aligned}$$

so stellt das Resultat, gleich Null gesetzt:

$$(6) \qquad f[(\lambda\, \mu)_1\, (\lambda\, \mu)_2\, (\lambda\, \mu)_3\, x] = 0$$

für jeden Werth von x eine Classencurve dar, die in Folge der Gleichung (4) zu jeder die Gleichung (3) erfüllenden Curve $c_x^n = 0$ conjugirt, d. h. zu S apolar ist. Wir erhalten also auch eine zu S apolare Curve, wenn wir die Potenzen und Producte von $x_1\, x_2$ durch irgend welche Grössen, oder, was dasselbe ist, wenn wir $x_1\, x_2$ durch irgend welche Symbole binärer Formen ersetzen.

Die Gleichung (6) lässt sich jedoch noch einfacher herstellen; denn wir hatten sie erhalten, indem wir (3) nach x differentiirten und dann für die c die Substitution (5) anwandten. Da jedoch die Symbole c durch die Differentiation nicht berührt werden, so kann man umgekehrt zuerst die Substitution (5) und dann die Differentiation ausführen. Durch Einführung von (5) geht aber die linke Seite von (3) über in:

$$(x\, \lambda)^n\, (x\, \mu)^n$$

und wir erhalten demnach den für das Folgende fundamentalen *Satz:*

1. *Wenn man aus* $(k\, \lambda)^n\, (x\, \mu)^n = \varphi\, (x\, \lambda\, \mu)$ *durch Differentiation nach* x *irgend eine Form* $f\, (x\, \lambda\, \mu)$ *abgeleitet hat, so stellt* $f\, (x\, \lambda\, \mu) = 0$ (*sobald* $u_i = (\lambda\, \mu)_i$ *gesetzt wird*) *für jeden wirklichen oder symbolischen Werth von* x *eine zu* S *apolare Curve dar.*

Eine derartige Curve wird demnach insbesondere erhalten, wenn man in $\varphi\, (x\, \lambda\, \mu)$ selbst die x durch irgend welche Symbole ersetzt. Hat man also eine binäre Form $2n$ten Grades a_x^{2n} und führt man

$$x_1 = a_2, \quad x_2 = -a_1$$

in $(x\, \lambda)^n$, $(x\, \mu)^n$ ein, so ergiebt sich:

$$(7) \qquad a_\lambda^n\, a_\mu^n = 0$$

als Gleichung einer zu S apolaren Curve $n$ter Classe. Indem man $\lambda = \mu = x$ setzt, erhält man aus (7) eine Gleichung für diejenigen Punkte x des Kegelschnitts, deren Tangenten die Curve (7) berühren und man erkennt so, dass diese Curve die $2n$ Tangenten in den Punkten der binären Form a_x^{2n} berührt.

Nun ist aber sofort ersichtlich, dass eine Curve $n$ter Classe $u_\alpha^n = 0$, welche zu $S\, (s_x^2 = 0)$ apolar sein soll, durch $2n$ weitere Bedingungen

festgelegt ist; denn die Forderung der Apolarität besteht darin, dass die Gleichung:

$$s_\alpha^2\, u_\alpha^{n-2} = 0 \tag{8}$$

in Bezug auf u identisch stattfinde, und diese Forderung ist daher äquivalent mit

$$\frac{(n-2+1)(n-2+2)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

linearen Bedingungsgleichungen. Diese, zusammen mit den $2n$ weiteren, geben aber in der That $\frac{n(n+3)}{2}$ Bedingungen, d. h. so viele als zur Bestimmung einer Curve $n$ter Classe erforderlich sind.

Wenn wir insbesondere die Forderung stellen, dass eine Curve $n$ter Classe zu S apolar sein und die Tangenten $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}$ in den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ der binären Form a_x^{2n} berühren soll (wobei ein i-facher Punkt der Form durch i unendlich benachbarte Punkte ersetzt werden kann), so haben wir $\frac{n(n+3)}{2}$ lineare Bedingungen, welche niemals abhängig sein können, wie immer auch a_x^{2n} beschaffen sein mag. Denn wären sie abhängig, so müsste jede apolare Curve $n$ter Classe, die $t_1, t_2, \ldots, t_{2n-1}$ berührt, auch t_{2n} zur Tangente haben. Ist aber b_k^{2n} die binäre Form der $2n$ Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1} x$, wo x ein beliebiger von x_{2n} verschiedener Punkt ist, so stellt $b_\lambda^n b_\mu^n = 0$ eine Curve jener Art dar, die aber t_{2n} nicht berührt. Wir sehen also*):

> dass es stets eine und nur eine Curve $n$ter Classe giebt, welche zu einem Kegelschnitt S apolar ist und $2n$ beliebig gegebene Tangenten desselben berührt. Ist a_x^{2n} die binäre Form der $2n$ Berührungspunkte, so bezeichne ich jene Curve als „beigeordnete" Curve der Form a_x^{2n},

oder mit anderen Worten:

Ist eine Curve $n$ter Classe zu S apolar und ist a_x^{2n} die binäre Form der $2n$ Punkte von S, deren Tangenten sie berühren, so ist ihre Gleichung $a_\lambda^n a_\mu^n = 0$ (für $(\lambda\mu)_i = u_i$).

Es liegt hier nahe, sich nach einem Kriterium umzusehen, welches an einer symmetrischen Form $f(\lambda\mu)$ direct erkennen liesse, ob $f(\lambda\mu) = 0$ zu S apolar ist. Ich will ein solches ableiten, obwohl ich späterhin nur vorübergehend Gebrauch davon machen werde; man wird auf dasselbe geführt, sobald man versucht, die bekannte Reihenentwicklung für Functionen mit 2 Reihen von binären Veränderlichen

*) Dieser Satz ist bereits von Herrn Lindemann ausgesprochen worden. Cfr. Bulletin de la Soc. Math. de France, V.

auf $a_\lambda^n\, a_\mu^n$ anzuwenden. Indem man nämlich die dabei zu benutzenden Operationen*):

$$Df = \frac{1}{n}\left\{\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2}\mu_2\right\},$$

$$\Delta Df = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{\partial Df}{\partial \mu_1}\lambda_1 + \frac{\partial Df}{\partial \mu_2}\lambda_2\right\},$$

$$\Omega f = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1 \partial \mu_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2 \partial \mu_1}\right\}$$

an $f = a_\lambda^n a_\mu^n$ ausführt, so bemerkt man, dass

$$f = \Delta Df \tag{9}$$

ist und mithin wegen der Relation

$$f = \Delta Df + \frac{n}{n+1}(\lambda\mu)\,\Omega f$$

auch:

$$\Omega f = 0 \tag{10}$$

ist für jedes λ und μ. Wir sehen also,

dass für die linke Seite $f(\lambda\mu)$ jeder zu S apolaren Curve die gleichbedeutenden Relationen (9) und (10) gelten.

Es besteht aber auch die Umkehrung:

Ist $\Delta Df = f$, so ist $f(\lambda\mu) = 0$ eine zu S apolare Curve

denn setzen wir

$$f(\lambda\mu) = u_\alpha^n = \left(\sum_1^3 \alpha_i\,(\lambda\mu)_i\right)^n$$

so ist:

$$Df = [\Sigma\alpha_i(\lambda\mu)_i]^{n-1}\,[\Sigma\alpha_i(\mu\mu)_i],$$

$$(n+1)\,\Delta Df = (n-1)\,[\Sigma\alpha_i(\lambda\mu)_i]^{n-2}\,[\Sigma\alpha_i(\lambda\lambda)_i]\,[\Sigma\alpha_i(\mu\mu)_i] + 2\,[\Sigma\alpha_i(\lambda\mu)_i]^n.$$

Also, weil $\Delta Df = f$ und $[\Sigma\alpha_i(\lambda\mu)_i]^n = f$ ist, so gilt:

$$f = [\Sigma\alpha_i(\lambda\mu)_i]^{n-2}\,[\Sigma\alpha_i(\lambda\lambda)_i]\,[\Sigma\alpha_i(\mu\mu)_i] \tag{11}$$

als eine in λ und μ identische Gleichung: Wenn nun t irgend eine Tangente von $f = u_\alpha^n = 0$ ist, welche S in den Punkten $\lambda\mu$ schneidet, und welche demnach die Coordinaten $(\lambda\mu)_i$ besitzt, so wird die rechte Seite von (11) durch λ und μ annulirt. Da aber die drei Grössen $(\lambda\lambda)_i = l_i$ die Coordinaten der in λ an S gezogenen Tangente l vorstellen und die Bedeutung von $(\mu\mu)_i = m_i$ analog ist, so folgt, dass das Geradenpaar $l\,m$ zur conischen Polare von t in Bezug auf f (welche K heissen möge) conjugirt ist, oder was dasselbe besagt, dass die durch den Schnittpunkt von l und m an K gezogenen Tangenten

*) Clebsch, Binäre Formen, S. 15.

$t_1 t_2$ ein conjugirtes Geradenpaar von S bilden. Der erwähnte Schnittpunkt ist offenbar Pol von t in Bezug auf S; mithin bilden $t t_1 t_2$ ein Polardreiseit von S. Alle drei Seiten desselben berühren die Curve K, $t_1 t_2$ nämlich nach Construction, und t, weil es Tangente von f ist und als solche von seiner Polarcurve K berührt wird. Die Curve 2ter Classe K ist demnach zu der Curve 2ter Ordnung $S = s_x^2 = 0$ conjugirt; d. h. die Gleichung $t_\alpha^{n-2} s_\alpha^2 = 0$ besteht für jedes t, für welches $t_\alpha^n = 0$ ist, und weil die letztere Gleichung von höherem Grade in t ist, als die erste, so gilt $t_\alpha^{n-2} s_\alpha^2 = 0$ für jedes t überhaupt; oder mit anderen Worten: $f = u_\alpha^n = 0$ ist zu S apolar, wie behauptet wurde.

§ 2.

Eigenschaft der beigeordneten Curven conjugirter (resp. apolarer) binärer Formen geraden Grades. Serret's Construction.

Aus der Identität:

$$a_\lambda^n a_\mu^n = [a_1{}^2 (\lambda\mu)_3 - a_1 a_2 (\lambda\mu)_2 + a_2{}^2 (\lambda\mu)_1]^n$$

folgt, dass die Gleichung der der Form a_x^{2n} „beigeordneten" Curve sich schreiben lässt:

$$0 = u_\alpha^n \equiv [a_1{}^2 u_3 - a_1 a_2 u_2 + a_2{}^2 u_1]^n$$

und dass demnach für $v_i = (\Lambda \mathrm{M})_i$

$$(12) \qquad v_\alpha u_\alpha^{n-1} = a_\Lambda a_M a_\lambda^{n-1} a_\mu^{n-1} = 0$$

die erste Polare der Verbindungslinie von Λ und M in Bezug auf $a_\lambda^n a_\mu^n = 0$ vorstellt. Die Gleichung (12) ist aber nichts anderes als die Gleichung der beigeordneten Curve von $a_\Lambda a_M a_x^{2n-2}$ und es folgt demnach der *Satz:**)

2. *Jeder binären Form 2nten Grades ist eine bestimmte Curve nter Classe beigeordnet. Der gemischten Polaren 2er Punkte in Bezug auf die binäre Form ist in demselben Sinne eine Curve $(n-1)$ter Classe beigeordnet. Diese letztere ist die erste Polare der Verbindungslinie beider Punkte in Bezug auf die erstgenannte Curve.*

Sind nunmehr $x_1 x_2 \cdots x_{2n}$ irgend $2n$ Punkte von S und $(v_1 v_2 \cdots v_n)$ n Geraden, die sämmtliche Punkte enthalten, so ergiebt sich in derselben Weise wie (12) die Gleichung:

$$a_{x_1} a_{x_2} \cdots a_{x_{2n}} = v_{1\alpha} v_{2\alpha} \cdots v_{n\alpha}.$$

Verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, so gilt dasselbe für die linke, mithin folgt:

*) Auch dieser Satz ist von Herrn Lindemann l. c. angeführt worden.

3. *Irgend ein conjugirtes n-Seit der Curve $a^n a^n_\mu = 0$ schneidet den Kegelschnitt in den Punkten einer zu a^{2n}_x conjugirten Form.*

Es seien ferner:

$$a_{1x} = 0, \quad a_{2x} = 0 \cdots a_{2n,x} = 0$$

lineare Formen von der Beschaffenheit, dass $a_{1x} a_{2x} \cdots a_{2n,x}$ zu a^{2n}_x conjugirt ist; dann gilt (cfr. Einleitung I) die Identität in x:

$$a^{2n}_x \equiv \varrho_1 a^{2n}_{1x} + \varrho_2 a^{2n}_{2x} + \cdots + \varrho_{2n} a^{2n}_{2n,x},$$

also ist auch für jedes λ und μ:

$$a^n_\lambda a^n_\mu \equiv \varrho_1 a^n_{1\lambda} a^n_{1\mu} + \varrho_2 a^n_{2\lambda} a^n_{2\mu} + \cdots + \varrho_{2n} a^n_{2n,\lambda} a^n_{2n,\mu}.$$

Nun ist aber [für $u_i = (\lambda\mu)_i$] $a_{i\lambda} a_{i\mu} = 0$ offenbar nichts anderes als die Gleichung des Punktes $a_{ix} = 0$; wenn demnach die Coordinaten dieses Punktes $x_{i1} x_{i2} x_{i3}$ sind, so besteht die in $u_i = (\lambda\mu)_i$ identische Gleichung:

$$a^n_\lambda a^n_\mu \equiv \varrho_1 u^n_{x_1} + \varrho_2 u^n_{x_2} + \cdots + \varrho_{2n} u^n_{x_{2n}}.$$

Daraus folgt:

4. *Haben wir $2n$ Punkte des Kegelschnitts, deren binäre Form zu a^{2n}_x conjugirt ist, so ist jede durch diese Punkte gehende Curve $n$ter Ordnung zu $a^n_\lambda a^n_\mu = 0$ conjugirt.*

Es gilt aber auch die Umkehrung:

5. *Wenn durch $2n$ Punkte von S eine Curve $b^n_x = 0$ gelegt werden kann, die zu $a^n_\lambda a^n_\mu = 0$ conjugirt ist, so hat jede durch diese Punkte gehende Curve $n$ter Ordnung dieselbe Eigenschaft und die binäre Form der $2n$ Punkte ist zu a^{2n}_x conjugirt.*

Denn ist $c^n_x = 0$ eine 2te Curve, welche durch jene $2n$ Punkte geht, so schneiden sich $b^n_x = 0$ und $c^n_x = 0$ ausser in diesen, noch in $n(n-2)$ Punkten, durch welche bekanntlich eine Curve $(n-2)$ter Ordnung m^{n-2}_x hindurch gelegt werden kann, d. h. es ist:

$$c^n_x \equiv \varrho b^n_x + \sigma s_x m^{n-2}_x.$$

Da aber beide rechtsstehende Curven zu $a^n_\lambda a^n_\mu = 0$ conjugirt sind, die erste nach Voraussetzung, die zweite, weil $a^n_\lambda a^n_\mu = 0$ zu $s^2_x = 0$ apolar ist, so ist auch $c^n_x = 0$ zu $a^n_\lambda a^n_\mu = 0$ conjugirt. Demnach stellt ein System von n Geraden, die sämmtliche $2n$ Punkte enthalten, ein conjugirtes n-Seit von $a^n_\lambda a^n_\mu = 0$ vor, und aus Satz 3 folgt also, dass die binäre Form der $2n$ Punkte zu a^{2n}_x conjugirt ist, womit der Satz 5 vollständig bewiesen ist.

Specielle Fälle der angeführten Sätze ergeben sich, wenn man die zu a^{2n}_x apolaren Formen betrachtet. Es gilt insbesondere der Satz:

6. *Wenn $2p$ Punkte ($p < n$) eine apolare Form von a_x^{2n} bilden, so ist jede Curve $p$ter Ordnung, welche durch diese Punkte hindurchgeht, zu $a_\lambda^n a_\mu^n = 0$ apolar.*

Die Sätze 4 und 5 können noch in anderer Weise ausgesprochen werden. Zunächst bemerke man, dass die duale Betrachtung naturgemäss darauf führt, jeder Form a_x^{2n} auch die bestimmte Curve $n$ter Ordnung „beizuordnen", welche zu S als Classencurve apolar ist und durch die $2n$ Punkte der Form hindurchgeht. Diese Curve ist auch nichts anderes als die reciprok-polare Figur der beigeordneten Classencurve in Bezug auf den vorliegenden Kegelschnitt S. Es folgen jetzt unmittelbar die Sätze:

4a. *Sind 2 binäre Formen geraden Grades conjugirt, so ist die beigeordnete Ordnungscurve der einen zur beigeordneten Classencurve der andern conjugirt.*

5a. *Haben wir 2 binäre Formen geraden Grades und ist die beigeordnete Ordnungscurve der einen zur beigeordneten Classencurve der andern conjugirt, so sind die binären Formen zu einander conjugirt.*

Weiterhin kann man von der Betrachtung der zu einer Form conjugirten Formen zur Betrachtung der Gruppen übergehen. Einer G_p^{2n} steht eine conjugirte G_{2n+1-p}^{2n} gegenüber und jeder Form der Letzteren ist eine Curve $n$ter Classe beigeordnet. Man erhält so eine $(2n+1-p)$-gliedrige Gruppe Γ, welche nur aus apolaren Curven besteht. Dieser steht wiederum eine

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (2n+1-p) = \frac{n(n-1)}{2} + p\text{-}$$

gliedrige Gruppe G von Ordnungscurven gegenüber. Legt man nun durch die $2n$ Punkte einer zu G_p^{2n} gehörigen Form irgend eine Curve $n$ter Ordnung, so ist dieselbe nach Satz 4 zu der ganzen Gruppe Γ conjugirt und gehört also der Gruppe G an; umgekehrt folgt aus 5, dass sämmtliche zur Gruppe G gehörige Curven, welche S nicht in sich enthalten, auf S Formen der G_p^{2n} ausschneiden. Es folgt demnach:

7. *Haben wir auf S $(p+1)$ binäre Formen derselben G_p^{2n} und legen durch die $2n$ Punkte einer jeden eine beliebige Curve $n$ter Ordnung, so bilden diese $(p+1)$ Curven, zusammen mit der $\frac{(n-1)n}{2}$-gliedrigen Gruppe der S enthaltenden Curven nicht eine $\left[\frac{(n-1)n}{2}+p+1\right]$-sondern nur eine $\left[\frac{(n-1)n}{2}+p\right]$*-gliedrige Gruppe.

Dieser Satz gewährt einen deutlichen Einblick in den Zusammenhang, der zwischen einer Anzahl von binären Formen geraden Grades obwaltet, welche durch eine lineare Identität verbunden sind, und er

lässt erkennen, worauf es bei der Lösung derjenigen Aufgaben ankommt, welche ich in der Einleitung unter (2) angeführt habe.

Ich will dies für den Fall erläutern, dass $p = 2n$ ist. Wenn eine G_{2n}^{2n} vorliegt, so steht ihr eine bestimmte Form $2n$ten Grades a_x^{2n} als conjugirt gegenüber und dieser wiederum ist eine Curve $n$ter Classe K^n beigeordnet. Irgend n Gerade, welche alle $2n$ Punkte einer Form der G_{2n}^{2n} enthalten, bilden ein conjugirtes n-Seit der Curve K^n. Diese aber ist eindeutig bestimmt, sobald $\frac{n(n+3)}{2}$ conjugirte n-Seite derselben gegeben sind; mithin müssen sich auch alle conjugirten n-Seite von K^n (und damit alle Formen der Gruppe) construiren lassen, sobald irgend $\frac{n(n+3)}{2}$ solcher n-Seite bekannt sind. Diese können jedoch stets hergestellt werden, wenn $2n$ Formen der Gruppe gegeben sind, da hierzu nur nöthig wäre, dass durch $2n$ Punkte sich mehr von einander verschiedene n-Seite legen lassen (die alle $2n$ Punkte enthalten), als die Zahl $\frac{n+3}{4}$ angiebt. Aus alledem folgt, dass die Aufgabe: „alle Elemente einer G_{2n}^{2n} zu construiren, wenn $2n$ Formen derselben gegeben sind“, sich zurückführen lässt auf die folgende: „Wenn $\frac{n(n+3)}{2}$ conjugirte n-Seite einer (nicht bekannten) Curve $n$ter Classe gegeben sind, so sollen alle conjugirten n-Seite derselben construirt werden“.

Da eine Lösung dieser letztgenannten Aufgabe bisher nur für $n = 2$ bekannt ist, so kann diese Betrachtung nur für die Construction der G_4^4 verwerthet werden, welche, wie schon erwähnt, Herr Serret angegeben hat. Wenn nämlich 4 Formen einer G_4^4 gegeben sind, welche resp. aus den Punkten:

$$a_i\, b_i\, c_i\, d_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

bestehen, so bestimme man die 5 Geradenpaare

$$\begin{gathered} a_1 b_1 - c_1 d_1, \\ a_2 b_2 - c_2 d_2, \\ a_3 b_3 - c_3 d_3, \\ a_4 b_4 - c_4 d_4, \\ a_4 d_4 - b_4 c_4. \end{gathered}$$

Ist alsdann $a_5 b_5 c_5 d_5$ ein 5tes Quadrupel der G_4^4, so gehört nach Satz 7 jedes durch dies Quadrupel gehende Geradenpaar mit den 5 eben angegebenen Paaren ein und derselben 5-gliedrigen Gruppe von Curven 2ter Ordnung an; d. h. sie sind alle ein und derselben Curve 2ter Classe K conjugirt. Wir wissen auch, dass dieser Kegelschnitt

nichts anderes ist, als die beigeordnete Curve derjenigen biquadratischen Form, welche zu den ganzen G_4^4 conjugirt ist. Durch die 5 erstgenannten conjugirten Geradenpaare ist jedoch dieser Kegelschnitt K vollständig bestimmt und man kann nach bekanntem Constructionsverfahren, ohne ihn selbst herzustellen, zu jeder Geraden den Pol in Bezug auf denselben construiren. Wenn mithin 3 beliebige Punkte $a_5 b_5 c_5$ zu einem Element der G_4^4 ergänzt werden sollen, so hat man nur den Pol von $a_5 b_5$ in Bezug auf K zu bestimmen und denselben mit c_5 zu verbinden. Wird der 2te Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit S durch d_5 bezeichnet, so stellt $a_5 b_5 c_5 d_5$ ein Quadrupel der G_4^4 vor, wie es verlangt wurde.

§ 3.

Erweiterung für Formen ungeraden Grades.

Um die Betrachtungen der vorigen Paragraphen für Formen ungeraden Grades zu verwerthen, muss man auf die ersten Polaren dieser Formen zurückgehen. Liegt nämlich die Form a_x^{2n+1} vor, so ist der Polaren jedes Punktes ϱ (d. h. der binären Form $a_\varrho a_x^{2n}$) die Curve

$$a_\varrho a_\lambda^n a_\mu^n \equiv a_{\alpha_\varrho}^n = 0$$

beigeordnet. Wir können also sagen,

dass jeder Form $(2n+1)$ten Grades eine Curvenschaar $n$ter Classe derart „beigeordnet“ ist, dass jedem Punkte ϱ von S eine bestimmte Curve derselben zugehört. Die Punkte des Kegelschnitts und die Curven der Schaar sind dadurch projectivisch zugeordnet.

Sind nun $x_1 x_2 \cdots x_{2n}$ irgend $2n$ Punkte von S und $(v_1 v_2 \cdots v_n)$ n Geraden, welche sämmtliche Punkte enthalten, so gilt nach Früherem die Gleichung:

$$a_\varrho a_{x_1} a_{x_2} \cdots a_{x_{2n}} = v_{1a_\varrho} v_{2a_\varrho} \cdots v_{na_\varrho},$$

mithin folgt:

8. *Ein conjugirtes n-Seit der zu ϱ gehörigen Curve der beigeordneten Schaar schneidet den Kegelschnitt in $2n$ Punkten, welche mit ϱ zusammen eine binäre Form bilden, die zu a_x^{2n+1} conjugirt ist.*

Sind ferner $a_{1x} = 0$, $a_{2x} = 0 \cdots a_{2n,x} = 0$ Punkte (mit den Coordinaten $x_{i1} x_{i2} x_{i3}$) derart, dass $(\varrho x)\, a_{1x} a_{2x} \cdots a_{2n,x}$ zu a_x^{2n+1} conjugirt ist, so gilt die Identität in $x_1 x_2$:

$$a_x^{2n+1} \equiv \varepsilon(\varrho x)^{2n+1} + \sum_{i=1}^{i=2n} \tau_i a_{ix}^{2n+1}.$$

Mithin ist:

$$a_\varrho a_x^{2n} \equiv \sum_1^{2n} \tau_i a_\varrho a_{ix}^{2n}$$

und es gilt für $(\lambda\mu)_i = u_i$ die in u identische Gleichung:

$$a_\varrho a_\lambda^n a_\mu^n = \sum_1^{2n} \tau_i a_\varrho a_{i\lambda}^n a_{i\mu}^n = \sum_1^{2n} \omega_i u_{x_i}^n .$$

Daraus folgt:

9. *Ist die binäre Form von* $(2n+1)$ *Punkten zu* a_x^{2n+1} *conjugirt, so ist jede Curve nter Ordnung, welche durch* $2n$ *dieser Punkte geht, zu der dem* $(2n+1)$*ten Punkte zugehörigen Curve conjugirt,*
und umgekehrt:

10. *Wenn durch* $2n$ *Punkte von S eine Curve nter Ordnung hindurch geht, die zu* $a_\varrho a_\lambda^n a_\mu^n = 0$ *conjugirt ist, so hat jede durch diese Punkte gehende Curve dieselbe Eigenschaft und die* $2n$ *Punkte zusammen mit* ϱ *bilden eine binäre Form, die zu* a_x^{2n+1} *conjugirt ist.*

Der letzte Satz folgt aus 9 mit Hülfe von 8 ebenso, wie 5 aus 4 mit Hülfe von Satz 3.

Man könnte ohne Schwierigkeit Theoreme aufstellen, welche den Sätzen 4a und 5a entsprechen, doch würden diese nicht von der gleichen Einfachheit sein.

Ein dem Satz 7 correspondirendes Theorem für Formen ungeraden Grades kann man erhalten, wenn man allen Formen einer G_p^{2n+1} einen beliebig fixirten Punkt hinzufügt und auf die so entstehende G_p^{2n+2} den Satz 7 anwendet:

11. *Haben wir auf S* $(p+1)$ *Formen einer* G_p^{2n+1} *und legen durch die* $(2n+1)$ *Punkte einer jeden und einen beliebig fixirten Punkt von S je irgend eine Curve* $(n+1)$*ter Ordnung, so bilden die so erhaltenen* $(p+1)$ *Curven zusammen mit der* $\frac{n(n+1)}{2}$*-gliedrigen Gruppe der S enthaltenden Curven* $(n+1)$*ter Ordnung, nicht eine* $\left[\frac{n(n+1)}{2} + p + 1\right]$*-sondern nur eine* $\left[\frac{n(n+1)}{2} + p\right]$*-gliedrige Gruppe.*

§ 4.

Projectivische Erzeugung der beigeordneten Curven.

Ich kehre nunmehr zu dem Satze 1 zurück, um eine weitere Anwendung desselben zu geben. Indem ich auf $\varphi = (x\lambda)^{n+1}(x\mu)^{n+1}$ die Operation: $\frac{1}{n+1}\left\{\varrho_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \varrho_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\}$ anwende, erlange ich:

$$(13)\qquad \varphi' = \frac{1}{n+1}\left\{\varrho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa_1} + \varrho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa_2}\right\}$$
$$= (\varkappa\lambda)^n (\varkappa\mu)^n [(\varkappa\lambda)(\varrho\mu) + (\varkappa\mu)(\varrho\lambda)].$$

Ist nun $a_\varkappa^{2n+1}$ eine beliebige binäre Form $(2n+1)$ten Grades und setzen wir in (13)

$$\varkappa_1 = a_2, \quad \varkappa_2 = -a_1,$$

so ergiebt sich nach Satz 1 für $u_i = (\lambda\mu)_i$

$$(14)\qquad 0 = a_\lambda^n a_\mu^n [(\varrho\lambda)\, a_\mu + (\varrho\mu)\, a_\lambda]$$

als Gleichung einer zu S apolaren Curve, und zwar ist es die der Form $(\varrho\varkappa)\, a_\varkappa^{2n+1}$ beigeordnete Curve $(n+1)$ter Klasse.

Die Gleichung (14) kann jedoch aus:

$$(15\text{a})\qquad 0 = a_\lambda^n a_\mu^n a_\sigma$$

erhalten werden, indem man die Identität in $\varkappa$:

$$(\varkappa\sigma) = (\varrho\lambda)(\varkappa\mu) + (\varrho\mu)(\varkappa\lambda)$$

gelten lässt, d. h. wenn man annimmt, dass:

$$(15\text{b})\qquad 0 = (\varrho\lambda)(\sigma\mu) + (\varrho\mu)(\sigma\lambda).$$

Die Gleichung (14) ist also das Eliminationsresultat von $\sigma_1 \sigma_2$ aus (15a) und (15b). Für $(\lambda\mu)_i = u_i$ ist (15a) die Gleichung der dem Punkte σ zugehörigen Curve K_σ derjenigen Curvenschaar, welche der Form $a_\varkappa^{2n+1}$ beigeordnet ist; (15b) dagegen ist die Gleichung des Punktes s, in dem die Tangente in ϱ von der Tangente in σ geschnitten wird. Dieser Punkt s und jene Curve sind einander eindeutig zugeordnet, und wenn man σ variirt, so beschreibt K_σ die beigeordnete Schaar und s eine dazu projectivische Punktreihe. Demnach stellt (14) das Erzeugniss dieser beiden projectivischen Reihen vor, und man hat den *Satz:*

12. *Wenn eine binäre Form ungeraden Grades $a_\varkappa^{2n+1}$ gegeben ist, so gehört zu jedem Punkte σ von S eine bestimmte Curve der beigeordneten Schaar. Fixirt man nun auf S einen Punkt ϱ und schneidet die Tangente in ϱ durch die Tangente jedes Punktes σ im Punkte s, so ist mittelbar jedem Punkte s eine Curve der Schaar zugeordnet. Das Erzeugniss der so erhaltenen projectivischen Punktreihe und Schaar ist diejenige Curve $(n+1)$ter Classe, welche der binären Form $(\varrho\varkappa)\, a_\varkappa^{2n+1}$ beigeordnet ist.*

Wenn eine binäre Form geraden Grades $a_\varkappa^{2n}$ vorliegt, so können wir den Satz 12 für die Polare eines beliebigen Punktes ϱ anwenden, welche vom $(2n-1)$ten Grade ist. Die zu dieser Form $(a_\varrho a_\varkappa^{2n-1})$ gehörige Schaar wird durch:

$$a_\varrho\, a_\sigma\, a_\lambda^{n-1} a_\mu^{n-1} = 0$$

bei variablem σ dargestellt; sie besteht daher [nach Gl. (12), Seite 528] aus denjenigen Curven $(n-1)$ter Classe, welche erste Polaren der einzelnen Strahlen des Strahlbüschels um ϱ in Bezug auf die Curve $a_\lambda^n a_\mu^n = 0$ sind. Wendet man nun den Satz 12 auf die binäre Form $a_\varrho a_x^{2n-1}$ an, indem man gerade den Punkt ϱ als festen Punkt wählt, so wird schliesslich diejenige Curve erzeugt, welche der Form $(\varrho x)\, a_\varrho\, a_x^{2n-1}$ beigeordnet ist. Diese Form aber können wir ansehen als die erste Polare von ϱ in Bezug auf $(\varrho x)\, a_x^{2n}$. Die erzeugte Curve gehört also dem Punkte ϱ innerhalb derjenigen Schaar zu, welche der Form $(\varrho x)\, a_x^{2n}$ beigeordnet ist. Es ergiebt sich mithin der *Satz:*

13. *Liegt eine binäre Form geraden Grades a_x^{2n} vor, deren beigeordnete Curve K sei, und nimmt man auf S einen Punkt ϱ beliebig an, construirt alsdann zu irgend einer durch ϱ gehenden Geraden die erste Polare in Bezug auf K und schneidet die Tangente in ϱ durch die Tangente des 2ten Schnittpunktes σ der Geraden in s, so sind jene erste Polare und dieser Punkt s eindeutig zugeordnet. Man erhält also, wenn man die Gerade durch ϱ variirt, eine Curvenschaar $(n-1)$ter Classe und eine zu ihr projectivische Punktreihe. Das Erzeugniss beider ist diejenige Curve $n$ter Classe, welche dem Punkte ϱ in derjenigen Curvenschaar zugehört, die der Form $(\varrho x)\, a_x^{2n}$ beigeordnet ist.*

Man sieht sofort, worin der Nutzen der Sätze 12 und 13 besteht: Wenn man nämlich weiss, wie zu jeder Form $2n$ten Grades die beigeordnete Curve zu construiren ist, so ist man nach Satz 13 im Stande, die Curvenschaar, welche einer Form $(2n+1)$ten Grades beigeordnet ist, zu construiren und die projectivische Beziehung derselben zu den Punkten des Kegelschnittes festzulegen; denn man kann mit Hülfe dieses Satzes zu den $(2n+1)$ Punkten der Form die zugehörigen Curven der Schaar projectivisch erzeugen, und die projectivische Beziehung ist dadurch mit bestimmt, weil $2n+1$ schon für $n=1$ den Werth 3 hat.

Weil man nunmehr zu jeder Form $(2n+1)$ten Grades die beigeordnete Schaar und ihre Zuordnung zu den Punkten von S bestimmen kann, so darf der Satz 12 angewandt werden und führt zur projectivischen Erzeugung der Curve, welche einer beliebigen Form $(2n+2)$ten Grades beigeordnet ist, Indem man so fortfährt, abwechselnd die Sätze 13 und 12 anzuwenden, gelangt man dazu, die beigeordneten Curven jeder Form höheren Grades zu erzeugen unter der alleinigen Voraussetzung, dass man zu jeder Form $2n$ten Grades die beigeordnete Curve construiren kann. Da aber diese Voraussetzung für $n=1$ erfüllt ist, so ist überhaupt die Construction dieser beigeordneten Curven und Curvenschaaren im Princip erledigt.

Es möge hier, obwohl ich weiterhin keinen Gebrauch davon

mache, noch angedeutet werden, welche Resultate man erlangt, wenn man den Satz 1 für die mehrfach polarisirte Form $(\varkappa\lambda)^n(\varkappa\mu)^n$ anwendet. Indem man nämlich die Gleichung (13) der Operation $\sigma_1 \frac{\partial}{\partial \varkappa_1} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \varkappa_2}$ unterwirft, ergiebt sich:

$$(16) \qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial \varkappa_1}\sigma_1 + \frac{\partial \varphi'}{\partial \varkappa_2}\sigma_2$$
$$= n(\varkappa\lambda)^{n-1}(\varkappa\mu)^{n-1}[(\varkappa\lambda)(\varrho\mu)+(\varkappa\mu)(\varrho\lambda)]\,[(\varkappa\lambda)(\sigma\mu)+(\varkappa\mu)(\sigma\lambda)]$$
$$+ (\varkappa\lambda)^n(\varkappa\mu)^n[(\sigma\lambda)(\varrho\mu)+(\sigma\mu)(\varrho\lambda)].$$

Setzt man nunmehr $\varkappa_1 = a_2$, $\varkappa_2 = -a_1$, so erhält man nach Satz 1:

$$(17) \qquad 0 = n a_\lambda^{n-1} a_\mu^{n-1}[(\varrho\lambda)a_\mu + (\varrho\mu)a_\lambda]\,[(\sigma\lambda)a_\mu + (\sigma\mu)a_\lambda)]$$
$$+ a_\lambda^n a_\mu^n[(\sigma\lambda)(\varrho\mu)+(\sigma\mu)(\varrho\lambda)]$$

als Gleichung einer zu S apolaren Curve, und zwar ist es die der binären Form $a_\varkappa^{2n}(\varrho\varkappa)(\sigma\varkappa)$ beigeordnete Curve $(n+1)$ter Classe.

Die Gleichung (17) entsteht aber aus:

$$(18) \qquad 0 = a_\lambda^{n-1} a_\mu^{n-1} a_\tau a_\omega,$$

indem man die folgende Identität in $\varkappa$ gelten lässt:

$$(\varkappa\tau)(\varkappa\omega) = n[(\varrho\lambda)(\varkappa\mu) + (\varrho\mu)(\varkappa\lambda)]\,[(\sigma\lambda)(\varkappa\mu) + (\sigma\mu)(\varkappa\lambda)]$$
$$+ [(\sigma\lambda)(\varrho\mu) + (\sigma\mu)(\varrho\lambda)]\,(\varkappa\lambda)(\varkappa\mu),$$

d. h. wenn man annimmt, dass die rechts stehende quadratische Function von $\varkappa$, welche ich abkürzend mit $\psi(\varkappa\varkappa)$ bezeichnen will, für $\varkappa_i = \tau_i$ und $\varkappa_i = \omega_i$ verschwindet. Die Gleichung (17) ist demnach das Eliminationsresultat von $\tau\omega$ aus der Gleichung (18) und den 2 weiteren Gleichungen:

$$\left[19\begin{matrix}\mathrm{a}\\ \mathrm{b}\end{matrix}\right] \qquad \begin{aligned}\psi(\tau\tau) &= 0,\\ \psi(\omega\omega) &= 0.\end{aligned}$$

Jede der Gleichungen (19) ist für $u_i = (\lambda\mu)_i$ die Gleichung eines bestimmten Kegelschnitts; beide berühren die Tangenten in ϱ und σ, der erste berührt überdies S im Punkte τ, der zweite ebenso in ω. Wir können jedoch die Kegelschnitte (19) noch näher charakterisiren: Setzt man nämlich in (16) $\varkappa_1 = \tau_1$, $\varkappa_2 = \tau_2$, so erhält man offenbar

$$(\tau\lambda)^{n-1}(\tau\mu)^{n-1}\,\psi(\tau\tau)$$

und dies ist nach Satz 1 die linke Seite einer zu S apolaren Curve. Wir sehen also,

> dass der Kegelschnitt $\psi(\tau\tau) = 0$ mit dem $(n-1)$-fach gezählten Punkte τ zusammen eine zu S apolare Curve $(n+1)$ter Classe bildet.

Man könnte also, indem man nur sehr spezielle Fälle der Sätze

13 und 12 in Anwendung brächte, projectivische Punktreihen angeben, welche $\psi(\tau\tau) = 0$ oder $\psi(\omega\omega) = 0$ erzeugen würden.

Die Curven (19a) und (19b) haben 4 gemeinschaftliche Tangenten, von denen 2, nämlich die Tangenten von S in ϱ und σ fest, die beiden andern mit $\tau\omega$ variabel sind. Jedem Punktepaar $\tau\,\omega$ entspricht also ein Geradenpaar und eine Curve $(n-1)$ter Classe (18), welche dadurch einander eindeutig zugeordnet sind. Es wird einfach unendlich viele Male vorkommen, dass eine Gerade des Geradenpaars die zugehörige Curve tangirt. Die Geraden dieser Eigenschaft umhüllen die Curve (17), d. h. die beigeordnete Curve von $a_x^{2n}(\varrho x)(\sigma x)$.

Man sieht, wie diese Betrachtung unter fortwährender Anwendung des Satzes 1 fortgesetzt werden kann und zu Erzeugungsarten derjenigen Curven führt, welche den Formen $a_x^{2n}(\varrho x)(\sigma x)(\tau x)$, $a_\gamma^{2n}(\varrho x)(\sigma x)(\tau x)(\omega x)$ etc. beigeordnet sind, sobald die beigeordnete Curve von a_x^{2n} bekannt ist.

§ 5.

Lösung einer Hülfsaufgabe.

Die Sätze 12 und 13 gestatten ganz allgemein die Construction der zu einer binären Form conjugirten Formen, sobald die Lösung der folgenden Hülfsaufgabe bekannt ist:

14. *Eine Schaar von Curven nter Classe (für $n > 1$):*

$$u_\alpha^n + \varrho u_\beta^n = 0 \tag{20a}$$

sei nicht selbst gegeben, aber es sei möglich, zu jeder einzelnen Curve derselben sämmtliche conjugirte n-Seite linear zu construiren). Es sei ferner eine zu dieser Schaar projectivische Punktreihe Π:*

$$u_A + \varrho u_B = 0 \tag{20b}$$

gegeben (wobei die Elemente desselben Parameters sich entsprechen). Es sollen alle conjugirten $(n+1)$-Seite der von den beiden projectivischen Reihen erzeugten Curve:

$$u_\gamma^{n+1} = \begin{vmatrix} u_\alpha^n & u_\beta^n \\ u_A & u_B \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

construirt werden.

Ich nehme an, dass die entsprechende Aufgabe für eine Curvenschaar $(n-1)$ter Classe bereits gelöst sei, und werde zeigen, dass und wie sie alsdann für die (vorliegende) Curvenschaar $n$ter Classe zu lösen ist.

*) Darunter soll stets verstanden werden, dass man im Stande sei, die gemischte Polare von irgend $(n-1)$ Geraden in Bezug auf die betreffende Curve linear herzustellen.

Zu diesem Zweck will ich die Punkte der Punktreihe (20b) mit $\pi_1\pi_2\ldots\pi_i\ldots$, die entsprechenden Curven der Schaar (20a) mit $K_1K_2\ldots K_i\ldots$ und das Erzeugniss beider Reihen mit $(\pi - K)$ bezeichnen. Ausserdem soll allgemein K_v die Polare der Geraden v in Bezug auf eine Classencurve K bedeuten. Danach wird $(\pi - K)_v$ die Polare von v in Bezug auf $(\pi - K)$, dagegen $(\pi - K_v)$ das Erzeugniss der projectivischen Reihen $(\pi_1\pi_2\ldots\pi_i\ldots)$ $(K_{1v}K_{2v}\ldots K_{iv}\ldots)$ *) vorstellen. Ich behaupte nun, dass die Curve $(\pi - K)_v$ derjenigen Schaar angehört, welche gebildet wird:

1) von der Curve $(\pi - K_v)$,

2) von derjenigen Curve, welche innerhalb der Schaar der Curven K dem Schnittpunkt von Π mit v entspricht.

In der That folgt aus (21) durch Polarenbildung die in u identische Gleichung:

$$(22)\qquad (n+1)\,v_\gamma u_\gamma^n = n\begin{vmatrix} v_\alpha u_\alpha^{n-1} & v_\beta u_\beta^{n-1} \\ u_A & u_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_\alpha^n & u_\beta^n \\ v_A & v_B \end{vmatrix},$$

welche das Gesagte bestätigt.

Schreibt man nunmehr v_1 an Stelle von v und bestimmt in Bezug auf die 3 genannten Curven, welche derselben Schaar angehören, die gemischten Polaren von $(n-1)$ weiteren Geraden $v_2\ldots v_n$, so erhält man 3 Punkte, welche auf derselben Geraden liegen. Der Punkt $(\pi - K)_{v_1v_2\ldots v_n}$ liegt demnach auf der Verbindungslinie der folgenden 2 Punkte:

1) des Punktes $(\pi - K_{v_1})_{v_2v_3\ldots v_n}$. Dieser Punkt ist linear construirbar, weil wir angenommen haben, dass die Aufgabe 14 gelöst sei, sobald an Stelle der Curvenschaar $n$ter Classe eine Schaar von Curven $(n-1)$ter Classe gesetzt wird, wie hier der Fall ist. Um aber darzuthun, dass die Voraussetzungen der (für $(n-1)$ an Stelle von n ausgesprochenen) Aufgabe 14 erfüllt sind, hat man nur zu zeigen, dass man zu jeder einzelnen der Curven $K_{1v_1}, K_{2v_1}, \ldots$ sämmtliche conjugirte $(n-1)$-Seite construiren kann. Dies ist in der That möglich, weil jedes solche $(n-1)$-Seit für K_{iv_1} mit v_1 vereinigt, ein conjugirtes n-Seit für K_i bildet und wir nach der Voraussetzung der ursprünglichen Aufgabe in der Lage sind, für jede der Curven K sämmtliche conjugirte n-Seite herzustellen.

2) des Polarpunktes von $v_2\ldots v_n$ in Bezug auf diejenige Curve der gegebenen Schaar, welche dem Schnittpunkt von v_1 und Π entspricht. Dieser Punkt ist nach der Voraussetzung der Aufgabe ohne Weiteres construirbar.

Wird die Verbindungslinie von (1) und (2) mit V_1 bezeichnet, so liegt der Polarpunkt der Geraden $v_1v_2\ldots v_n$ in Bezug auf die

*) Damit diese Curven angebbar seien, musste $n > 1$ angenommen werden.

Curve $(\pi - K)$, auf dessen Aufsuchung wir hinzielen, jedenfalls auf der Geraden V_1. Auf diese war man jedoch gelangt, indem man v_1 aus der Reihe der Geraden $v_1, v_2, \ldots, v_n$ hervorhob; verfährt man also in derselben Weise mit v_2, so erlangt man eine 2te Gerade V_2, welche ebenfalls den gesuchten Polarpunkt enthält. Dieser ist demnach identisch mit dem Schnittpunkt von V_1 und V_2 und die Aufgabe 14 ist demnach gelöst, einstweilen noch unter der Voraussetzung, dass die analoge Aufgabe des $(n-1)$ten Grades gelöst ist; d. h. die Aufgabe des $n$ten Grades ist auf die entsprechende des $(n-1)$ten Grades reducirt.

Danach ist insbesondere die Lösung von 14 für $n = 2$ auf die folgende Aufgabe zurückgeführt: „Wenn 2 projectivische Punktreihen gegeben sind, welche einen Kegelschnitt erzeugen, so sollen sämmtliche conjugirte Geradenpaare derselben construirt werden. Da aber diese Aufgabe in der That sehr leicht lösbar ist, so ist die in 14 geforderte Construction für $n = 2$, also überhaupt allgemein vermöge der oben gegebenen Methode ausführbar.

§ 6.

Constructionen auf einem Kegelschnitt.

A. Formen dritten Grades.

I. Es sei eine binäre Form a_x^3 gegeben, welche aus den Punkten 1, 2, 3 (des Grundkegelschnitts S) bestehen möge. Derselben ist als Form $(2n+1)$ten Grades (für $n = 1$) nach § 3 eine Punktreihe P beigeordnet, derart, dass zu jedem Punkte σ des Kegelschnitts ein Punkt p_σ der Punktreihe gehört und aus Satz 9. folgt, dass, wenn die Punkte $\sigma\,\tau\,\omega$ eine zu a_x^3 conjugirte Form bilden, die Gerade $\tau\omega$ durch p_σ hindurchgeht. Die Strahlen durch p_σ schneiden also auf S diejenige quadratische Involution aus, welche innerhalb der zu a_x^3 conconjugirten $G_3{}^3$ dem Punkte σ zugehört (cfr. Einleitung VII). Nun kann man sehr leicht $p_1\, p_2\, p_3$ construiren, denn es bildet, wie aus den beiden Sätzen II der Einleitung hervorgeht, sowohl der dreifach gezählte Punkt 1, als auch (1 2 3) selbst je eine Form der conjugirten G_3^3. Die Tangenten in 1 und die Grade $\overline{23}$ schneiden sich demnach im Punkte p_1; ebenso ist:

$$p_2 = t_2 - \overline{31}, \qquad p_3 = t_3 - \overline{12}$$

wenn t_σ allgemein die Tangente des Punktes σ bedeutet, eine Bezeichnung, welche auch für das Folgende stets festgehalten werden soll. Dass die 3 Punkte $p_1\, p_2\, p_3$ in der That auf derselben Geraden liegen, ist die Folge eines bekannten Satzes.

Durch Construction der Punkte $p_1\, p_2\, p_3$ ist nun die Punktreihe P und ihre Zuordnung zu den Punkten des Kegelschnitts vollständig bestimmt; man könnte nach den gewöhnlichen Regeln der Construction projectivischer Gebilde zu jedem Punkte σ den zugehörigen p_σ construiren. In unserem Falle jedoch vereinfacht sich diese Construction bedeutend und kann kurz so angegeben werden: Man bestimme den 2ten Schnittpunkt σ' von $\overline{p_1\sigma}$ mit S und den Schnittpunkt von $\overline{\sigma' 1}$ mit P; der letztere ist p_σ; denn da nach Construction $1\sigma\sigma'$ ein Element der G_3^3 ist, so ist $1\sigma'$ ein Element der zu σ innerhalb der G_3^3 gehörigen G_2^2, p_σ muss also auf der Geraden $1\sigma'$ und zugleich auf P liegen, wie behauptet wurde.

Um also zu einem Punktepaar $\tau\omega$ den Punkt σ zu finden, welcher es zu einem Element der conjugirten G_3^3 ergänzt, bestimmt man $(\tau\omega - P) = p_\sigma$, fixirt den 2ten Schnittpunkt σ' von $\overline{1p_\sigma}$ mit S und erhält alsdann σ als 2ten Schnittpunkt von S mit $p_1\sigma'$.

Es möge hervorgehoben werden, dass die angegebenen Constructionen gültig bleiben, wenn man an Stelle von 1 und p_1 überall ϱ und p_ϱ setzt, wo ϱ einen beliebigen Punkt des Kegelschnitts bedeutet. Ist nämlich die Gerade P und sind überdies die zugehörigen Punkte ϱ und p_ϱ gegeben, so wird zu irgend einem Punkte σ des Kegelschnitts der zugehörige Punkt p_σ gefunden, indem man $(\sigma p_\varrho - S) = \sigma'$ und $(\sigma'\varrho - P) = p_\sigma$ bestimmt. In der That gehört alsdann vermöge der Construction des Punktes σ' das Tripel $\sigma\varrho\sigma'$ der G_3^3, und demzufolge $\varrho\sigma'$ derjenigen Involution an, welche dem Punkte σ zugehört. Die Verbindungslinie der Punkte $\varrho\sigma'$ muss in Folge dessen den Punkt p_σ enthalten, der überdies auf P liegt; es ist mithin $(\sigma'\varrho - P) = p_\sigma$, wie behauptet wurde.

Ebenso kann unter derselben Voraussetzung, dass die Punktreihe P und zwei zugehörige Punkte ϱ und p_ϱ gegeben sind, zu irgend einem Punktepaare $\tau\omega$ derjenige Punkt σ bestimmt werden, welcher dasselbe zu einem Element der G_3^3 ergänzt. Man hat zu diesem Zwecke nur $(\tau\omega - P) = p_\sigma$, $(\varrho p_\sigma - S) = \sigma'$, $(\sigma' p_\varrho - S) = \sigma$ zu bestimmen.

Wenn wir an Stelle von τ und ω die Schnittpunkte der Geraden P mit der Curve treten lassen und die letzte Construction auszuführen versuchen, so sehen wir, dass jeder Punkt von P als Schnittpunkt $(\tau\omega - P) = p_\sigma$ und mithin jeder Punkt von S als ein Punkt σ angesehen werden kann, welcher $\tau\omega$ zu einem Element der G_3^3 oder mit andern Worten, zu einer conjugirten Form von a_x^3 ergänzt. Das erwähnte Punktepaar stellt mithin die einzige apolare Form von a_x^3 dar, welche nach VI der Einleitung existirt. Man erkennt leicht auch auf geometrischem Wege, dass diese quadratische Form die Hesse'sche

Covariante von a_x^3 vorstellt, weil sie zu allen ersten Polaren dieser Form conjugirt ist. Das Punktepaar, welches P auf S ausschneidet, ist bekanntlich zu allen Punktepaaren harmonisch, welche die Berührungssehnen der Punkte von P auf S bestimmen. Diese Punktepaare sind aber nichts anderes, als die ersten Polaren der Form a_x^3; denn jeder Punkt der ersten Polare von σ muss, doppelt gezählt, durch σ zu einer conjugirten Form von a_x^3 ergänzt werden. Seine Tangente geht mithin nach dem Obigen durch p_σ oder, was dasselbe ist, die Polare von p_σ in Bezug auf S, schneidet auf S die Polare von σ in Bezug auf die gegebene cubische Form aus. Die ganze Involution der ersten Polaren wird mithin von denjenigen Geraden ausgeschnitten, welche durch den Pol der Geraden P in Bezug auf S hindurchgehen und ist mithin zu der quadratischen Form der Schnittpunkte von P und S conjugirt. Diese letztere ist also in der That mit der Hesse'schen Form von a_x^3 identisch.

II. Ich gehe nun zur Betrachtung zweier Formen dritten Grades $a_x^3\, b_x^3$ über, welche resp. aus den Punkten (1 2 3) (1′ 2′ 3′) bestehen mögen. Ihnen steht eine G_2^3 von conjugirten Formen gegenüber. Die beigeordnete Punktreihe von a_x^3 sei $P(p_\sigma \ldots)$, die von b_x^3 sei $Q(q_\sigma \ldots)$ die Gerade $p_\sigma q_\sigma$ schneidet alsdann auf S das zu σ innerhalb der conjugirten G_2^3 gehörige Punktepaar aus. Die projectivisch auf einander bezogenen Punktreihen $(p_\sigma p_\tau \ldots)$ und $(q_\sigma q_\tau \ldots)$ erzeugen demnach die Involutionscurven*) der erwähnten G_2^3, d. h. diejenige Curve 2ter Classe, welche den von den Tripeln derselben gebildeten Dreiecken eingeschrieben ist. Die Gleichung dieser Curve entsteht für $u_i = (\lambda\mu)_i$ durch Elimination von σ aus: $a_\sigma a_\lambda a_\mu = 0$, $b_\sigma b_\lambda b_\mu = 0$, welche Gleichungen für variables σ die beiden projectivischen Punktreihen vorstellen. Die Curve wird demnach repräsentirt durch:

$$f \equiv (ab)\, a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu = 0. \tag{23}$$

Ein specieller Fall bietet besonderes Interesse dar. Wenn nämlich a_x^3 und b_x^3 zu einander conjugirt sind, so steht die Involution $a_x^3 + \varrho b_x^3$ sich selbst als conjugirte gegenüber, und die Curve (23), die wir in diesem Falle J nennen wollen, ist auch Involutionscurve von $a_x^3 + \varrho b_x^3$. Als solche hat sie die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{(\lambda\mu)} \begin{vmatrix} a_\lambda^3 & b_\lambda^3 \\ a_\mu^3 & b_\mu^3 \end{vmatrix} = (ab)\,[a_\lambda^2 b_\mu^2 + a_\lambda b_\mu a_\mu b_\lambda + a_\mu^2 b_\lambda^2], \tag{23a}$$

weil sie von denjenigen Geraden berührt wird, deren Schnittpunkte $\lambda\mu$ mit S demselben Element der Involution angehören, ihre Gleichung demnach durch Elimination von ϱ aus:

*) Weyr, Crelles Journal, Bd. 72.

$$a_\lambda^3 + \varrho b_\lambda^3 = 0,$$
$$a_\mu^3 + \varrho b_\mu^3 = 0$$

erhalten wird, wobei die Lösung $\lambda = \mu$ auszuschliessen ist.

Dass für $(ab)^3 = 0$ die Curven (23) und (23a) in der That identisch sind, bestätigt man sofort, indem man die identische Gleichung:

$$(ab)^3 (\lambda\mu)^2 = (ab)[a_\lambda^2 b_\lambda^2 - 2a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu + a_\mu^2 b_\lambda^2] = 0$$

mit (23) verbindet. Ebenso erhält man aber auch

(23b) $$4f \equiv (ab)(a_\lambda b_\mu + a_\mu b_\lambda)^2 = 0$$

als eine neue Gleichungsform derselben Curve. Bildet man für diese (nach Seite 527) Df und ΔDf, so ersieht man aus den Gleichungen:

$$2 \cdot 4\, Df = 4(ab)\,(a_\lambda b_\mu + a_\mu b_\lambda)\, a_\mu b_\mu,$$
$$6 \cdot 4 \Delta Df = 4(ab)\,(a_\lambda b_\mu + a_\mu b_\lambda)^2 + 8(ab)\, a_\lambda b_\mu a_\mu b_\lambda$$

unter Benutzung von (23) und (23b), dass

$$\Delta Df = f$$

ist, und dass also J als Curve 2ter Classe zu S als Curve 2ter Ordnung conjugirt ist. Nun wird aber die Bedingung dafür, dass einem Kegelschnitte

$$O = a_x^2 \equiv a_x'^2 \equiv a_x''^2 \equiv a_x'''^2$$

unendlich viele einem andern $s_x^2 \equiv s_x'^2 = 0$ eingeschriebene Dreiecke umschrieben werden können, dargestellt durch:*)

(23c) $$3[(aa's)^2]^2 = 4(aa'a'')^2\,(a'''ss')^2$$

Mithin hat die Curve J, wenn sie nicht zerfällt, was offenbar nur bei ganz specieller Beschaffenheit der zu einander conjugirten Formen $a_x^3\, b_x^3$ eintreten kann, die Eigenschaft, dass sie auch als Ordnungscurve zu S conjugirt ist. Daraus folgt aber wiederum, dass, wenn man in (23c) die Coefficienten der Curven a_x^2 und s_x^2 vertauscht, die Gleichung nichts destoweniger erfüllt bleibt; d. h. dass auch J unendlich viele Dreiecke eingeschrieben werden können, die S umschrieben sind. Es gilt also der Satz.

15. *Wenn 2 Punktetripel auf einem Kegelschnitt S zwei zu einander conjugirte Formen dritten Grades vorstellen, so ist der den Dreiecken der beiden Tripel eingeschriebene Kegelschnitt J sowohl als Ordnungsals auch als Classencurve zu S conjugirt und man kann J unendlich viele Dreiecke einschreiben, die S umgeschrieben sind.*

Da nun J als Classencurve zu S conjugirt ist, so folgt auch, dass, wenn die Gerade $\lambda\mu$ Tangente von J ist, $t_\lambda t_\mu$ conjugirte Geraden in Bezug auf J vorstellen; d. h.

---

*) Salmon Fiedler, Theorie der Kegelschnitte, 2te Aufl., p. 448.

16. *Wenn $a_x^3 b_x^3$ conjugirt sind, so schneidet jede Tangente des Involutionskegelschnitts J der von den beiden Formen gebildeten Involution die Curve S in 2 Punkten, deren Tangentenpaar zu J conjugirt ist.*

Ist also $\sigma\tau\omega$ ein Tripel der erwähnten Involution, so ist $t_\sigma t_\tau t_\omega$ ein Polardreiseit der Involutionscurve.

III. In der Einleitung habe ich erwähnt, dass sich an den Begriff der conjugirten binären Formen 2 Reihen von Aufgaben naturgemäss anknüpfen. Für Formen des dritten Grades ist die erste Reihe der Constructionen, soweit sie linear ausführbar sind, durch das Vorhergehende erschöpft; von den anderen Aufgaben: der Construction einer cubischen Involution aus 2 ihrer Elemente und der Construction einer G_3^3 aus 3 ihrer Formen, ist die letztere bisher nicht behandelt worden. Ich will daher zeigen, dass sie mit Hülfe der bekannten Construction der G_2^3 (aus 2 ihrer Elemente) ausführbar ist. Letztere Construction kann folgendermassen ausgesprochen werden:

„Um innerhalb der von $b_x^3(1'\,2'\,3')$ und $c_x^3(1''\,2''\,3'')$ gebildeten Involution zu einem Punkte ϱ das zugehörige Punktepaar $\sigma\tau$ zu construiren, bestimme man zunächst den Punkt $O = 2'3' - 2''3''$, alsdann den 2ten Schnittpunkt ϱ' von $O\varrho$ mit S und fixire die Punkte

$$\varrho'1' - 2''3'', \qquad \varrho'1'' - 2'3'.$$

Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte schneidet S in den gesuchten Punkten $\sigma\tau$."

Die Richtigkeit dieser Construction, welche Herr Weyr (Sitzungsberichte der Prager Academie 1873) angegeben hat, kann man mit Hülfe des Satzes 11 leicht bestätigen, wenn man in demselben $n = 1$ $p = 2$ und ϱ' als den beliebig zu fixirenden Punkt wählt. Alsdann gehen nämlich die Geradenpaare

$$\begin{aligned} &\varrho'1' - 2'3', \\ &\varrho'1'' - 2''3'', \\ &\varrho'\varrho - \sigma\tau \end{aligned}$$

nach Construction durch dieselben 4 Punkte und stellen demnach drei Kegelschnitte desselben Büschels vor. Als solche schneiden sie auf S 3 Elemente derselben G_2^4 aus, nämlich die Punktquadrupel:

$$\begin{aligned} &\varrho'\,1'\,2'\,3', \\ &\varrho'\,1''\,2''\,3'', \\ &\varrho'\,\varrho\,\sigma\,\tau. \end{aligned}$$

Da diese sämmtlich den Punkt ϱ' enthalten, so gehören $(1'\,2'\,3')$, $(1''2''3'')$, $(\varrho\sigma\tau)$ derselben cubischen Involution an, was zu beweisen war.

IV. Es seien nunmehr 3 Formen dritten Grades $a_x^3 b_x^3 c_x^3$ gegeben,

welche resp. aus den Punkten 1 2 3, 1' 2' 3', 1'' 2'' 3'', bestehen. Ich stelle mir die Aufgabe, innerhalb der von ihnen gebildeten G_3^3 zu irgend 2 Punkten den zugehörigen dritten zu construiren. Es sei a_x^3 die Form, welche zu der G_3^3 conjugirt ist; dann ist die Aufgabe gelöst, wenn es gelingt, für diese Form die beigeordnete Punktreihe $\Pi(\pi_\sigma)$ zu bestimmen. Das kann folgendermassen geschehen: Man construire das zu 1 innerhalb der Involution $(b_x^3 c_x^3)$ gehörige Punktepaar $\sigma_1\,\tau_1$ und ebenso die zu 2 und 3 gehörigen $\sigma_2\,\tau_2$ und $\sigma_3\,\tau_3$. Da alsdann sowohl 1 2 3, als auch 1 $\sigma_1\,\tau_1$ der G_3^3 angehören, so sind 2 3 und $\sigma_1\,\tau_1$ Elemente der zu 1 gehörigen quadratischen Involution. Es ist mithin (nach A. 1), da Analoges für die Punkte 2 und 3 gilt,

$$\pi_1 = \overline{2\,3} - \overline{\sigma_1\,\tau_1}, \quad \pi_2 = \overline{3\,1} - \overline{\sigma_2\,\tau_2}, \quad \pi_3 = \overline{1\,2} - \overline{\sigma_3\,\tau_3}.$$

Dadurch ist die Punktreihe Π und ihre Zuordnung zu den Punkten des Kegelschnitts festgelegt, und um nunmehr zu irgend 2 Punkten $\sigma\,\tau$ den zugehörigen Punkt ϱ zu bestimmen, hat man nur nach der Methode von I zu verfahren, nämlich den Schnittpunkt $\sigma\,\tau - \Pi = \pi_\varrho$ zu fixiren, $\pi_\varrho\,1 - S = \varrho'$ und $\varrho'\,\pi_1 - S = \varrho$ aufzusuchen.

Ich füge noch die folgende Bemerkung hinzu:

17. *Wenn die Punkte* (σ) *eines Kegelschnitts S projectivisch sind zu einer Punktreihe* $P = p_\sigma$ *derart, dass für* 3 *Punkte* (1 2 3) p_1 *auf* $\overline{2\,3}$, p_2 *auf* $\overline{3\,1}$ *und* p_3 *auf* $\overline{1\,2}$ *liegt, so erhält man allgemein* p_σ *aus* σ *indem man* $\sigma\,p_1 - S = \sigma'$, $\sigma'\,1 - P = p_\sigma$ *bestimmt; d. h. P ist die beigeordnete Punktreihe einer Form, die zu der binären Form der Punkte* 1 2 3 *conjugirt ist.*

Beweis: Wenn man die Operationen

$$(\sigma p_1 - S) = \sigma', \qquad (\sigma' 1 - P) = q_\sigma$$

in Anwendung bringt, so wird jedem Punkte σ eindeutig ein Punkt q_σ zugeordnet und umgekehrt; vermöge dieses Verfahrens erhält man also jedenfalls eine zu den Punkten σ von S projectivische Reihe q_σ auf dem Träger der Punktreihe P. Nun ordnet aber die erwähnte Operation nach der Voraussetzung von 17 den drei Punkten 1 2 3 resp. die Punkte $p_1\,p_2\,p_3$ zu; d. h. es ist $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$, folglich allgemein $p_\sigma = q_\sigma$, wie behauptet wurde.

Man kann nunmehr bemerken, dass die Aufgabe, die durch 3 Tripel gegebene G_3^3 zu construiren zusammenfällt mit der folgenden Aufgabe, welche dadurch mit gelöst ist:

18. *Es sind* 3 *einem Kegelschnitt S eingeschriebene Dreiecke gegeben. Es soll eine Gerade* Π *so bestimmt werden, dass die* 3×3 *Ecken der Dreiecke* (1 2 3, 1' 2' 3', 1'' 2'' 3'') *projectivisch sind resp. zu den Schnittpunkten von* Π *mit den Gegenseiten* $(\pi_1\,\pi_2\,\pi_3\,\pi_{1'}\,\pi_{2'}\ldots)$.

Dass diese Aufgabe stets eine Lösung zulässt, ist aus der angegebenen Construction der Geraden Π zu ersehen; dass sie nicht mehr

als eine Lösung besitzt, erkennt man mit Hülfe des Satzes 17. Denn nach diesem Satz ist jede Punktreihe Π, welche der Aufgabe genügt, beigeordnete Punktreihe einer Form, die sowohl zu 1 2 3, als zu $1'2'3'$ und $1''2''3''$ conjugirt ist; da es aber nur eine solche Form giebt, so giebt es auch nur eine Gerade Π.

B. Formen vierten Grades.

I. Es sei eine binäre Form a_x^4 gegeben, welche aus den Punkten 1 2 3 4 bestehe. Zu der von 1, 2, 3 gebildeten binären Form dritten Grades sei nach A. 1 die beigeordnete Punktreihe P mit den Punkten $p_1 p_2 p_3$ construirt. Ich ziehe nunmehr im Punkte 4 die Tangente t_4 und bezeichne die Schnittpunkte derselben mit $t_1 t_2 t_3$ resp. mit $s_1 s_2 s_3$. Die durch $(p_1 p_2 p_3)$, $(s_1 s_2 s_3)$ definirten projectivischen Punktreihen erzeugen nach Satz 12 die beigeordnete Curve K_2 von a_x^4. Nunmehr kann man vermöge einer einfachen linearen Construction (ohne die Curve K_2 wirklich herzustellen) zu irgend einer Geraden v den Polarpunkt in Bezug auf K_2 construiren. Es möge nämlich jedem Punkte ϱ des Kegelschnitts der Punkt p_ϱ auf der Punktreihe P und der Punkt s_ϱ auf der Geraden t_4 entsprechen. Wenn alsdann v die Punktreihen in p_τ und s_ω trifft, so hat man s_τ und p_ω herzustellen. Ist nun o der Schnittpunkt der Geraden $v - s_\tau p_\omega$, so ist der vierte harmonische Punkt von o in Bezug auf s_τ und p_ω der gesuchte Punkt O. In der That ist nämlich das Geradenpaar $(p_\tau O - v)$ harmonisch zu dem Tangentenpaar $(P - p_\tau s_\tau)$ der Curve K_2; ebenso das Geradenpaar $(s_\omega O - v)$ harmonisch zu dem Tangentenpaar $(t_4 - s_\omega p_\omega)$. O ist mithin der Schnittpunkt 2er zu v in Bezug auf K_2 conjugirten Geraden, wie behauptet wurde.

Wenn nunmehr die Gerade v mit S die Punkte $\varrho\,\sigma$ gemein hat, so schneiden die Geraden durch O auf S diejenige G_2^1 aus, welche innerhalb der zu a_x^4 conjugirten G_4^1 den Punkten $\varrho\,\sigma$ zugehört. Man kann demnach alle Elemente dieser G_4^1 construiren.

Nach Satz VI der Einleitung besitzt a_x^4 eine Involution von apolaren Formen dritten Grades. Jede solche Form bildet mit jedem Punkte von S zusammen ein Quadrupel, dessen binäre Form zu a_x^4 conjugirt ist. Zu einem beliebig gewählten Punkte ϱ gehört also ein ganz bestimmtes Punktepaar $\sigma\tau$ derart, dass $\varrho\,\sigma\,\tau$ ein Tripel der G_2^3 vorstellt und mithin für jeden Punkt ε, das Quadrupel $\varepsilon\,\varrho\,\sigma\,\tau$ zu a_x^4 conjugirt, oder was für uns dasselbe bedeutet, das Geradenpaar $(\varepsilon\varrho - \sigma\tau)$ zu K_2 conjugirt ist. Die Gerade $\sigma\,\tau$ muss mithin so beschaffen sein, dass jede durch ϱ gehende Gerade zu ihr in Bezug auf K_2 conjugirt ist oder mit andern Worten: $\sigma\,\tau$ muss Polare von ϱ in Bezug auf K_2 sein. Da die Punktreihen gegeben sind, welche K_2

erzeugen, so ist es unschwer, die Polare des Punktes ϱ zu construiren und so die Punkte $\sigma\,\tau$ zu bestimmen, welche ϱ zu einer apolaren Form von a_x^4 ergänzen.

II. Wenn 2 Formen $a_x^4 b_x^4$ vorliegen, so kann man in derselben Weise Punktreihen herstellen, welche die beiden beigeordneten Curven $a_\lambda^2 a_\mu^2 = 0$, $b_\lambda^2 b_\mu^2 = 0$ erzeugen. Alsdann ist die Construction der zu beiden Formen conjugirten G_4^3 ohne Schwierigkeit; denn um $\varrho\sigma$ zu einem Element dieser Gruppe zu ergänzen, hat man nur die Polarpunkte der Geraden $\varrho\sigma$ in Bezug auf $a_\lambda^2 a_\mu^2 = 0$ und $b_\lambda^2 b_\mu^2 = 0$ nach Massgabe von I zu construiren, die Verbindungslinie beider herzustellen und die Schnittpunkte derselben mit S zu bestimmen.

Die Construction der zu 3 und 4 biquadratischen Formen conjugirten Formen kann offenbar nicht mehr linear ausgeführt werden.

C. Formen fünften Grades.

Die Form a_x^5 bestehe aus den Punkten 1 2 3 4 5. Ich denke die beiden Punktreihen construirt, welche die beigeordnete Curve K der biquadratischen Form (1 2 3 4) erzeugen. Alsdann kann ich zu jeder durch 5 gehenden Geraden 5σ den Pol p_σ in Bezug auf K, wie unter B. I construiren, oder was dasselbe ist, denjenigen Punkt herstellen, dessen Büschel die zu 5σ auf (1 2 3 4) gehörige Involution auf S ausschneidet.

Diese Punkte p_σ bilden eine Punktreihe, welche zu derjenigen projectivisch ist, die man erhält, wenn man die Tangente in 5 durch t_σ schneidet und den Punkt σ auf S variirt; das Erzeugniss beider Reihen ist aber nach Satz 13 die zu 5 innerhalb der beigeordneten Schaar von (1 2 3 4 5) gehörige Curve 2ter Classe K_5. Ohne diese selbst herzustellen kann man nunmehr, wie unter B, zu jeder Geraden v den Pol in Bezug auf K_5 linear construiren. Das will, wenn v den Kegelschnitt S in den Punkten $\varrho\,\sigma$ schneidet, sagen, dass man zu jedem Punktepaar $\varrho\,\sigma$ die Gesammtheit der Punktepaare herstellen kann, welche $\varrho\,\sigma\,5$ zu einem Element der G_5^5 ergänzen. Man kann also überhaupt innerhalb der zu a_x^5 conjugirten G_5^5 alle Elemente construiren, welche den Punkt 5 selbst enthalten. Hierbei war der Punkt 5 bevorzugt worden, und indem man analog mit 4 verfährt, ist man im Stande, alle diejenigen Elemente der G_5^5 herzustellen, welche den Punkt 4 enthalten. Um nun die zu 3 beliebigen Punkte I, II, III innerhalb der G_5^5 gehörige G_2^5 zu construiren, suche man, was nach dem Gesagten sofort ausführbar ist, den Punkt:

α welcher I II III 5

und

β welcher I II III 4

zu je einem Element der Gruppe ergänzt. Der Schnittpunkt der Geraden $5\alpha - 4\beta$ ist sodann der Punkt, dessen Strahlbüschel die gesuchte G_2^2 auf S ausschneidet.

Die zu a_x^5 apolaren Formen 4ten Grades bilden nach Satz VI der Einleitung eine G_4^3. Um 2 Punkte $\varrho\,\sigma$ zu einem Element derselben zu ergänzen, hat man nur die beiden G_2^2 zu construiren, welche resp. $\varrho\,\sigma\,5$ und $\varrho\,\sigma\,4$ innerhalb der zu a_x^5 conjugirten G_5^5 zugehören. Das gemeinsame Element $\tau\,\omega$ beider G_2^2 bildet mit $\varrho\,\sigma$ zusammen ein Element der erwähnten G_3^4. Das Quadrupel $\tau\,\omega\,\varrho\,\sigma$ wird alsdann nämlich von 2 verschiedenen Punkten (4 und 5) mithin von allen Punkten von S überhaupt zu einem Element der G_5^5 ergänzt. Aus Satz 9 folgt, dass jedes ein Quadrupel der G_3^4 enthaltende Geradenpaar zu der ganzen beigeordneten Curvenschaar von a_x^5 conjugirt ist.

Ueberdies giebt es nach Satz VI *eine* Form dritten Grades, welche zu a_x^5 apolar ist. Sind $\lambda\,\mu\,\nu$ die 3 Punkte derselben, so müssen sie durch jeden Punkt zu einer Form 4ten Grades ergänzt werden, die zu a_x^5 apolar ist und mithin der vorerwähnten G_4^3 angehört. Nach dem, was eben gesagt wurde, muss also

jede durch ν gehende Gerade mit $\overline{\lambda\,\mu}$ zusammen,
jede durch μ gehende Gerade mit $\overline{\lambda\,\nu}$ zusammen,
jede durch λ gehende Gerade mit $\overline{\mu\,\nu}$ zusammen

je ein conjugirtes Geradenpaar der ganzen beigeordneten Schaar von a_x^5 liefern. Jeder der 3 Punkte $\lambda\,\mu\,\nu$ ist mithin Pol der Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf alle Curven der Schaar oder mit andern Worten: Das Dreiseit mit den Ecken $\lambda\,\mu\,\nu$ ist das gemeinsame Polardreiseit aller Curven der beigeordneten Schaar.

Wie nach Massgabe des Vorhergehenden die Construction der zu 2 Formen 5ten Grades conjugirten Formen zu geschehen hat, bedarf keiner näheren Auseinandersetzung.

D. Construction der conjugirten Formen einer Form $2n$ten Grades a_x^{2n} $(n > 2)$ unter der Voraussetzung: dass die Aufgabe gelöst sei, die conjugirte G_{2n-1}^{2n-1} einer beliebigen Form $(2n-1)$ten Grades zu construiren.

Die Form a_x^{2n} bestehe aus den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Ich will die binäre Form der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ mit b_x^{2n-1} bezeichnen. Die letztere besitzt eine beigeordnete Schaar von Curven $(n-1)$ter Classe, welche den Punkten von S in der Art zugeordnet ist, dass dem Punkte σ die Curve K_σ der Schaar entspricht. Da ich alle con-

jugirten Formen von b_x^{2n-1} construiren kann, so bin ich in der Lage, zu jeder einzelnen Curve K_σ sämmtliche conjugirte $(n-1)$-Seite anzugeben. Ich ziehe nunmehr die Tangente t_{2n} im Punkte a_{2n} und bestimme den Schnittpunkt s derselben mit der Tangente in σ. Der Punkt s und die Curve K_σ sind alsdann einander eindeutig zugeordnet, und indem ich σ variire, erhalte ich 2 projectivische Reihen, deren Erzeugniss nach Satz 12 die Curve $a_\lambda^n a_\mu^n = 0$ ist. Um nunmehr alle n-Seite der letztgenannten Curve, d. h. alle zu a_x^{2n} conjugirten Formen zu construiren, hat man nur auf die (für $\overline{n-1}$ an Stelle von n ausgesprochene) Aufgabe 14 zurückzugehen, deren 2 Voraussetzungen hier erfüllt sind (die eine nach der eben angestellten Betrachtung, die andere weil oben $n > 2$ angenommen wurde), und deren Lösung bereits bekannt ist.

E. Construction der zu einer Form $(2n+1)$ten Grades a_x^{2n+1} conjugirten Formen $(n>2)$.

Indem ich die unter D gemachte Voraussetzung festhalte, bin ich vermöge des Obigen in der Lage, zu jeder Form $2n$ten Grades sämmtliche conjugirte Formen zu construiren.

Nun bestehe die vorgelegte Form a_x^{2n+1} aus den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$. Ich bezeichne die binäre Form der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ mit b_x^{2n}, die derselben beigeordnete Curve ist alsdann $b_\lambda^n b_\mu^n = 0$. Da ich alle conjugirten Formen von b_x^{2n} construiren kann, so bin ich im Stande, sämmtliche conjugirte n-Seite von $b_\lambda^n b_\mu^n = 0$ anzugeben, oder mit anderen Worten: Wenn v eine Gerade und Π die erste Polare derselben in Bezug auf $b_\lambda^n b_\mu^n = 0$ ist, so kann ich alle conjugirten $(n-1)$-Seite dieser Curve Π linear construiren.

Ich verbinde nunmehr den Punkt a_{2n+1} mit allen Punkten σ von S, denke die erste Polare K_σ der Geraden σa_{2n+1} in Bezug auf $b_\lambda^n b_\mu = 0$ hergestellt und bestimme den Schnittpunkt σ von t_σ mit der Tangente in a_{2n+1}. s und K_σ sind alsdann eindeutig zugeordnet, und indem man σ variirt, erhält man 2 projectivische Reihen, deren Erzeugniss eine Curve K ist. Da ich, wie schon bemerkt, zu jeder Curve K_σ sämmtliche conjugirte $(n-1)$-Seite herstellen kann, so sind die Voraussetzungen der (für $\overline{n-1}$ an Stelle von n auszusprechenden) Aufgabe 14 erfüllt und ich kann demnach sämmtliche conjugirte n-Seite von K construiren. K ist aber nach Satz 13 diejenige Curve, welche innerhalb der beigeordneten Schaar von a_x^{2n+1} dem Punkte a_{2n+1} zugehört. Ich kann also sämmtliche Elemente derjenigen $G_{2\,n}^{2\,n}$ construiren, welche innerhalb der zu a_x^{2n+1} conjugirten $G_{2\,n+1}^{2\,n+1}$ dem Punkte

a_{2n+1} zugehört, d. h. ich kann alle diejenigen zu a_x^{2n+1} conjugirten Formen linear herstellen, welche den Punkt a_{2n+1} enthalten.

Auf demselben Wege aber ist es mir möglich, alle diejenigen conjugirten Formen zu construiren, welche den Punkt a_{2n} enthalten.

Um nunmehr die zu $(2n-1)$ beliebigen Punkte $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{2n-1}$ innerhalb der conjugirten G_{2n+1}^{2n+1} gehörige G_2^2 herzustellen, verfahre ich folgendermassen: Ich bestimme, was nach dem Vorhergehenden sofort ausführbar ist:

den Punkt ϱ_{2n}, welcher $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{2n-1}\, a_{2n}$ und

den Punkt ϱ_{2n+1}, welcher $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{2n+1}\, a_{2n+1}$ zu einem Element der G_{2n+1}^{2n+1} ergänzt. Alsdann sind $(\varrho_{2n}\, a_{2n})$, $(\varrho_{2n+1}\, a_{2n+1})$ Punktepaare der gesuchten G_2^2 und der Schnittpunkt der Verbindungslinien dieser Paare ist derjenige Punkt, dessen Büschel die erwähnte Involution auf S ausschneidet.

Nach dem soeben unter D Gesagten kann folgendes Resultat ausgesprochen werden:

„*Die Aufgabe, die zu einer Form iten Grades conjugirten Formen linear zu construiren, kann für $i=2n$, $i=2n+1$ (sobald $n>2$) als erledigt angesehen werden, sobald sie für $i=2n-1$ gelöst ist. Da dies aber nach C für $n=3$ in der That der Fall ist, so ist die Aufgabe allgemein gelöst.*"

§ 7.

Allgemeine Sätze über projectivische Erzeugung conjugirter und apolarer Curven.

Die projectivische Erzeugung der beigeordneten Curven, wie sie durch die Sätze 12 und 13 gegeben wird, gewinnt ein weitergehendes Interesse durch die merkwürdige Beziehung, in der die beiden auftretenden projectivischen Reihen: die Punktreihe und die Curvenschaar zu einander stehen. Bei der im Satz 13 erörterten Erzeugungsart entsteht die auftretende Schaar aus der Punktreihe, indem man zu jedem Punkte der Letzteren die Polare in Bezug auf eine bestimmte Curve 2ter Ordnung (nämlich den Kegelschnitt S) und zu jeder dieser Polaren wiederum die erste Polare in Bezug auf eine gewisse Classencurve aufsucht.

Man kann nun allgemeiner eine Curve $p$ter Ordnung C^p $(a_x^p=0)$ und eine Curve $q$ter Classe K^q $(u_\alpha^q=0)$ gegeben denken: jede Curve $r$ter Classe $u_\mathfrak{z}^r=0$ besitzt alsdann (wofern $r<p$ ist) eine bestimmte Curve $(p-r)$ter Ordnung als Polare (cfr. Einleitung X) in Bezug C^p und diese Curve $(p-r)$ter Ordnung bestimmt wiederum (wofern

$p - r < q$ ist) eine gewisse Curve $(q - p + r)$ter Classe als Polare in Bezug auf K^q. Die letztgenannte Classencurve hat die Gleichung:

$$(24) \qquad 0 = a_\vartheta^r \, a_\alpha^{p-r} \, u_\alpha^{q-p+r}$$

und ich will sie als „correspondirende" Curve von u_ϑ^r in Bezug auf die beiden festen Curven bezeichnen.

Setzt man für $u_\vartheta^r = 0$ der Reihe nach die Curven einer Schaar:

$$(24\text{a}) \qquad 0 = \varkappa u_\vartheta^r + \lambda u_\eta^r$$

so bildet die Reihe der correspondirenden Curven eine zu jener Schaar projectivische Schaar von Curven $(q - p + r)$ter Classe:

$$(24\text{b}) \qquad 0 = \varkappa a_\vartheta^r \, a_\alpha^{p-r} \, u_\alpha^{q-p+r} + \lambda a_\eta^r \, a_\alpha^{p-r} \, u_\alpha^{q-p+r}.$$

Das Erzeugniss dieser beiden projectivischen Reihen hat zur Gleichung das Eliminationsresultat von $\varkappa$ und λ aus (24a) und (24b):

$$(25) \qquad 0 = u_\omega^{q-p+2r} \equiv \begin{vmatrix} u_\vartheta^r & u_\eta^r \\ a_\vartheta^r & a_\eta^r \end{vmatrix} a_\alpha^{p-r} \, u_\alpha^{q-p+r}.$$

Diese Curve geht, wenn $q - p + r = p - r$, d. h.

$$q = 2p - 2r$$

gesetzt wird, in eine Curve der $p$ten Classe über, und ihre Gleichung wird alsdann dargestellt durch:

$$(26) \qquad 0 = u_\omega^p \equiv \begin{vmatrix} u_\vartheta^r & u_\eta^r \\ a_\vartheta^r & a_\eta^r \end{vmatrix} a_\alpha^{p-r} \, u_\alpha^{p-r}.$$

Bezeichnet nun b ein mit a gleichwerthiges Symbol und setzt man in die rechte Seite von (26) $u_i = b_i$ so ergiebt sich ein Ausdruck, der bei Vertauschung von a und b nur das Vorzeichen ändert; mithin ist:

$$b_\omega^p = 0.$$

Daraus folgt der *Satz:*

19. *Liegt eine Curve pter Ordnung und eine Curve* $(2p - 2r)$*ter Classe vor und construirt man in Bezug auf diese beiden zu einer Schaar von Curven rter Classe die Schaar der „correspondirenden" Curven, so ist das Erzeugniss dieser beiden projectivischen Schaaren eine Curve pter Classe, die zu der gegebenen Curve pter Ordnung conjugirt ist.*

Für $p = 2$ und $r = 1$ hat man eine Curve 2ter Ordnung C^2 und eine Curve 2ter Classe K^2 festzulegen und zunächst zu den Punkten $p_1, p_2, \ldots$ einer Punktreihe die Polaren $g_1, g_2, \ldots$ in Bezug auf C^2 herzustellen, welche ein Strahlbüschel bilden. Die Pole von $g_1, g_2, \ldots$ in Bezug auf den Kegelschnitt K^2 bilden alsdann eine Punktreihe $q_1, q_2, \ldots$ und das Erzeugniss der projectivischen Punktreihen p und q ist zu C^2 conjugirt. Daraus folgt, dass, wenn man zu den Strahlen

eines Strahlbüschels $(g_1, g_2, \ldots)$ die Pole in Bezug auf 2 Kegelschnitte C^2 und K^2 construirt, das Erzeugniss der entstehenden projectivischen Punktreihen, als Classencurve aufgefasst, zu C^2 als Ordnungscurve conjugirt ist. Da aber bei dieser Betrachtungsweise K^2 ganz dieselbe Rolle spielt wie C^2, so folgt, dass auch K^2, sobald es als Ordnungscurve angesehen wird, zu dem erzeugten Kegelschnitt conjugirt ist; es ergiebt sich demnach der *Satz:*

19a. *Hat man 2 Kegelschnitte C_1 und C_2 und construirt man zu den Strahlen eines Strahlenbüschels die Pole sowohl in Bezug auf C_1 als auch in Bezug auf C_2, so erhält man 2 projectivische Punktreihen. Das Erzeugniss K^1 derselben ist als Curve 2ter Classe zu C_1 und C_2 conjugirt.*

Ich füge folgenden geometrischen Beweis dieses Satzes hinzu:

Wenn y das Centrum des Strahlbüschels ist, so sind die Träger der beiden Punktreihen die Polaren $v_1\, v_2$ von y in Bezug auf C_1 resp. C_2 und jeder durch y gehenden Geraden X entspricht auf v_1 der Punkt x_1 als Pol von X in Bezug auf C_1 und auf v_2 der Punkt x_2 als Pol von X in Bezug auf C_2, so dass $(X, y x_1)$ ein conjugirtes Geradenpaar von C_1 und $(X, y x_2)$ ein ebensolches für C_2 ist.

Man verbinde nun beide Punktreihen mit y und suche die Doppelelemente der erhaltenen concentrischen projectivischen Büschel, d. h. die von y an K^1 gehenden Tangenten. Sind x_1 und x_2 2 entsprechende Punkte, die mit y in gerader Linie liegen, so ist die Gerade $x_1 x_2 = x_1 y = x_2 y$ ein Doppelelement; ich behaupte, dass alsdann X das 2te Doppelelement ist. In der That muss der Pol der Geraden $x_1 x_2$ in Bezug auf C_1 auf X liegen, und da er überdies auf v_1 liegen muss, mit $(X - v_1)$ identisch sein; ebenso ist $(X - v_2)$ der Pol der Geraden $x_1 x_2$ in Bezug auf C_2. Die Pole dieser Geraden liegen demnach mit y in gerader Linie und ihre Verbindungslinie X ist ein Doppelelement, wie behauptet wurde.

Wird also die eine der von y an K^1 gelegten Tangenten mit X bezeichnet, so ist die andere die Gerade $X^1 = y x_1 = y x_2$. Da aber, wie oben gezeigt $(X, y x_1)$, und $(X, y x_2)$ conjugirte Geradenpaare resp. von C_1 und C_2 sind, und y den Pol von v_1 in Bezug auf C_1 darstellt, so sieht man, dass $X X^1 v_1$ ein Polardreieck von C_1 ist. Ebenso bilden die Geraden $X X^1 v_2$ ein Polardreiseit von C_2. Da aber beide Dreiseite der Curve K^1 umschrieben sind, so folgt, dass K^1 in der That sowohl zu C_1 als zu C_2 conjugirt ist.

Ich kehre nunmehr zu der Gleichung (25) zurück. Die Curve, die sie repräsentirt, war das Erzeugniss einer Schaar von Curven $r$ter Classe und der ihr „correspondirenden" Schaar unter Zugrundelegung 2er beliebigen Curven von resp. $p$ter Ordnung und $q$ter Classe. Ich will nunmehr $r = 1$ annehmen. Die Curve (25) geht alsdann über in:

$$(27)\qquad 0 = u_\omega^{q-p+2} \equiv \begin{vmatrix} u_\vartheta & u_\eta \\ a_\vartheta & a_\eta \end{vmatrix} a_\alpha^{p-1}\, u_\alpha^{q-p+1}.$$

Sobald $q - p + 2 > p$ ist, folgt für beliebiges v und u die Identität:

$$(28)\quad v_\omega^p u_\omega^{q-2p+2} = \varrho \begin{vmatrix} v_\vartheta & v_\eta \\ a_\vartheta & a_\eta \end{vmatrix} a_\alpha^{p-1} v_\alpha^{p-1} u_\alpha^{q-2p+2} + \sigma \begin{vmatrix} u_\vartheta & u_\eta \\ a_\vartheta & a_\eta \end{vmatrix} a_\alpha^{p-1} v_\alpha^p u_\alpha^{q-2p+1}$$

wobei ϱ und σ gewisse Zahlenfactoren bedeuten. Ist nun wiederum b ein mit a gleichwerthiges Symbol und setzt man $v_i = b_i$, so geht der erste Term der rechten Seite in einen Ausdruck über, der bei Vertauschung von a und b nur sein Zeichen wechselt, und also identisch verschwindet. Es folgt demnach die Identität in u:

$$(28\text{a})\qquad b_\omega^p u_\alpha^{q-2p+2} \equiv \sigma \begin{vmatrix} u_\vartheta & u_\eta \\ a_\vartheta & a_\eta \end{vmatrix} a_\alpha^{p-1} b_\alpha^p u_\alpha^{q-2p+1}.$$

Man bemerke aber, dass die rechte Seite dieser Gleichung aus dem Ausdruck (27) für u_ω^{q-p+2} hervorgeht, indem man dort u_α^q durch $b_\alpha^p u_\alpha^{q-p}$ ersetzt, und dass die linke Seite die Polare von $b_x^p = 0$ in Bezug auf $u_\omega^{q-p+2} = 0$ vorstellt. Es folgt aus Alledem der *Satz:*

20. *Wenn man eine beliebige Curve pter Ordnung C^p und eine beliebige Curve qter Classe K^q zu Grunde legt (wobei $q > 2p - 2$ sein soll) und zu den Punkten einer Punktreihe die Schaar der ihnen in Bezug auf C^p und K^q correspondirenden Curven construirt, so ist das Erzeugniss jener Punktreihe und dieser zu ihr projectivischen Schaar eine bestimmte Curve $(q - p + 2)$ter Classe. Die Polare von C^p in Bezug auf das Erzeugniss ist identisch mit dem analogen Erzeugniss, welches erhalten wird, wenn man K^q durch die Polare von C^p in Bezug auf K^q ersetzt.*

Wenn indessen die Curve C^p zu K^q apolar ist, d. h. wenn $b_\alpha^p u_\alpha^{q-p}$ für jedes u verschwindet, so wird die rechte Seite von (28a) und mithin auch die linke für jedes Werthsystem der u annulirt, d. h. es sind auch u_ω^{q-p+2} und C^p zu einander apolar und es folgt:

21. *Wenn man eine beliebige Curve pter Ordnung C^p und eine zu ihr apolare Curve qter Classe K^q zu Grunde legt (wobei $q > 2p - 2$ sein muss), so ist das Erzeugniss irgend einer Punktreihe und der ihr in Bezug auf C^p und K^q correspondirenden Schaar eine Curve $(q - p + 2)$ter Classe, welche zu C^p apolar ist.*

Man überzeugt sich leicht, dass der wesentliche Inhalt des Satzes 13 ein specieller Fall desjenigen Satzes ist, der für $p = 2$ aus 21 hervorgeht, und der sich auch in einer dem Theorem 19a ähnlichen Form folgendermassen aussprechen lässt:

21a. *Hat man einen Kegelschnitt C^2 und eine zu C^2 apolare*

Curve qter Classe K^q, und construirt man zu den Strahlen eines Strahlbüschels die Pole in Bezug auf C^2 und die ersten Polaren in Bezug auf K^q, so ist das Erzeugniss der erhaltenen projectivischen Punktreihe und Curvenschaar eine Curve qter Classe, die zu C^2 apolar ist.

Aus der Ableitung der Sätze 19—21 ist klar, dass dieselben sich unmittelbar auf räumliche Verhältnisse übertragen lassen, indem man überall für Curve das Wort „Fläche", für Gerade aber „Ebene" substituirt; die Anführung dieser Sätze, ebenso wie der dual gegenüberstehenden kann demnach unterlassen werden.

§ 8.

Die apolaren Flächen einer cubischen Raumcurve als „beigeordnete Flächen" der binären Formen auf derselben. — Eigenschaften der beigeordneten Flächen conjugirter Formen.

Alles, was ich im Vorhergehenden für die binären Formen auf einem Kegelschnitt abgeleitet habe, findet sein genaues Analogon bei Betrachtung binärer Formen auf einer beliebigen Raumcurve dritter Ordnung C_3. Durch Beziehung auf ein geeignetes Coordinatensystem kann bekanntlich stets bewirkt werden, dass die Coordinaten der Punkte der C_3 sich als Functionen 2er homogener Parameter darstellen durch die Gleichungen:

$$(29) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varkappa_1^3 : \varkappa_1^2 \varkappa_2 : \varkappa_1 \varkappa_2^2 : \varkappa_2^3.$$

Soll alsdann u die Verbindungsebene der Punkte $(\lambda_1 \lambda_2)$, $(\mu_1 \mu_2)$, $(\nu_1 \nu_2)$ sein, so müssen diese Parameterpaare Wurzeln der Gleichung:

$$0 = u_1 \varkappa_1^3 + u_2 \varkappa_1^2 x_2 + u_3 \varkappa_1 \varkappa_2^2 + u_4 \varkappa_2^3$$

vorstellen, d. h. die Grössen u müssen den elementarsymmetrischen Functionen von $\lambda\, \mu\, \nu$ proportional sein, welche ich der Reihe nach mit $(\lambda\mu\nu)_1$, $(\lambda\mu\nu)_2$, $(\lambda\mu\nu)_3$, $(\lambda\mu\nu)_4$ bezeichnen will, so dass:

$$(30) \qquad \begin{aligned} u_1 : u_2 : u_3 : u_3 &= \lambda_2\mu_2\nu_2 : -(\lambda_2\mu_2\nu_1 + \lambda_2\nu_2\mu_1 + \mu_2\nu_2\lambda_1) \\ &\quad : (\lambda_2\mu_1\nu_1 + \mu_2\lambda_1\nu_1 + \nu_2\lambda_1\mu_1) : -\lambda_1\mu_1\nu_1 \\ &= (\lambda\mu\nu)_1 : (\lambda\mu\nu)_2 : (\lambda\mu\nu)_3 : (\lambda\mu\nu)_4. \end{aligned}$$

Daraus folgt wiederum, dass jede ganze homogene symmetrische Function von $\lambda\, \mu\, \nu$ als die linke Seite der Gleichung einer Classenfläche angesehen werden kann, sobald man von den Gleichungen (30) Gebrauch macht.

Des Folgenden wegen mögen einige Gleichungsformen dieser Art hervorgehoben werden:

Sind $\varrho\, \sigma\, \tau$ irgend 3 Punkte der C_3, so ist

$$(31) \qquad 0 = \Sigma(\varrho\lambda)(\sigma\mu)(\tau\nu)$$

wenn die Summe auf alle Vertauschungen von $\lambda\,\mu\,\nu$ sich erstreckt, die Gleichung des Schnittpunktes der Osculationsebenen von $\varrho\,\sigma\,\tau$ (d. h. des Pols der Ebene $\varrho\,\sigma\,\tau$ in Bezug auf C_3) wie man sofort bestätigt, indem man $\lambda = \mu = \nu = \varkappa$ setzt. Speciell ist demnach:

$$(31\text{a})\qquad 0 = \Sigma(\varrho\lambda)(\sigma\mu)(\sigma\nu)$$
$$= 2[(\varrho\lambda)(\sigma\mu)(\sigma\nu) + (\varrho\mu)(\sigma\lambda)(\sigma\nu) + (\varrho\nu)(\sigma\mu)(\sigma\lambda)$$

die Gleichung des Punktes, in dem die Osculationsebene von ϱ von der Tangente σ getroffen wird, weil bekanntlich die Tangente eines Punktes als Schnittlinie 2er unendlich benachbarter Osculationsebenen angesehen werden darf.

Ich gehe nun dazu über, die Flächen $n$ter Classe zu betrachten, welche zu der Gesammtheit der durch die cubische Raumcurve gehenden Flächen $n$ter Ordnung conjugirt sind und werde zeigen, dass sie eine den apolaren Curven eines Kegelschnitts analoge Bedeutung haben; ich will eine solche Fläche daher auch als **eine zu der C_3 apolare Fläche** bezeichnen.

Wenn $c_x^n \equiv (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4)^n = 0$ eine Fläche sein soll, die durch die C_3 hindurchgeht, so ist nach (29) hierzu nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung:

$$(32)\qquad 0 = (c_1\varkappa_1^{\,3} + c_2\varkappa_1^{\,2}\varkappa_2 + c_3\varkappa_1\varkappa_2^{\,2} + c_4\varkappa_2^{\,3})^n$$

für jedes $\varkappa_1\,\varkappa_2$ besteht. Aus dieser Identität können andere durch Polarenbildung abgeleitet werden; ist eine solche:

$$(33)\qquad 0 = f(c_1\,c_2\,c_3\;\varkappa)$$

und setzen wir:

$$(34)\qquad c_1 = (\lambda\mu\nu)_1,\quad c_2 = (\lambda\mu\nu)_2,\quad c_3 = (\lambda\mu\nu)_3,\quad c_4 = (\lambda\mu\nu)_4$$

in die rechte Seite von (33) ein, so stellt das Resultat, gleich Null gesetzt:

$$(35)\qquad 0 = f[(\lambda\mu\nu)_1,\,(\lambda\mu\nu)_2,\,(\lambda\mu\nu_3),\,(\lambda\mu\nu)_4,\,\varkappa]$$

für jeden wirklichen und symbolischen Werth von $\varkappa_1\,\varkappa_2$ eine Classenfläche dar, die nach Gleichung (33) zu der Raumcurve apolar ist. Aber auch hier können wir die Operationen, welche auf (35) geführt haben, in umgekehrter Reihenfolge ausführen und auf (32) zuerst die Substitution (34) und dann die Polarenbildung anwenden. Da aber die rechte Seite von (32) durch die Substitution (34) in $(\varkappa\lambda)^n(\varkappa\mu)^n(\varkappa\nu)^n$ übergeht, so folgt das zu Satz 1 analoge Theorem:

22. *Wenn man aus $(\varkappa\lambda)^n(\varkappa\mu)^n(\varkappa\nu)^n$ durch Differentiation oder Polarenbildung nach $\varkappa$ eine Form $f(\varkappa\;\lambda\mu\nu)$ abgeleitet hat, so stellt diese, sobald $u_i = (\lambda\mu\nu)_i$ gesetzt wird, für jeden wirklichen oder symbolischen Werth von $\varkappa$ eine zu C_3 apolare Fläche dar.*

Ist demnach $a_\varkappa^{3n}$ eine beliebige binäre Form $3n$ten Grades, und

führt man $\varkappa_1 = a_2 \varkappa_2 = - a_1$ in den Ausdruck $(\varkappa\lambda)^n (\varkappa\mu)^n (\varkappa\nu)^n$ ein, so ergiebt sich:

$$a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0 \tag{36}$$

als Gleichung einer zu C_3 apolaren Fläche $n$ter Classe, welche die Osculationsebenen in den Punkten der binären Form $a_\varkappa^{3n}$ berührt.

Da jede Fläche $c_x^n = 0$, welche die Raumcurve enthält, der Identität (32), also $(3n + 1)$ linearen Bedingungen und nur diesen zu genügen hat, so bilden alle Flächen dieser Eigenschaft eine

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 3n - 1\right]\text{-}$$

gliedrige Gruppe. Dieser steht demnach eine $(3n + 1)$-gliedrige Gruppe von Classenflächen als conjugirte Gruppe gegenüber, in der offenbar alle zu C_3 apolaren Flächen und nur diese enthalten sind. Daraus folgt, dass eine zu der C_3 apolare Fläche $n$ter Classe durch $3n$ weitere Bedingungen vollständig festgelegt ist.

Wird insbesondere gefordert, dass eine Fläche $n$ter Classe zu C_3 apolar sein und die Osculationsebenen in $3n$ bestimmten Punkten der Curve berühren soll (deren binäre Form durch $a_\varkappa^{3n}$ bezeichnet werde), so kann in vollständiger Uebereinstimmung mit der auf Seite 9 angewandten Methode gezeigt werden, dass die $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 1$ linearen Bedingungsgleichungen, welchen die Coefficienten der Fläche alsdann unterworfen sind, niemals von einander abhängig sein können, wie immer auch $a_\varkappa^{3n}$ beschaffen sein möge:

Es giebt demnach stets eine und nur eine Fläche $n$ter Classe, die zu C_3 apolar ist und die Osculationsebenen in den Punkten einer gegebenen binären Form $a_\varkappa^{3n}$ berührt. Ich nenne sie die „beigeordnete" Fläche der Form. Ihre Gleichung ist durch $a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0$ gegeben.

Man kann nunmehr folgende den Theoremen 2, 4 und 5 analogen Sätze beweisen:

23. *Die erste Polare einer Ebene $\varrho\sigma\tau$ in Bezug auf $a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0$ ist identisch mit der beigeordneten Fläche von $a_\varrho a_\sigma a_\tau a_\varkappa^{3n-3}$.*

24. *Haben wir $3n$ Punkte der C_3, deren binäre Form zu $a_\varkappa^{3n}$ conjugirt ist, so ist jede durch diese Punkte gehende Fläche $n$ter Ordnung zu $a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0$ conjugirt.*

25. *Wenn durch $3n$ Punkte der C_3 eine Fläche $n$ter Ordnung gelegt werden kann, die zu $a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0$ conjugirt ist, so hat jede durch diese Punkte gehende Fläche dieselbe Eigenschaft und die binäre Form der $3n$ Punkte ist zu $a_\varkappa^{3n}$ conjugirt.*

Der Beweis dieser Sätze ist dem Beweise der entsprechenden Sätze für die Ebene ganz analog.

Auch hier kann jeder Form $3n$ten Grades nicht nur eine Classen-, sondern auch eine Ordnungsfläche beigeordnet werden; nämlich diejenige Ordnungsfläche, welche durch die $3n$ Punkte der Form hindurchgeht und zu der C_3 als Classencurve apolar, d. h. zu allen denjenigen Flächen $n$ter Classe conjugirt ist, welche sämmtliche Osculationsebenen der C_3 berühren. Aus dieser Bemerkung folgt, dass die Sätze 24 und 25 auch folgendermassen ausgesprochen werden können:

24a. *Haben wir 2 conjugirte binäre Formen $3n$ter Ordnung, so ist die beigeordnete Ordnungsfläche der einen zur beigeordneten Classenfläche der andern conjugirt.*

25a. *Wenn 2 binäre Formen $3n$ter Ordnung so beschaffen sind, dass die beigeordnete Ordnungsfläche der einen zur beigeordneten Classenfläche der andern conjugirt ist, so sind die binären Formen selbst conjugirt.*

Um ein dem Satz 7 entsprechendes Theorem su erhalten, bemerke man, dass jeder G_p^{3n} von Formen eine G_{3n+1-p}^{3n} von conjugirten Formen gegenüber steht. Jeder Form der letzteren Gruppe ist eine Classenfläche beigeordnet und der so erhaltenen $(3n+1-p)$-gliedrigen Gruppe Γ von Flächen $n$ter Classe steht eine

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 3n - 1 + p\right]\text{-}$$

gliedrige Gruppe von Flächen $n$ter Ordnung gegenüber. Jede Fläche, welche dieser letzten Gruppe G angehört und die C_3 nicht in sich enthält, muss nach 25 ein Element der gegebenen G_p^{3n} ausschneiden; umgekehrt muss jede Fläche $n$ter Ordnung, welche durch die $3n$ Punkte eines Elements der G_p^{3n} hindurchgeht, zu allen Flächen von Γ conjugirt sein und mithin der Gruppe G angehören. Es folgt also:

26. *Haben wir auf der C_3 $(p+1)$ Formen derselben G_p^{3n} und legen wir durch die $3n$ Punkte einer jeden Form irgend eine Fläche $n$ter Ordnung, so bilden die so erhaltenen $(p+1)$ Flächen zusammen mit der Gruppe der die Raumcurve enthaltenden Flächen, nicht eine $\left[\binom{n+3}{3} - 3n - 1 + p + 1\right]$- sondern nur eine $\left[\binom{n+3}{3} - 3n - 1 + p\right]$-gliedrige Gruppe.*

Um schliesslich entsprechende Sätze für Formen $(3n+1)$ten Grades abzuleiten, muss man auf die ersten Polaren derselben und auf die beigeordneten Flächen dieser Polaren die Theoreme 24 und 25 in Anwendung bringen; desgleichen hat man bei Formen $(3n+2)$ten Grades die gemischten 2ten Polaren dieser Formen und ihre beigeordneten Flächen zu betrachten. Dadurch ergeben sich folgende Sätze:

27. *Zu jeder Form $(3n+1)$ten Grades a_x^{3n+1} gehört eine „beigeordnete" Flächenschaar $a_\sigma a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0$ derart, dass jedem Punkte σ der C_3 eine Fläche der Schaar zugehört. Ist die binäre Form von $(3n+1)$ Punkten zu a_x^{3n+1} conjugirt, so ist jede Fläche $n$ter Ordnung, welche durch $3n$ dieser Punkte geht, zu derjenigen Fläche der Schaar conjugirt, welche dem $(3n+1)$ten Punkte zugehört.*

28. *Wenn durch $3n$ Punkte* eine *Fläche gelegt werden kann, welche zu $a_\sigma a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0$ conjugirt ist, so hat jede durch diese Punkte gehende Fläche dieselbe Eigenschaft und die $3n$ Punkte, zusammen mit σ bilden eine binäre Form, die zu a_x^{3n+1} conjugirt ist.*

29. *Zu jeder Form $(3n+2)$ten Grades a_x^{3n+2} gehört ein „beigeordnetes" Flächengewebe $a_\sigma a_\tau a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0$ derart, dass irgend 2 Punkten $\sigma\tau$ der Raumcurve eine bestimmte Fläche des Gewebes zugehört. Ist die binäre Form von $(3n+2)$ Punkten zu a_x^{3n+2} conjugirt, so ist jede Fläche $n$ter Ordnung, welche durch $3n$ dieser Punkte hindurchgeht, zu derjenigen Fläche des Gewebes conjugirt, welche den beiden übrigen Punkten zugeordnet ist.*

30. *Wenn durch $3n$ Punkte eine Fläche gelegt werden kann, die zu $a_\sigma a_\tau a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0$ conjugirt ist, so bilden die $3n$ Punkte, mit $\sigma\tau$ vereinigt, eine binäre Form, die zu a_x^{3n+2} conjugirt ist.*

§ 9.

Projectivische Erzeugung der beigeordneten Flächen.

Eine weitere Anwendung des Satzes 22 führt mich auf Resultate, welche mit dem Inhalte der Sätze 12 und 13 correspondiren. Ich wende auf $\varphi = (x\lambda)^n (x\mu)^n (x\nu)^n$ die Operation $\varrho_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \varrho_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ an und erhalte:

$$(37)\quad \frac{1}{n}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\varrho_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\varrho_2\right\} = [(x\lambda)^{n-1}(x\mu)^{n-1}(x\nu)^{n-1}] \sum_3 (\varrho\lambda)(x\mu)[x\nu)$$

wobei die Zahl unter dem Summenzeichen die Anzahl der Summanden angiebt. Ist nun a_x^{3n-1} eine beliebige binäre Form $(3n-1)$ten Grades, und setze ich in (37) rechts $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$, so folgt aus Satz 22, dass

$$(38)\qquad a_\lambda^{n-1} a_\mu^{n-1} a_\nu^{n-1} \sum_3 (\varrho\lambda) a_\mu a_\nu = 0$$

die Gleichung einer zu C_3 apolaren Fläche ist, sobald $(\lambda\mu\nu)_i = u_i$ gesetzt wird. Offenbar ist es die der Form $(\varrho x)\, a_x^{3n-1}$ beigeordnete Fläche $n$ter Classe.

Die Gleichung (38) geht jedoch aus:

(39a) $$a_\lambda^{n-1}\, a_\mu^{n-1}\, a_\nu^{n-1}\, a_\sigma\, a_\tau = 0$$

hervor, sobald man die Identität in $x_1\, x_2$

$$(x\sigma)(x\tau) = \sum_3 (\varrho\lambda)(x\mu)(x\nu)$$

gelten lässt; d. h. wenn man annimmt, dass die 2 Gleichungen bestehen:

(39b) $$\sum_3 (\varrho\lambda)(\sigma\mu)(\sigma\nu) = 0,$$

(39c) $$\sum_3 (\varrho\lambda)(\tau\mu)(\tau\nu) = 0;$$

(38) ist also das Resultat der Elimination von $\sigma\tau$ aus 39a, b und c. Für $(\lambda\mu\nu)_i = u_i$ ist aber nach einer auf Seite 554 gemachten Bemerkung (39b) die Gleichung des Punktes, in dem die Osculationsebene von ϱ die Tangente in σ trifft und ebenso ist 39c der Schnittpunkt der Schmiegungsebene von ϱ mit der Tangente in τ. Da die Bedeutung von (39a) unmittelbar klar ist, so folgt:

31. *Wenn eine binäre Form* $(3n-1)$*ten Grades* a_x^{3n-1} *vorliegt, und wir fügen derselben einen beliebigen Punkt* ϱ *hinzu, so erhalten wir eine Form* $3n$*ten Grades, der eine bestimmte Fläche* n*ter Classe beigeordnet ist. Diese Fläche kann folgendermassen erhalten werden: Jeder Punkt* σ *bestimmt auf der Osculationsebene von* ϱ (O_ϱ) *einen Punkt* s*, als Schnittpunkt von* O_ϱ *mit der Tangente in* σ*; jedem Punktepaar* $\sigma\tau$ *gehört also eine bestimmte Gerade* st *in* O_ϱ *zu und umgekehrt gehört zu jeder Geraden in* O_ϱ *nur ein Punktepaar* $\sigma\tau$*. Zu jedem Paar* $\sigma\tau$ *gehört aber auch eine Fläche des der Form* a_x^{3n-1} *beigeordneten Gewebes. Jene Gerade* st *und diese Fläche sind also einander projectivisch zugeordnet*) und die Fläche* K *ist das Erzeugniss dieser projectivischen Gebilde, d. h. sie ist der Ort der Tangentialebenen, welche von jeder Geraden an die entsprechende Fläche gelegt werden können.*

Wenn eine Form $3n$ten Grades a_x^{3n} gegeben ist, so kann der eben ausgesprochene Satz auf die Form $a_\varrho\, a_x^{3n-1}$ angewandt werden und führt alsdann zur Erzeugung der Fläche, welche der Form $(\varrho x)\, a_\varrho\, a_x^{3n-1}$ beigeordnet ist, oder, was dasselbe sagt, der Fläche, welche dem Punkte ϱ innerhalb der beigeordneten Flächenschaar von $(\varrho x)\, a_x^{3n}$ zugehört. Bemerkt man überdies, dass das der Form $a_\varrho\, a_x^{3n-1}$ beigeordnete Gewebe $a_\varrho\, a_\sigma\, a_\tau\, a_\lambda^{n-1}\, a_\mu^{n-1}\, a_\nu^{n-1} = 0$ nach Satz 23 aus den ersten

*) „Zuordnung nach dem Typus der Reciprocität" cfr. Salmon-Fiedler, Geom. des Raumes. Th. II, S. 7.

Polaren der durch ϱ gehenden Ebenen in Bezug auf $a_\lambda^n a_\mu^n a_\nu^n = 0$ besteht, so folgt der *Satz:*

32. *Es sei eine binäre Form a_x^{3n} mit der beigeordneten Fläche K gegeben. Ist ϱ ein beliebiger Punkt der C_3, so ist der binären Form $(\varrho x)\, a_x^{3n}$ eine Flächenschaar beigeordnet und dem Punkte ϱ gehört eine bestimmte Fläche K_ϱ derselben zu. K_ϱ kann nun folgendermassen erhalten werden: Zu jedem Punktepaar $\sigma\tau$ der Curve gehört, wie unter 31 auseinandergesetzt wurde, eine Gerade der Ebene O_ϱ; weiterhin aber kann dem Paare $\sigma\tau$ diejenige Fläche $(n-1)$ter Ordnung zugeordnet werden, welche erste Polare der Ebene $\varrho\sigma\tau$ in Bezug auf K ist. Diese Fläche und jene Gerade sind projectivisch zugeordnet und das Erzeugniss der so entstehenden projectivischen Gebilde ist die Fläche K_ϱ.*

Wenn endlich eine Form $(3n+1)$ten Grades vorliegt, so muss man den Satz 32 für die erste Polare eines Punktes ϱ anwenden; man erhält alsdann:

33. *Es sei eine Form a_x^{3n+1} gegeben und K_ϱ sei diejenige Fläche, welche innerhalb der der Form beigeordneten Schaar dem Punkte ϱ zugehört. Innerhalb des der Form $(\varrho x)\, a_x^{3n+1}$ beigeordneten Gewebes möge dem 2fach gezählten Punkte ϱ die Fläche $\mathsf{K}_{\varrho\varrho}$ entsprechen. Diese Letztere kann folgendermassen erzeugt werden: Man ordne die dem Punktepaar $\sigma\tau$ auf O_ϱ zugehörige Gerade st der ersten Polaren der Ebene $(\varrho\sigma\tau)$ in Bezug auf K_ϱ zu; indem man alsdann $\sigma\tau$ variirt, erhält man 2 projectivisch zugeordnete Gebilde, deren Erzeugniss die Curve $\mathsf{K}_{\varrho\varrho}$ ist.*

Man kann auch hier, in Uebereinstimmung mit der entsprechenden Bemerkung für den Kegelschnitt, hervorheben, dass durch die 3 letzten Sätze die Construction der beigeordneten Flächen, Flächenschaaren und Gewebe im Princip erledigt ist. Nehmen wir nämlich an, dass man in der Lage sei, zu jeder Form $3n$ten Grades die beigeordnete Fläche zu construiren, so kann man nach Satz 32, wenn eine Form $(3n+1)$ten Grades a_x^{3n+1} vorliegt, zu jedem der $(3n+1)$ Punkte der Form diejenige Fläche herstellen, welche ihm innerhalb der beigeordneten Flächenschaar von a_x^{3n+1} zugehört. Dadurch ist aber zugleich die projectivische Beziehung zwischen den Punkten der Curve und den Flächen der Flächenschaar festgelegt, da $3n+1$ stets grösser als 3 ist; man kann also zu jedem Punkte der C_3 die zugehörige Fläche der Schaar construiren.

Da man nunmehr zu jeder Form $(3n+1)$ten Grades die beigeordnete Schaar und ihre Zuordnung zu den Punkten der C_3 bestimmen kann, so darf der Satz 33 in Anwendung gebracht werden; dieser führt zur Construction des beigeordneten Gewebes einer beliebigen Form $(3n+2)$ten Grades a_x^{3n+2}, da man in der Lage ist, zu

$(3n+2)$ Punktepaaren (nämlich den doppelt gezählten Punkten der Form selbst) die innerhalb des Gewebes zugehörigen Flächen zu construiren. Die eindeutige Beziehung zwischen den Punktepaaren der C_3 und den Flächen des Gewebes kann aber stets auf die reciproke Zuordnung 2er Ebenen zurückgeführt werden, und da $3n+2$ stets grösser als 4 ist, so ist auch jene Beziehung direct bestimmbar. Jetzt darf der Satz 31 benutzt werden, der die Construction derjenigen Fläche ergiebt, welche einer beliebigen Form $(3n+3)$ten Grades beigeordnet ist.

Man sieht also, dass man alle beigeordneten Flächen, Flächenschaaren und Flächengewebe von Formen höheren Grades herstellen kann, sobald man weiss, wie zu jeder Form $3n$ten Grades die beigeordnete Fläche zu construiren ist. Da man dies aber für $n=1$ in der That weiss, so ist die obige Behauptung erwiesen.

§ 10.

Hülfsaufgabe.

Die beigeordneten Flächen können, wie soeben gezeigt wurde, durch gewisse projectivische Reihen erzeugt werden. Die Zuordnung, welche dabei auftritt, ist von der Art, dass immer 2 Punkten einer Ebene E eine Fläche eines Gewebes und umgekehrt entspricht. Wenn daher alle Punkte der Ebene, resp. alle Flächen des Gewebes durch die Gleichungen:

$$(40a) \qquad u_A + \Lambda u_B + \mathrm{M} u_\Gamma = 0,$$

$$(40b) \qquad u_\alpha^n + \lambda u_\beta^n + \mu u_\gamma^n = 0$$

dargestellt werden, so muss irgend 2 Werthepaaren von Λ, M ein Werthepaar $\lambda\mu$ zugehören und umgekehrt, d. h. die Zuordnung der beiden Gewebe muss vermittelt werden durch eine Gleichung von der Form:

$$(a\Lambda + b\mathrm{M} + c)\,\lambda + (d\Lambda + e\mathrm{M} + f)\,\mu + (g\Lambda + h\mathrm{M} + k) = 0.$$

Die durch diese Zuordnung erzeugte Fläche, d. h. die Einhüllende der Tangentialebenen, welche von jedem Punktepaar, oder, was dasselbe ist, von jeder Geraden an die entsprechende Fläche gelegt werden können, hat demnach die Gleichung*):

$$(40) \qquad 0 = u_\delta^{n+1} \equiv \begin{vmatrix} a & b & c & u_\alpha^n \\ d & e & f & u_\beta^n \\ g & h & k & u_\gamma^n \\ u_A & u_B & u_\Gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

*) Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes. Th. II. S. 7.

Ich will, wenn $g_1 g_2 g_3 \ldots$ die Geraden der Ebene E und $K_1^n K_2^n K_3^n \ldots$ die entsprechenden Flächen des Gewebes bedeuten, das Erzeugniss dieser Zuordnung, also die Fläche (40) mit $(g - K^n)$ bezeichnen. Ausserdem soll, wenn K irgend eine Classenfläche ist, die Polare der Ebene v in Bezug auf K mit K_v bezeichnet werden.

Aus (40) ergiebt sich nun durch Polarenbildung die für jedes u und v giltige Gleichung:

$$(41)\qquad (n+1)\, u_\delta^n v_\delta = \begin{vmatrix} a & b & c & u_\alpha^n \\ d & e & f & u_\beta^n \\ g & h & k & u_\gamma^n \\ v_A & v_B & v_\Gamma & 0 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} a & b & c & u_\alpha^{n-1} v_\alpha \\ d & e & f & u_\beta^{n-1} v_\beta \\ g & h & k & u_\gamma^{n-1} v_\gamma \\ u_A & u_B & u_\Gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Die erste Determinante der rechten Seite stellt offenbar, gleich Null gesetzt, diejenige Fläche des Gewebes vor, welche der Schnittgeraden von E und v entspricht, und wir sehen also, dass diese Fläche, zusammen mit den Flächen $(g - K^n)_v$ und $(g - K_v^n)$ derselben Schaar angehört.

Aus dieser Bemerkung resultirt die Lösung der folgenden Aufgabe:

34. *Ein Gewebe von Flächen pter Classe* $(K_1^p K_2^p \ldots)$ *sei nicht selbst gegeben, aber es sei möglich, zu jeder einzelnen Fläche sämmtliche conjugirte p-Flache linear zu construiren*). Den Flächen des Gewebes seien die Geraden* $(g_1 g_2 \ldots)$ *einer Ebene E projectivisch zugeordnet. Es sollen sämmtliche conjugirte* $(p+1)$*-Flache von* $(g - K^p)$ *hergestellt werden.*

Ich nehme an, die Aufgabe sei für $p = n - 1$ gelöst. Um alsdann für den Fall $p = n$ den Punkt $(g - K^n)_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ d. h. die gemischte Polare der n Ebenen $u_1 u_2 \ldots u_n$ in Bezug auf die Fläche $(g - K^n)$ zu construiren, stelle ich folgende 2 Punkte her:

1) den Punkt $(g - K_{u_1}^n)_{u_2 \ldots u_n}$, welcher nach der eben gemachten Annahme linear construirbar ist;

2) den Polarpunkt von $u_2 \ldots u_n$ in Bezug auf diejenige Fläche des Gewebes, welche der Schnittgeraden (u_1, E) entspricht. Dieser Punkt ist nach den Voraussetzungen der Aufgabe selbst construirbar.

Der gesuchte Punkt $(g - K^n)_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ liegt nun nach dem Obigen auf der Verbindungslinie der Punkte (1) und (2). Aber diese Gerade wurde durch Hervorhebung von u_1 aus der Reihe der Ebenen $u_1 u_2 \ldots u_n$ erhalten; verfährt man ebenso mit u_2, so resultirt eine 2te Gerade, welche der ersten in dem gesuchten Punkte begegnet.

*) Darunter soll stets verstanden werden, dass man die gemischte Polare von irgend $(p-1)$ Ebenen in Bezug auf die Fläche linear construiren könne.

Die Aufgabe (34) ist demnach für $p = n$ gelöst, sobald man ihre Lösung für $p = n - 1$ kennt; sie ist also allgemein gelöst, weil die gewünschte Construction für $p = 1$ keine Schwierigkeit bietet. Für $n = 1$ geht nämlich die Gleichung (41) über in:

$$(42)\qquad 2u_\delta v_\delta = \begin{vmatrix} a & b & c & u_\alpha \\ d & e & f & u_\beta \\ g & h & k & u_\gamma \\ v_A & v_B & v_\Gamma & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & v_\alpha \\ d & e & f & v_\beta \\ g & h & k & v_\gamma \\ u_A & u_B & u_\Gamma & 0 \end{vmatrix} = u_x + u_X.$$

Ist demnach e die Ebene von $u_\alpha = 0$, $u_\beta = 0$, $u_\gamma = 0$, oder, was dasselbe ist, von $K_1^1 K_2^1 \ldots$, so liegt der Punkt $(g - K^1)_v$ auf der Geraden, welche den Punkt x, der (v, E) innerhalb e entspricht, mit dem Punkt X verbindet, der (v, e) innerhalb E zugehört. Aber weil:

$$u_z - u_X = 0$$

die Gleichung des Punktes z ist, in dem die Gerade xX von v getroffen wird, so ist der gesuchte Punkt $(g - K^1)_v$ der vierte harmonische des Punktes z in Bezug auf x und X.

Die Aufgabe 34 ist demnach für $p = 1$ gelöst und ihre allgemeine Lösung ist auf eine Reihenfolge bekannter Constructionen zurückgeführt.

§ 11.

Constructionen auf der cubischen Raumcurve.

A. Formen dritten Grades*).

I. Sind 1, 2, 3 die Punkte der binären Form a_x^3, so wird der der Form „beigeordnete“ Punkt (Fläche erster Classe) erhalten als Schnittpunkt der Ebene $O_1 O_2 O_3$, wenn O_ϱ allgemein die Osculationsebene des Punktes ϱ angiebt. Der beigeordnete Punkt, den ich mit p_{123} bezeichnen will, ist (nach Satz 24) Centrum des Bündels derjenigen Ebenen, welche C_3 in drei Punkten treffen, deren binäre Form zu a_x^3 conjugirt ist.

Als speciellen Fall hebe ich die im Folgenden zu benutzende Construction der ersten Polare eines Punktes ϱ in Bezug auf a_x^3 hervor: Man ziehe $\overline{\varrho p_{123}}$ und bestimme die 2 Tangenten, welche ausser der Tangente in ϱ dieser Geraden begegnen. Sind dieselben $t_\sigma t_\tau$ (wobei

*) **Sturm**, Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve. Crelle's Journal. Bd. 86. Vergl. auch die Abhandlungen von **Pitarelli** und **d'Ovidio** im „Giornale di matematiche“ vol. 17.

t_ϱ allgemein die Tangente des Punktes ϱ angiebt), so sind $\sigma\tau$ die Punkte der gesuchten ersten Polare.

II. Bestehen die beiden Formen $a_x^3 b_x^3$ resp. aus den Punkten (1 2 3) (I. II. III.), so ist die Verbindungslinie von p_{123} und $p_{I.\,II.\,III.}$ die Axe des Büschels, dessen Ebenen die Elemente der zu a_x^3 und b_x^3 conjugirten G_2^3 auf der Curve ausschneiden.

Wie alle Elemente einer durch 2 ihrer Formen gegebenen G_2^3 und einer durch 3 ihrer Formen gegebenen G_3^3 zu construiren sind, ist unmittelbar klar.

B. Vorbemerkungen für die folgenden Constructionen.

Wenn im Folgenden gesagt wird, dass „man eine G_n^n construiren könne", oder dass es „möglich sei, alle Elemente dieser G_n^n zu construiren", so soll (ebenso wie früher) darunter verstanden werden, dass die Aufgabe gelöst ist, zu irgend $(n-1)$ Punkten denjenigen Punkt zu finden, welcher sie zu einem Element der G_n^n ergänzt. Offenbar ist:

(1.) die Construction einer G_n^n ausgeführt, wenn man zu irgend $(n-3)$ Punkten die ihnen innerhalb der G_n^n zugehörige G_3^3 construiren kann; d. h. wenn man den Punkt angeben kann, dessen Ebenenbündel diese G_3^3 auf der Curve ausschneidet.

(2.) Man kann eine G_{3n+1}^{3n+1} construiren, sobald man die zu irgend 3 Punkten innerhalb derselben einzeln zugehörigen drei G_{3n}^{3n} construiren kann;

denn sind diese Punkte $\alpha\beta\gamma$, und will man die zu den beliebigen Punkten $\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{3n-2}$ gehörige G_3^3 ermitteln, so bestimme man, was nach der gemachten Annahme möglich ist:

irgend ein Punktepaar	$\alpha_1\alpha_2$	welches mit	$\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{3n-2}\alpha$	zusammen
irgend ein Punktepaar	$\beta_1\beta_2$	„ „	$\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{3n-2}\beta$	„
dto. dto.	$\gamma_1\gamma_2$	„ „	$\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{3n-2}\gamma$	„

je ein Element der G_{3n+1}^{3n+1} bildet. Da alsdann die Punktetripel $(\alpha\alpha_1\alpha_2)$ $(\beta\beta_1\beta_2)$ $(\gamma\gamma_1\gamma_2)$ der gesuchten G_3^3 angehören, so ist dieselbe vollständig bestimmt, und nach (1) ist also die Construction der G_{3n+1}^{3n+1} ausgeführt.

(3.) Die Construction einer G_{3n+2}^{3n+2} ist ausgeführt, sobald man die zu irgend 3 Punktepaaren gehörigen drei G_{3n}^{3n} herstellen kann;

denn sind diese Punktepaare $\alpha_1\alpha_2$ $\beta_1\beta_2$ $\gamma_1\gamma_2$ und will man die zu den beliebigen Punkten $\varrho_1\ldots\varrho_{3n-1}$ gehörige G_3^3 bestimmen, so construire man:

den Punkt α, welcher $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{3n-1} \alpha_1 \alpha_2$,
d. P. β, " $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{3n-1} \beta_1 \beta_2$,
d. P. γ, " $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{3n-1} \gamma_1 \gamma_2$

zu je einem Element der G^{3n+2}_{3n+2} ergänzt. Die gesuchte G^3_3 ist alsdann durch die 3 Elemente $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha)$ $(\beta_1 \beta_2 \beta)$ $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma)$ vollständig festgelegt, was zu zeigen war.

C. Formen vierten Grades.

I. Die Form a^4_x bestehe aus den Punkten 1 2 3 4. Derselben ist eine Punktreihe P beigeordnet, derart, dass jedem Punkte ϱ der C_3 ein Punkt p_ϱ der Punktreihe entspricht; p_ϱ selbst ist alsdann das Centrum desjenigen Ebenenbündels, welches die innerhalb der conjugirten G^4_4 zu ϱ gehörige G^3_3 auf der Curve ausschneidet.

Die Punkte $p_1 p_2 p_3 p_4$ sind sofort zu construiren; um z. B. p_4 zu erhalten, bestimme man den Punkt p_{123} (cfr. A. I.) und verbinde ihn mit 4. Die 2 nicht durch den Punkt 4 gehenden Tangenten, welche der Verbindungslinie begegnen, seien t_σ und t_τ. Dann ist der Schnittpunkt von $O_4 O_\sigma O_\tau$ der gesuchte Punkt p_4; denn nach A. I. ist $\sigma\tau$ die erste Polare von 4 in Bezug auf die binäre Form der Punkte (1 2 3), also $4\sigma\tau$ die erste Polare von 4 in Bezug auf a^4_x, und es geht mithin jede der Ebenen $O_4 O_\sigma O_\tau$ in der That durch den Punkt p_4.

Daraus folgt, dass man die dreigliedrigen Gruppen construiren kann, welche innerhalb der zu a^4_x conjugirten G^4_4 den einzelnen Punkten 1, 2, 3, 4 zugehören; nach B. 2. ist demnach überhaupt die Construction dieser G^4_4 ausgeführt.

Die zu a^4_x apolaren Formen dritten Grades bilden eine G^3_2. Diese wird offenbar auf C_3 von dem Ebenenbüschel ausgeschnitten, welches die Gerade P zur Axe hat.

II. Zwei Formen $a^4_x b^4_x$ steht eine G^4_3 als conjugirt gegenüber. Die beigeordneten Punktreihen von a^4_x und b^4_x seien resp. $(p_1 p_2 \cdots p_\varrho \cdots)$ $(q_1 q_2 \cdots q_\varrho \cdots)$. Um 2 Punkte $\varrho\sigma$ zu einem Element der G^4_3 zu ergänzen, bestimme man die Ebene $\sigma p_\varrho q_\varrho$. Diese schneidet die Curve in noch 2 Punkten $\tau\omega$ von der Beschaffenheit, dass $\varrho\sigma\tau\omega$ ein Quadrupel der G^4_3 ist.

Die Geraden $p_\varrho q_\varrho$ sind die geraden Erzeugenden eines Hyperboloids, welches die Eigenschaft hat, die Seiten aller Tetraeder zu berühren, deren Ecken ein Quadrupel der G^4_3 bilden. Diese Fläche 2ten Grades hat für die 3-gliedrige Gruppe auf der C_3 analoge Bedeutung, wie die Involutionscurve für die Involution auf einem Kegelschnitt.

III. Nicht minder leicht wird die G_2^4 construirt, welche zu 3 Formen $a_x^4 b_x^4 c_x^4$ conjugirt ist, deren beigeordnete Punktreihen resp. $(p_1 p_2 \dots p_\varrho \dots)$ $(q_1 q_2 \dots q_\varrho \dots)$ $(r_1 r_2 \dots r_\varrho \dots)$ sein mögen. Die Ebene $p_\varrho q_\varrho r_\varrho$ schneidet C_3 in 3 Punkten, welche mit ϱ zusammen ein Element der G_2^4 bilden.

D. Formen fünften Grades.

Es sei eine binäre Form 5ten Grades a_x^5 gegeben, welche aus den Punkten 1 2 3 4 5 bestehe. Derselben ist eine Ebene E von Punkten derart beigeordnet, dass zu jedem Punktepaar $\varrho\sigma$ der C_3 ein bestimmter Punkt $q_{\varrho\sigma}$ von E gehört, der Centrum desjenigen Ebenenbündels ist, welches die zu $\varrho\sigma$ innerhalb der conjugirten G_5^5 gehörige G_3^3 auf der Raumcurve ausschneidet.

Um den Punkt q_{55} zu erhalten, welcher dem doppelt gezählten Punkte 5 entspricht, construire man die beigeordnete Punktreihe P der Form (1 2 3 4) und fixire den innerhalb derselben zu 5 gehörigen Punkt p_5. Die Verbindungslinie $5p_5$ begegne den beiden nicht durch 5 gehenden Tangenten $t_\sigma t_\tau$; alsdann ist der Schnittpunkt von $O_5 O_\sigma O_\tau$ der gesuchte Punkt q_{55}. In der That ist nach den unter A. und C. angegebenen Constructionen $(5\sigma\tau)$ die 2te Polare des Punktes 5 in Bezug auf a_x^5 und die Ebenen $O_5 O_\sigma O_\tau$ gehen demnach durch q_{55} hindurch. In derselben Weise aber kann man $q_{44}\, q_{33}\, q_{22}\, q_{11}$ herstellen; d. h. man kann die zu 5 Punktepaaren innerhalb der conjugirten G_5^5 gehörigen dreigliedrigen Gruppen construiren. Die Construction der G_5^5 selbst ist damit nach B. 3. erledigt.

Hieraus ist unschwer die Construction der zu 2 und 3 Formen 5ten Grades conjugirten G_4^5 und G_3^5 abzuleiten.

E. Formen sechsten Grades.

Sind 1 2 3 4 5 6 die Punkte der binären Form a_x^6, E die nach D. zu construirende beigeordnete Ebene der Form (1 2 3 4 5) und $q_{\varrho\sigma}$ der zu dem Punktepaar $\varrho\sigma$ gehörige Punkt von E, so wird nach Satz 31 die beigeordnete Fläche K von a_x^6 auf folgende Weise erhalten: Auf O_6 schneiden $t_\varrho t_\sigma$ 2 Punkte rs aus, deren Verbindungslinie $g_{\varrho\sigma}$ heissen soll. K ist alsdann das Erzeugniss der Zuordnung von $g_{\varrho\sigma}$ und $q_{\varrho\sigma}$ und man kann demnach, wie im § 10 hervorgehoben wurde, den Polarpunkt irgend einer Ebene in Bezug auf K linear construiren. Ist die Ebene die Verbindungsebene von 3 beliebigen Punkten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ der C_3, so ist der Polarpunkt Centrum des Bündels, dessen Ebenen

diejenige G_3^3 auf der Curve ausschneiden, welche den Punkten $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ innerhalb der zu a_x^6 conjugirten G_6^6 zugehört. Man kann demnach irgend 5 Punkte zu einer conjugirten Form von a_x^6 ergänzen.

F. Construction der zu einer Form $(3n+1)$ten Grades a_x^{3n+1} conjugirten G_{3n+1}^{3n+1} (für $n>1$) unter der Voraussetzung: dass man alle conjugirten Formen einer beliebig gegebenen Form $3n$ten Grades linear construiren kann.

Die Form a_x^{3n+1} bestehe aus den Punkten $a_1 a_2 \dots a_{3n} a_{3n+1}$. Ich bezeichne die binäre Form der Punkte $a_1 \dots a_{3n}$ mit b_x^{3n} und die derselben beigeordnete Fläche $n$ter Classe mit K. Innerhalb der beigeordneten Flächenschaar von a_x^{3n+1} gehöre zu a_{3n+1} die Fläche K_{3n+1}. Dieselbe wird nach Massgabe des Satzes 32 projectivisch erzeugt durch Zuordnung der Geraden der Schmiegungsebene von a_{3n+1} zu den ersten Polaren, welche die Ebenen eines bestimmten Bündels in Bezug auf K besitzen (damit diese Polaren angebbar seien, musste $n>1$ vorausgesetzt werden). Da ich nach der oben gemachten Voraussetzung alle conjugirten Formen von b_x^{3n} construiren kann, so bin ich in der Lage, sämmtliche conjugirte n-Flache von K oder was dasselbe sagt, sämmtliche conjugirte $(n-1)$-Flache jeder ersten Polaren von K herzustellen; d. h. ich kann für jede Fläche des auftretenden Gewebes sämmtliche conjugirte $(n-1)$-Flache construiren. Damit ist die Voraussetzung der Aufgabe 34 erfüllt, und ich kann mit Hülfe der in § 10 angegebenen Lösung dieser Aufgabe alle conjugirten n-Flache von K_{3n+1} herstellen, oder, was dasselbe ist, ich kann alle diejenigen Elemente der zu a_x^{3n+1} conjugirten G_{3n+1}^{3n+1} construiren, welche den Punkt a_{3n+1} enthalten. In derselben Weise aber kann ich die zu a_{3n} resp. a_{3n-1} innerhalb der G_{3n+1}^{3n+1} gehörigen $3n$-gliedrigen Gruppen erhalten und damit ist nach B. 2 die Construction der conjugirten G_{3n+1}^{3n+1} überhaupt erledigt.

G. Construction der zu einer Form $(3n+2)$ten Grades a_x^{3n+2} conjugirten G_{3n+2}^{3n+2}.

Die Form bestehe aus den Punkten $a_1 \dots a_{3n+2}$; b_x^{3n+1} sei die binäre Form der Punkte $a_1 a_2 \dots a_{3n+1}$ und innerhalb der beigeordneten Flächenschaar der letzteren möge dem Punkte a_{3n+2} die Fläche K_{3n+2} zugehören. Andererseits entspreche dem doppelt gezählten

Punkte a_{3n+2} innerhalb des beigeordneten Flächengewebes von a_x^{3n+2} die Fläche $K_{3n+2, 3n+2}$. Diese letztere wird nach Satz 33 projectivisch erzeugt durch Zuordnung der Geraden der Schmiegungsebene von a_{3n+2} zu den Flächen des Gewebes, welches aus den Polaren der Ebenen des Bündels um den Punkt a_{3n+2} in Bezug auf die Fläche K_{3n+2} besteht. Da man nach F. alle conjugirten Formen von b_x^{3n+1} construiren kann, so kann man auch alle conjugirten n-Flache von K_{3n+2} und mithin auch sämmtliche conjugirte $(n-1)$-Flache für jede einzelne Fläche des erwähnten Gewebes herstellen. Hierdurch sind wiederum die Voraussetzungen der Aufgabe 34 erfüllt, und man ist mit Hülfe der dort angegebenen Construction in der Lage, alle conjugirten n-Flache von $K_{3n+2, 3n+2}$ oder, was dasselbe ist, alle diejenigen Elemente der conjugirten G_{3n+2}^{3n+2} zu construiren, welche den doppelten Punkt a_{3n+2} enthalten. Da dasselbe gilt, sobald man für a_{3n+2} irgend einen anderen Punkt von a_x^{3n+2} eintreten lässt, so ist nach der unter B. 3 gemachten Bemerkung die Construction der G_{3n+2}^{3n+2} erledigt.

H. Construction
der zu einer Form $(3n+3)$ten Grades a_x^{3n+3} conjugirten G_{3n+3}^{3n+3}.

Besteht eine Form aus den Punkten $a_1 a_2 \ldots a_{3n+3}$ und bezeichnet man die binäre Form der Punkte $a_1 \ldots a_{3n+2}$ mit b_x^{3n+2}, so wird die beigeordnete Fläche K von a_x^{3n+3} nach Satz 31 projectivisch erzeugt durch Zuordnung der Geraden der Osculationsebene von a_{3n+3} zu den Flächen des beigeordneten Gewebes der Form b_x^{3n+2}. Da man aber nach G. alle conjugirten Formen von b_x^{3n+2} erhalten kann, so ist man auch in der Lage, für jede Fläche des genannten Gewebes sämmtliche conjugirte n-Flache zu construiren. Die Voraussetzungen der Aufgabe 34 sind dadurch erfüllt und die bekannte Lösung derselben gestattet demnach, alle $(n+1)$-Flache von K, d. h. alle conjugirten Formen von a_x^{3n+3} herzustellen.

Aus F. G. H. folgt nunmehr: „Die Aufgabe, zu einer Form $p$ten Grades sämmtliche conjugirte Formen zu construiren, ist für $p=3n+1$, $p=3n+2$, $p=3n+3$ gelöst, sobald sie für $p=3n$ gelöst ist" (wobei $n>1$ sein muss). Da aber diese Aufgabe nach E. für $p=3 \cdot 2=6$ in der That gelöst ist, so darf sie als allgemein gelöst angesehen werden.

Ueber Collineation und Correlation.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

Das Theorem, welches Clebsch*) ohne Beweis mitgetheilt hat:

„*Bei allen* ∞^3 *Collineationen zweier (ebener) Felder, bei denen die Punkte, welche fünf gegebenen Punkten* $A_1, A_2, \ldots, A_5$ *des einen* A *im andern* B *entsprechen, auf gegebenen Geraden* $b_1, b_2, \ldots, b_5$ *liegen, giebt es noch einen sechsten festen Punkt* A_0, *der ebenfalls seine entsprechenden Punkte auf einer festen Geraden* b_0 *hat,*"

ist, nachdem es von einigen Geometern in Zweifel gezogen worden war, gleichzeitig von den Herren Voss**) und Rosanes***) bewiesen worden.

Ich habe erst neuerdings den engen Zusammenhang bemerkt, in dem der genannte Satz sich zu meinen ersten Untersuchungen über Projectivität†) befindet; ich will nun im ersten Abschnitte des Folgenden zeigen, dass der Satz von Clebsch im Grunde nichts anderes ist, als eine Folge des Satzes vom achten gemeinsamen Punkte aller Flächen 2. Grades durch 7 Punkte.

In II schliesse ich daran die Ermittelung der Zahl (6) der *Centralcollineationen oder Homologien*, die sich in dem erwähnten linearen Systeme 3. Stufe von Collineationen befinden; wobei sich ergeben wird, dass, wenn die 5 gegebenen Punkte und dementsprechend auch die 5 gegebenen Geraden auf beide Felder beliebig vertheilt werden, diese Zahl sich nicht ändert.

In III wird die Verbindung der Collineation mit zwei *linearen Connexen* und insbesondere *die Unbestimmtheit der mit einem sogenannten speciellen linearen Connexe verbundenen Collineation* besprochen. Ferner wird der Weg, auf welchem Clebsch seinen Satz jedenfalls gefunden hat, ermittelt und am Schlusse erkannt, dass die Axen und

*) Math. Ann. Bd. VI, S. 203 (am Schluss von § 1).

**) Ebenda Bd. XV, S. 355.

***) Journal für Math. Bd. 88, S. 241 (insbes. S. 249).

†) Math. Ann. Bd. I, S. 533 (citirt mit: „Eb. Proj.")

Centra der 6 Homologien eines linearen Systems 3. Stufe von Collineationen (II) ein eben solches System bilden, wie die fünf definirenden Elementenpaare $A_1, b_1, \ldots, A_5, b_5$ des Collineationssystems und das mit ihnen verbundene Paar A_0, b_0.

In IV wird eine Eigenschaft *apolarer* (*conjugirter*) *Connexe* (Collineationen, bez. Correlationen) bewiesen, während in V anhangsweise eine vom Vorhergehenden unabhängige Anwendung eines Satzes über das *Polarsystem*, als Specialfall der Correlation, besprochen wird.

I.

1. Für meinen Beweis des Satzes von Clebsch ist es besser, ihn als Correlationssatz auszusprechen, also in der Form, in der ihn auch Herr Rosanes meistens nimmt:

Alle ∞^3 *Correlationen* (*reciproken Beziehungen*) *zweier Felder* A, B, *welche fünf Paare conjugirter Punkte* $A_1, B_1; \ldots; A_5, B_5$ *gemein haben, haben auch noch ein sechstes Paar* A_0, B_0 *gemein.*

Conjugirt sind bekanntlich in zwei correlativen (reciproken) Feldern zwei Punkte, wenn einer und in Folge dessen jeder auf der Polare (entsprechenden Geraden) des andern liegt.

Die beiden Gruppen $A_1, \ldots, A_5; B_1, \ldots, B_5$ in A, B vervollständigen wir durch die unendlich fernen Kreispunkte der Ebenen zu siebenpunktigen Gruppen und erhalten, nach dem bekannten Satze des „Problems der Projectivität"*), 3 Paare von Punkten A, B, aus denen nach den siebenpunktigen Gruppen projective Büschel, also in unserm Falle nach den fünfpunktigen Gruppen *gleiche* Strahlbüschel gehen. Mit zwei solchen gleichen Strahlbüscheln (von denen mindestens ein Paar reell ist) legen wir die Felder auf einander, so dass nun A_1 und B_1, A_2 und $B_2, \ldots, A_5$ und B_5 mit einem festen Punkte O je in gerader Linie liegen („allineirt" sind). Projiciren wir sie sodann aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, die auf einer Geraden durch O ausserhalb der nun beide Felder tragenden Ebene sich befinden, so werden die nach A_1 und $B_1, \ldots, A_5$ und B_5 gehenden Strahlen je sich schneiden: in $P_1, \ldots, P_5$.

Die ∞^3 Correlationen zwischen den beiden Feldern geben eben so viele Correlationen zwischen den Bündeln, bei denen allen die Strahlen $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_5)$ bez. zu $\mathfrak{B}(B_1, \ldots, B_5)$ conjugirt sind.

Nach dem bekannten Satze des Herrn Schröter**) wird durch

*) Cf. z. B. „Eb. Proj." Abschn. IV. — In Bezug auf die drei bei zwei siebenpunktigen Gruppen sich ergebenden Paare $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ gilt, wie Herr S. Kantor (Denkschriften der Wiener Akademie Bd. 96, S. 92) bemerkt, dass z. B. in den projectiven Büscheln um A', B' die Strahlen nach A'', A''' den nach B''', B'' gehenden homolog sind.

**) Journ. f. Math. Bd. 62, S. 215; Oberflächen 2. Ordnung § 52.

je ∞^1 von diesen Correlationen die nämliche Fläche 2. Grades erzeugt; bei jeder dieser ∞^2 Flächen sind zwei Strahlen, welche nach demselben Flächenpunkte gehen, conjugirte Strahlen in allen sie erzeugenden Correlationen. Wir erhalten durch unsere ∞^3 Correlationen die sämmtlichen Flächen des Netzes durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $P_1, \ldots, P_5$; und die Strahlen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nach dem achten gemeinsamen Punkte P_0 sind conjugirt in allen ∞^3 Bündelcorrelationen und ihre Spuren A_0, B_0 in der Ebene der Felder in allen ∞^3 Correlationen zwischen diesen; was nun auch für die ursprüngliche Lage der beiden Trägerebenen gilt.

Damit ist das Theorem bewiesen. —

2. In der Lage, wo A_1 und $B_1, \ldots, A_5$ und B_5 je auf demselben Strahle des Büschels O sich befinden, gilt dies auch für die sechsten conjugirten Punkte A_0, B_0, weil die sie projicirenden Bündelstrahlen sich in P_0 schneiden; damit haben wir einen synthetischen Beweis des von Herrn Rosanes gefundenen ersten Satzes auf Seite 254 des erwähnten Aufsatzes.

Bemerken wir aber auch für die allgemeine Lage der beiden Ebenen, dass *es stets drei Punktepaare giebt, aus denen unsere beiden fünfpunktigen Gruppen durch (projectiv-) gleiche Büschel projicirt werden, und dass entsprechende Strahlen derselben auch nach den beiden sechsten Punkten gehen.*

3. Ferner, dass *diese sechsten Punkte A_0, B_0 diejenigen Punkte sind, welche ich im Abschnitt II von „Eb. Proj." die den beiden Gruppen verbundenen Punkte genannt habe*, (was Herr Rosanes S. 253 analytisch nachweist), ergiebt sich unmittelbar aus den Betrachtungen des Abschnitts VII meines Aufsatzes, insbes. aus Nr. 29, wo ich den achten gemeinsamen Punkt der Flächen eines Netzes 2. Ordnung gerade aus den verbundenen Punkten abgeleitet habe.

4. Unter den ∞^3 Correlationen der beiden Felder befinden sich auch ∞^2 ausgeartete mit je einem singulären Punkte in jedem Felde*), bei denen die Correlation in die Projectivität der Büschel um die singulären Punkte übergegangen ist, derartig, dass nach conjugirten Punkten homologe Strahlen der projectiven Büschel gehen.

Folglich sind *die Punkte A, B, welche*, nach Abschnitt II von „Eb. Proj.", *in Bezug auf die beiden Gruppen $A_1, \ldots, A_5$; $B_1, \ldots, B_5$ einander correspondiren* (d. h. nach ihnen projective Büschel senden), *zusammengehörige singuläre Punkte für jene Correlationen*, und wir sehen nun, was ich damals noch nicht bewiesen, dass *in allen diesen*

---

*) Hirst, Proc. London Math. Soc. Bd. 5, S. 40 (oder Annali di Matematica ser. II, Bd. 6, S. 260) und Bd. 8, S. 262 (oder in etwas kürzerer Redaction: Transunti dei Lincei ser. III, Bd. 1); cf. auch die Einleitung meines Aufsatzes Math. Ann. Bd. XII, S. 254.

*Paaren projectiver Büschel homologe Strahlen auch nach den verbundenen Punkten A_0, B_0 gehen.**) —

Sobald A und B in derselben Ebene sind,**) giebt es in dem Correlationssystem auch eine Polarreciprocität (Polarsystem, Involutionsnetz); daher sind A_0, B_0 auch conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt, für welchen A_1, B_1; ...; A_5, B_5 conjugirt sind (Rosanes Seite 253).

5. Der Punkt B_0 hat („Eb. Proj." Nr. 5) die Eigenschaft, dass, wenn A ein beliebiger Punkt des durch A_1, ..., A_5 gehenden Kegelschnitts ist,

$$B_0(B_1\, B_2\, B_3\, B_4\, B_5) \barwedge A(A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, A_5);$$

d. h. B_0 genügt den beiden Bedingungen:

$$B_0(B_1\, B_3\, B_4\, B_5) \barwedge A_2(A_1\, A_3\, A_4\, A_5),$$
$$B_0(B_1\, B_2\, B_4\, B_5) \barwedge A_3(A_1\, A_2\, A_4\, A_5);$$

und es giebt nur einen Punkt, der dies thut, da die beiden Kegelschnitte, auf welche B_0 durch sie verwiesen ist, schon B_1, B_4, B_5 gemein haben. Aehnliches gilt für A_0.

Herr Rosanes hat in der Fortsetzung seines Aufsatzes***), welche ebenso, wie dieser, reich ist an interessanten Betrachtungen über diese (und ähnliche) „linear-abhängige" Punktgruppen, in § 2, 3 eine einfache Construction von A_0, B_0 mitgetheilt, die sich leicht synthetisch beweisen lässt.

Man beziehe A, B *so correlativ auf einander, dass* B_2B_3, B_3B_1, $B_1\,B_2$ *die Polaren von* A_1, A_2, A_3 *und* B_5, B_4 *zu* A_4, A_5 *conjugirt sind.* Die Correlation ist dadurch vollständig und eindeutig bestimmt; denn es liegt nach Herrn Hirst's Bezeichnung die Signatur [3020] vor.†) Nun sei B_0' der Pol von $A_4\,A_5$ in dieser Correlation, also der Schnitt der durch B_5, B_4 gehenden Polaren von A_4, A_5, so dass diese sind $B_5\,B_0'$, $B_4\,B_0'$.

Seien ihre Schnitte mit $B_1\,B_3$ bez. C_5, C_4; so ist, in Folge der Correlation:

$$A_2(A_1\, A_3\, A_4\, A_5) \barwedge B_3\, B_1\, C_5\, C_4 \barwedge B_1\, B_3\, C_4\, C_5 \barwedge B_0'(B_1\, B_3\, B_4\, B_5);$$

und ebenso ergiebt sich:

$$A_3(A_1\, A_2\, A_4\, A_5) \barwedge B_0'(B_1\, B_2\, B_4\, B_5).$$

Demnach ist B_0' mit B_0 identisch und *B_0 ist der Pol von $A_4\,A_5$ in der erwähnten Correlation, und ähnlich A_0 der von $B_4\,B_5$.*

---

*) Einen andern Beweis hierfür hat mir Herr Hirst 1876 mitgetheilt.

**) Diese Lage habe ich — ohne dass es nothwendig war — in „Eb. Proj." durchweg angenommen.

***) Journal f. Math. Bd. 90, S. 303.

†) Im zuerst genannten Aufsatze von Hirst Nr. 42.

Die beiden Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $A_4 A_5 A_0$ sind in der Correlation zu $B_1 B_2 B_3$, $B_4 B_5 B_0$ polar, und die 12 „verbundenen Punkte" bilden demgemäss in 10 Weisen zwei Paare polarer Dreiecke in 10 verschiedenen Correlationen.

Da zwei polare Dreiecke in sich duale Figuren sind, so *bilden die* 12 *Geraden*

$$A_2 A_3,\ A_3 A_1,\ A_1 A_2,\ A_4 A_5,\ A_5 A_0,\ A_0 A_4,$$
$$B_2 B_3,\ B_3 B_1,\ B_1 B_2,\ B_4 B_5,\ B_5 B_0,\ B_0 B_4$$

ein eben solches linear abhängiges System von Geraden, in welchem jedes Paar unter einander stehender „verbunden" ist mit den fünf andern Paaren, wie dies Herr Rosanes a. a. O. analytisch gefunden hat.

6. Gehen wir wieder zu dem Falle der *Collineation* zurück und nehmen wir überdies an, dass *die Ebenen identisch und* $A_1, \ldots, A_5$ *bez. mit* $b_1, \ldots, b_5$ *incident seien.* Dann befindet sich unter den ∞^3 den fünf Bedingungen genügenden Collineationen auch *die Identität* der beiden Felder, bei welcher jedes Element sich selbst entspricht. *Mithin liegt auch* A_0 *auf* b_0, da b_0 auch in dieser ausgezeichneten Collineation den dem A_0 entsprechenden Punkt, d. i. A_0 selbst, enthalten muss. So ergiebt sich ein sehr einfacher Beweis — den ich übrigens aus Herrn Rosanes' analytischer Darstellung abgeleitet habe*) — des zweiten Satzes desselben in seinem ersten Aufsatze S. 254, für welchen, nach Herrn Rosanes' Mittheilung, auch Herr Schröter einen rein geometrischen Beweis gefunden hat.**)

7. Es seien zwei Bündel A, B und im ersteren fünf Strahlen $a_1, \ldots, a_5$, im letzteren fünf Ebenen $\beta_1, \ldots, \beta_5$ gegeben. Wir beziehen sie so collinear, dass die den Strahlen a_i homologen Strahlen bez. in die Ebenen β_i fallen. Die ∞^3 Collineationen liefern eben so viele cubische Raumcurven, bei denen allen die Sehnen, welche in β_i je den zweiten und dritten Schnitt (ausser B) verbinden, durch $a_i \beta_i$ gehen; es giebt noch eine sechste feste Ebene β_0 durch B, in welcher auch die analoge Sehne durch einen festen Punkt geht. —

Wenn die Felder A, B correlativ bezogen werden mit 5 festen Paaren conjugirter Punkte $A_1, B_1; \ldots; A_5, B_5$, so haben die ∞^3 Complexe 2. Grades, welche sie nach Herrn Hirst***) erzeugen, ausser den 5 Strahlen $A_1 B_1, \ldots, A_5 B_5$ noch einen sechsten festen Strahl $A_0 B_0$ gemein. —

---

*) Denn die Gleichung von Rosanes $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$, transformirt für den Fall der Collineation in: $x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 = 0$ (oder $x_1 u_1 + \cdots = 0$ mit der Bezeichnung von Rosanes), ist die Gleichung des zur Identität gehörigen „identischen Connexes"; man sehe Abschn. III.

**) Cf. auch S. Kantor a. a. O. S. 97.

***) Proc. London Math. Soc. Bd. 10, S. 131 oder Collectanea in memoriam D. Chelini.

Alle ∞^4 quadratischen Verwandtschaften zwischen A, B, bei denen sich A_1, B_1; ...; A_5, B_5 entsprechen, haben noch A_0, B_0 zu entsprechenden Punkten.*)

Als ein weiteres interessantes Beispiel führe ich nach Herrn S. Kantor (auf derselben Seite) — wenn ich die betreffende etwas knapp gefasste Stelle recht verstehe — noch an, dass die Schnitte irgend einer Ebene mit den 6 Paaren von Gegengeraden einer Doppelsechs auf einer cubischen Fläche 6 verbundene Elementenpaare sind; womit dann der Satz des Herrn Schur**), dass die 6 Paare Gegengeraden selbst reciproke Polaren einer und derselben Fläche 2. Grades sind, zusammenhängt.

II.

8. Befinden sich A, B wieder in derselben Ebene, so giebt es unter den ∞^3 Collineationen des linearen Systems, das durch A_1, b_1; ...; A_5, b_5 definirt ist, weil eine Centralcollineation oder, wie ich sie mit Poncelet und Chasles der Kürze halber lieber nennen will, eine Homologie gerade fünf Bedingungen erfüllen kann, auch *eine endliche Zahl von Homologien.* Doch können wir sofort eine Verallgemeinerung eintreten lassen:

In A *seien* 5, 4, 3 *Punkte gegeben, in* B 0, 1, 2 *und jedem im jedesmaligen andern Felde eine Gerade zugeordnet, auf welcher der entsprechende Punkt liegen soll; die Zahl der diesen fünf Bedingungen genügenden Homologien ist in allen* 3 *Fällen* 6.

Wir denken uns — ähnlich wie Herr Hirst es thut in seinen Untersuchungen über correlative Ebenen (a. d. angef. Stellen) — ein einfach unendliches System von Homologien durch 4 der eben erwähnten Bedingungen definirt; μ, ν seien die Zahlen derjenigen, die noch einer fünften genügen, so jedoch, dass bei den μ der Punkt in A, bei den ν aber in B liegt.

In einem solchen Systeme haben wir *zwei Ausartungen der Homologie, bei denen nicht mehr durchweg,* wie bei der allgemeinen, *jedem Elemente des einen Feldes eins und nur eins im andern entspricht.* Diese Ausartungen ergeben sich dann, wenn einmal einem beliebigen Punkte von A, bez. von B ein Punkt auf der Axe oder einer beliebigen Geraden von B, bez. A eine Gerade durch das Centrum der Homologie entspricht. Seien S das Centrum, s die Axe der Homologie, A, B, bez. a, b zwei entsprechende Punkte oder Geraden, so haben beide Ausartungen folgende Eigenschaften.

Bei der ersten entspricht einem beliebigen Punkte A stets der Schnitt

*) S. Kantor a. a. O. S. 92.

**) Math. Ann. Bd. XVIII, S. 1 (§ 5).

$(S\,A, s)$, *dem Centrum* S *als Punkt von* A *jeder beliebige Punkt von* B; *also einem beliebigen Punkte* B *stets das Centrum* S, *einem auf* s *gelegenen Punkte* B *jeder beliebige Punkt auf* $S\,B$. *Ferner entspricht einer beliebigen Geraden* a *die Axe* s, *einer Geraden* a *durch* S *jeder beliebige Strahl durch* $s\,a$, *also einer beliebigen Geraden* b *der Strahl von* S *nach* $s\,b$, *der Axe* s *als Strahl von* B *jeder beliebige Strahl von* A.

Nennen wir diese Ausartung, weil bei ihr S als Punkt von A und s als Gerade von B völlig unbestimmte entsprechende Elemente haben, die Ausartung $(S_{\mathsf{A}}, s_{\mathsf{B}})$.

Bei der zweiten Ausartung hat man nur die Felder zu vertauschen; so dass sie nicht wesentlich verschieden ist.

Sie heisse die Ausartung $(s_{\mathsf{A}}, S_{\mathsf{B}})$. Ist $\mathfrak{S}$ der Schnitt des Collineationsstrahls $S\,A\,B$ mit s und $\mathfrak{s}$ der Strahl vom Punkte $s\,a\,b$ nach S, so ist der sogenannte Modulus oder die Charakteristik der Homologie $(S\,\mathfrak{S}\,A\,B) = (\mathfrak{s}\,s\,a\,b)$ bei der ersten Ausartung 0, bei der zweiten ∞. Die Herren Zeuthen und Schubert*) haben diese Ausartung zuerst verwerthet.

9. Seien nun π, λ die Zahlen der beiden Ausartungen in unserm Systeme, so hat man genau dieselben Formeln zwischen π, λ, μ, ν, welche Herr Hirst für allgemeine Correlationen und Collineationen gefunden hat:**)

$$3\mu = 2\lambda + \pi, \qquad 3\nu = \lambda + 2\pi;$$

der Beweis ist ganz analog.

Es kommt also darauf an, in unsern drei Systemen, die wir kurz mit [4, 0], [3, 1], [2, 2] bezeichnen wollen, die Ausartungszahlen π, λ festzustellen und daraus μ, ν zu berechnen.

Zur Ermittelung von π, λ ist die folgende bekannte Erzeugung der Curve 3ter Ordnung und der Curve 3ter Classe nach Grassmann***) geeignet:

Es seien A_1, A_2, A_3 *drei beliebige Punkte,* b_1, b_2, b_3 *drei beliebige Geraden; dann erzeugen die Punkte* X, *für welche die drei Schnitte*

$$(X\,A_1, b_1), \quad (X\,A_2, b_2), \quad (X\,A_3, b_3)$$

in einer Geraden X *liegen, eine Curve* 3. *Ordnung, die Geraden* x — *die also die duale Eigenschaft haben, dass die Linien*

$$(x\,b_1, A_1), \quad (x\,b_2, A_2), \quad (x\,b_3, A_3)$$

in einen Punkt X *zusammenlaufen,* — *umhüllen eine Curve* 3. *Classe. Jene geht durch die Ecken der beiden Dreiecke* $A_1\,A_2\,A_3$, $b_1\,b_2\,b_3$, *diese tangirt deren Seiten.*

---

*) Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie S. 91, 338.

**) Proc. etc. Bd. V, Nr. 20, 21.

***) Journ. f. Math. Bd. 31, S. 111; cf. auch Clebsch, Math. Ann. Bd. V, S. 422.

10. Betrachten wir nun das System [4, 0], mit den gegebenen Elementen:

$$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4,$$
$$b_1 \; b_2 \; b_3 \; b_4;$$

d. h. das System von Homologien, bei denen die den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 entsprechenden Punkte auf b_1, b_2, b_3, b_4 liegen und also auch die den b_1, b_2, b_3, b_4 entsprechenden Geraden durch A_1, A_2, A_3, A_4 gehen.

Wir haben 6 ausgeartete Homologien (S_A, s_B); ihre Centra befinden sich in den 6 Punkten, welche den beiden zu

$$A_1, A_2, A_3; \; b_1, b_2, b_3$$

und

$$A_1, A_2, A_4; \; b_1, b_2, b_4$$

gehörigen Grassmann'schen Curven 3. Ordnung, ausser A_1, A_2, $b_1 \, b_2$, gemeinsam sind, und die entsprechenden gemeinsamen Tangenten der Curven 3. Classe sind die bezüglichen Axen.

Ausartungen (s_A, S_B) giebt es ebenfalls 6: s verbindet zwei Punkte A_i, und S fällt in den Schnitt der beiden zugeordneten b_i.

Also $\pi = \lambda = 6$, demnach auch $\mu = \nu = 6$; d. h. bei [5, 0] und bei [4, 1] ist die Zahl der Homologien 6.

Wir gehen zum Systeme [3, 1] mit den gegebenen Elementen:

$$A_1 \; A_2 \; A_3 \; a_4,$$
$$b_1 \; b_2 \; b_2 \; B_4.$$

A_1, A_2, A_3; b_1, b_2, b_3 liefern zwei Grassmann'sche Curven. Die 3 Punkte der Curve 3. Ordnung, welche auf a_4 liegen, geben die Centra für drei ausgeartete Homologien (S_A, s_B), und die 3 Tangenten aus B_4 an die Curve 3. Classe die Axen für 3 weitere.

3 ausgeartete Homologien (s_A, S_B) erhält man so: S fällt in einen Schnitt zweier b_i, z. B. in $b_1 \, b_2$; s ist dann die Gerade von A_3 nach dem Schnitte von a_4 mit $(b_1 \, b_2, B_4)$.

Bei 3 andern verbindet s zwei von den A_i, z. B. A_1, A_2, und S ist dann der Schnitt von b_3 mit der Geraden $(B_4, a_4 \, s)$. Also:

$$\pi = \lambda = \mu = \nu = 6.$$

Bei [4, 1] und [3, 2] ist die Zahl der Homologien 6.

Das System [2, 2], dessen Data:

$$A_1 \; A_2 \; a_3 \; a_4,$$
$$b_1 \; b_2 \; B_3 \; B_4$$

sind, zu betrachten, ist nicht mehr nothwendig, da es uns die Zahl für [3, 2] reproducirt und die ihr gleiche für [2, 3] liefert. Doch mag es der Vollständigkeit halber geschehen.

Die Ausartungen $(S_{\mathsf{A}}, S_{\mathsf{B}})$ ergeben sich auf drei Weisen:

1) s verbindet B_3, B_4; S ist der Schnitt von $(b_1\, s,\, A_1)$ und $(b_2\, s,\, A_2)$.

2) S liegt in $a_3\, a_4$; s verbindet $(S\, A_1,\, b_1)$ mit $(S\, A_2,\, b_2)$.

3) Es lassen sich aus B_3 und ebenso aus B_4 je zwei Gerade s so ziehen, dass der Schnitt von $(b_1\, s,\, A_1)$ und $(b_2\, s,\, A_2)$ auf a_4 bez. a_3 fällt: er ist dann S.

Die Ausartungen $(s_{\mathsf{A}}, S_{\mathsf{B}})$ erhält man durch Vertauschung der Felder. —

In dem Falle [5, 0]:

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5, \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{matrix}$$

haben wir demnach 6 Homologien, bei denen jeder der fünf gegebenen Punkte $A_1, \ldots, A_5$ und auch der verbundene Punkt A_0 seinen entsprechenden Punkt auf der zugeordneten Geraden b_i hat. Zu diesen 6 Punkten und 6 Geraden tritt ein zweites System von 6 Punkten und 6 Geraden, das der 6 Centra und der 6 Axen der Homologien. Wir werden im Folgenden (Nr. 16) zeigen, dass diese sich in derselben „linearen Abhängigkeit“ befinden.

III.

11. *Mit jeder Collineation zweier Felder* A *und* B *sind*, wie bekannt, *zwei lineare Connexe verbunden*;*) bei dem einen sind Elementenpaare ein Punkt von A und irgend eine Gerade durch den entsprechenden Punkt in B (oder eine Gerade in B und irgend ein Punkt auf der entsprechenden Geraden in A), bei dem zweiten dieser letztere und irgend eine Gerade durch den ersteren (oder eine Gerade in A und irgend ein Punkt auf der entsprechenden Geraden in B).

Ist die Gleichung des ersten Connexes:

$$(1)\qquad (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\eta_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3)\eta_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\eta_3 = 0,$$

worin x_i Punktcoordinaten in A und η_i Geradencoordinaten in B sind, denen dann bez. ξ_i und y_i als Geraden- und Punktcoordinaten zugehören; so ist die Gleichung des zweiten Connexes:

$$(2)\qquad A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3)\xi_1 + (A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3)\xi_2 + (A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3)\xi_3 = 0,$$

worin die A_{ik} die Adjuncten der a_{ik} in deren Determinante sind.

Wir wollen diese beiden Connexe unterscheiden als *Connex* (A, b)

---

*) Clebsch, Math. Ann. Bd. VI, S. 203.

und *Connex* (a, B) und sie *mit einander und mit der Collineation verbunden* nennen.*)

Im Allgemeinen bestimmt einer von ihnen den andern und die Collineation eindeutig; doch nicht so in Ausnahmefällen.

Wenn die Collineation ausartet, so dass sie in dem einen Felde, etwa in A, eine singuläre Gerade $\mathfrak{a}$, in dem andern B einen singulären Punkt $\mathfrak{B}$ hat, so zerfällt der Connex (A, b), nicht aber der andere.

Einem beliebigen Punkte von A entspricht dann in der Collineation der singuläre Punkt $\mathfrak{B}$, und ist jenem im Connexe (A, b) jede beliebige Gerade durch $\mathfrak{B}$ gepaart. Einem Punkte aber von A, der auf $\mathfrak{a}$ liegt, entspricht ein beliebiger Punkt eines bestimmten Strahles durch $\mathfrak{B}$ (so dass die Punktreihe $\mathfrak{a}$ und der Strahlbüschel $\mathfrak{B}$ projectiv werden), im Connexe (A, b) ist jenem Punkte auf $\mathfrak{a}$ jede beliebige Gerade in B gepaart. Die linke Seite von (1) zerfällt in zwei lineare Factoren:

$$(1)' \qquad (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 + b_3 \eta_3) = 0,$$

worin α_i, b_i die Coordinaten von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$ sind. Wir haben, was Herr Voss a. a. O. *einen speciellen linearen Connex* nennt.

Der andere Connex ist analytisch dadurch gekennzeichnet, dass die Determinante seiner Coefficienten verschwindet. Man wird gut thun, in diesem Falle analytisch diesen andern als den primitiven anzusehen, aus dessen Coefficienten die des ersten durch Adjunctenbildung abgeleitet werden. Bei diesem zweiten Connex ist einem beliebigen Punkte von B jeder beliebige Strahl durch einen bestimmten Punkt auf $\mathfrak{a}$ gepaart, dem Punkte $\mathfrak{B}$ ein beliebiger Strahl in A.

Ferner ist beim ersten Connexe einer beliebigen Geraden in B jeder Punkt von $\mathfrak{a}$ gepaart, einer Geraden durch $\mathfrak{B}$ jeder beliebige Punkt in A; beim zweiten hingegen einer beliebigen Geraden in A jeder beliebige Punkt eines bestimmten Strahles durch $\mathfrak{B}$, dem Strahle $\mathfrak{a}$ aber jeder beliebige Punkt in B.

Denn in der ausgearteten Collineation entspricht jedem Strahle von A derjenige Strahl durch $\mathfrak{B}$ in B, der dem Schnitte jenes mit $\mathfrak{a}$ in der oben erwähnten Projectivität zwischen der Punktreihe $\mathfrak{a}$ und dem Strahlbüschel $\mathfrak{B}$ homolog ist, dem Strahle $\mathfrak{a}$ aber ein jeder Strahl in B.

12. In einem einfach unendlichen Systeme von Collineationen giebt es nun im Allgemeinen eine endliche Zahl von ausgearteten

*) Nach Clebsch (a. a O. § 4 und Vorlesungen über Geometrie, herausgegeben von Lindemann, Bd. I, S. 944) müsste ich diese beiden Connexe „conjugirt" nennen; diesen Ausdruck gebraucht auch Herr Cyp. Stephanos in seinem Aufsatze „Sur la théorie des connexes conjugués" (Bull. des sciences math. sér. II, t. IV). Doch sehe man die Note zu Nr. 15.

Collineationen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{B})$, d. h. mit der singulären Geraden in A und dem singulären Punkte in B, und ebenso von ausgearteten Collineationen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$; bei jenen wird der Connex (A, b), bei diesen der Connex (a, B) speciell.

Wir wollen uns nun die Collineation durch die einfachen *Elementarbedingungen* A_i, b_i, bez. a_i, B_i bestimmt denken; bei jenen ist ein Punkt A_i in A gegeben und eine Gerade b_i in B, auf der der entsprechende liegt, bei diesen ein Punkt B_i in B und eine Gerade a_i, welche den entsprechenden Punkt enthält; es sind dies die „Nullpaare" des Herrn Rosanes, weil sie die linken Seiten von (1) oder (2) zum Verschwinden bringen.

Sind nur Bedingungen A_i, b_i gegeben, so wird der Connex (A, b) und die Collineation linear bestimmt; wenn nur Bedingungen a_i, B_i, dann der Connex (a, B) und wiederum die Collineation; der andere Connex wird nur indirect bestimmt; im Falle einer Ausartung kann er wie auch die Collineation unbestimmt bleiben, während der erste Connex vollständig bestimmt ist.

Es seien $f_0(x, \eta) = 0$, $f_1(x, \eta) = 0$, $\cdots$, $f_i(x, \eta) = 0$, wo $i \leqq 8$, $i + 1$ Gleichungen von der Form (1), so giebt:

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_i f_i = 0$$

bekanntlich *ein lineares System i^{ter} Stufe von Connexen* (A, b) *und von Collineationen;* wenn hingegen $F_0(\xi, y) = 0$, $\cdots$, $F_i(\xi, y) = 0$ von der Form (2) sind,

$$\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_i F_i = 0$$

ein lineares System i^{ter} Stufe von Connexen (a, B) und ebenfalls von Collineationen. Die verbundenen Connexe bilden je ein nicht lineares System.

Die Herren Voss und Rosanes haben nun a. a. O. (beim letzteren S. 249 des ersten Aufsatzes) gezeigt, dass, *so lange $i < 4$, in dem linearen Systeme von Connexen keine speciellen enthalten sind; wenn aber $i = 4$, dann ist die Zahl der enthaltenen speciellen Connexe* 6.

Dies scheint auf den ersten Blick nicht vereinbar mit dem oben erwähnten Satze, dass schon in einem einfach unendlichen Systeme von Collineationen sich eine endliche Anzahl von Ausartungen beider Arten befindet, die zugehörigen beiden Connexsysteme also eine endliche Zahl von speciellen Connexen enthalten.

Jeder von jenen 6 Connexen ist als Connex wohl bestimmt, nicht aber die verbundene Collineation und der verbundene Connex. Die Gleichung (1)' sagt aus, dass jedem Punkte in A ausserhalb $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Strahl des Büschels $\mathfrak{B}$ im Connexe (1)' zugehört, ihm demnach in der Collineation der Punkt $\mathfrak{B}$ entspricht — wodurch diese eine ausgeartete Collineation $(\mathfrak{a}, \mathfrak{B})$ wird — und jedem Punkte auf $\mathfrak{a}$

jede beliebige Gerade von B im Connexe zugehört. Aber welcher Punkt ihm in der Collineation entspricht, ist aus (1)' nicht zu entnehmen. Diese Collineation und mit ihr auch der andere Connex — dessen Gleichung, nach dem Process der Adjunctenbildung aus (1)' abgeleitet, eine Identität wird — sind noch völlig unbestimmt, und sie werden erst genauer bestimmt, wenn, ausser den 4 das lineare System definirenden Bedingungen, noch, da ja eine ausgeartete Collineation 7 Bedingungen unterworfen werden kann, drei weitere gegeben werden. Freilich dürfen diese nicht von derselben Art sein, wie die genannten definirenden, weil wir dann aus dem linearen Connexsysteme 4. Stufe ein niedrigeres lineares ausscheiden würden, in dem es ja keine speciellen Connexe giebt; wir nehmen also am besten solche von der andern Art, a_i, B_i, an, wenn jene etwa A_i, b_i sind; was wir voraussetzen wollen. *Also ist jeder der 6 speciellen Connexe als Connex wohl ein einzelnes Gebilde, aber er ist mit* ∞^3 *Collineationen, welche alle dieselbe singuläre Gerade* $\mathfrak{a}$ *und denselben singulären Punkt* $\mathfrak{B}$ *haben, und* ∞^3 *Connexen der andern Art verbunden.* —

So hat man ja auch in einem einfach unendlichen Systeme von Flächen 2. Grades im Allgemeinen eine endliche Zahl von Flächen ψ (nach der Benennung der Herren Zeuthen und Schubert*)), deren jede als Ordnungs- oder Punktfläche aus zwei Ebenen (Feldern), als Classen- oder Ebenenfläche aus zwei Punkten (Bündeln) besteht, welche auf der Schnittlinie der Ebenen sich befinden; in einem i-fach unendlichen System wird es im Allgemeinen ∞^{i-1} solche Flächen geben. Andererseits aber ist bekannt, dass in einem linearen Systeme von Flächen 2. Ordnung, bez. Classe die Ebenen-, bez. Punktepaare erst bei der 3. Stufe auftreten und zwar in endlicher Zahl, bekanntlich 10**). Sie sind aber nur einseitig bestimmt, nur als Ordnungs-, bez. nur als Classenfläche, und die duale Bestimmung steht noch vollständig frei: jede zwei beliebigen Punkte auf der Doppellinie des Ebenenpaars, bez. jede zwei beliebigen Ebenen durch diejenige des Punktepaares geben uns die Classen-, bez. Ordnungsfläche. Mithin repräsentirt jedes der 10 Ebenen- oder Punktepaare ∞^2 im Systeme 3. Stufe enthaltene Flächen ψ.

13. *Im Falle die Felder* A, B *von derselben Ebene getragen werden,* können wir uns die drei Bedingungen a_1, B_1; a_2, B_2; a_3, B_3, welche noch zur genaueren Bestimmung einer der Collineationen verfügbar sind, die zu einem der 6 speciellen Connexe des linearen Systems

*) Zeuthen, Nouv. Ann. sér. II, Bd. 7, S. 385. — Schubert, Journal f. Math. Bd. 71, sowie dessen Kalkül der abz. Geometrie (Leipzig 1879) § 16, 22.

**) Vergl. z. B. Reye, Journ. f. Math. Bd. 81, S. 54 (Nr. 34); Sturm, Math. Ann. Bd. XV, S. 407 (Nr. 26).

4. Stufe von Connexen (A, b) gehören, so geben, dass sie zu einer Homologie führen, welche dann eine Ausartung $(s_{\mathsf{A}}, S_{\mathsf{B}})$ sein wird mit $\mathfrak{a}$ als Axe, $\mathfrak{B}$ als Centrum. In allen ausgearteten Collineationen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{B})$ ist, wie bemerkt, die Punktreihe $\mathfrak{a}$ mit dem Büschel $\mathfrak{B}$ projectiv und jedem Punkte von $\mathfrak{a}$ entspricht jeder beliebige Punkt des homologen Strahls von $\mathfrak{B}$. Werden nun $a_1, \ldots, B_3$ so gewählt, dass die Punkte $(a_1, \mathfrak{B}B_1)$, $(a_2, \mathfrak{B}B_2)$, $(a_3, \mathfrak{B}B_3)$ sich auf $\mathfrak{a}$ befinden, dann incidiren drei und folglich alle Strahlen von $\mathfrak{B}$ mit ihren homologen Punkten auf $\mathfrak{a}$. Wir haben Homologie; die Willkürlichkeit, die doch noch in der Wahl von $a_1, \ldots, B_3$ vorhanden ist, macht dieselbe nicht unbestimmt, denn eine ausgeartete Collineation $(\mathfrak{a}, \mathfrak{B})$ ist durch die Incidenz homologer Elemente von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$ eindeutig als ausgeartete Homologie $(s_{\mathsf{A}}, S_{\mathsf{B}})$ charakterisirt.

Demnach ergiebt sich aus dem Voss-Rosanes'schen Satze der folgende:

In einem linearen Systeme 4ter Stufe von Collineationen zwischen Feldern derselben Ebene, wie es durch

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

definirt ist, *giebt es auch* 6 *ausgeartete Homologien* $(s_{\mathsf{A}}, S_{\mathsf{B}})$.

14. Dies ist allgemeiner als das in Nr. 10 bei $\lfloor 4, 0 \rceil$ gefundene Resultat: $\lambda = 6$.

Während die linearen Systeme 1., 2., 3. *Stufe von Collineationen und Connexen* (A, b) *zwischen Feldern, die wir nun wieder in verschiedenen Ebenen gelegen denken, wohl durch* 7, 6, 5 *der Elementarbedingungen definirt werden können, ist dies bei Systemen höherer Stufe nicht mehr der Fall*, analog wie lineare Systeme von Curven, bez. Flächen von höherer als erster, bez. zweiter Stufe nicht mehr durch Punkte bestimmt werden können. Die beiden Constituenten eines linearen Systems 1. Stufe $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ haben ∞^2 Elementenpaare (Nullpaare) A, b gemein, welche nach der Terminologie von Clebsch die Durchschnittscoincidenz der beiden Connexe bilden und die Paare der entsprechenden Elemente einer reciproken Verwandtschaft 2. Grades sind: ein Punkt in A und die Gerade in B, welche die beiden Punkte verbindet, die ihm in den beiden mit den constituirenden Connexen verbundenen Collineationen entsprechen. Irgend 7 dieser Elementenpaare können als das System 1. Stufe definirend angesehen werden. —

Die 3 Constituenten $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ eines linearen Systems 2. Stufe haben noch ∞^1 Elementenpaare A, b gemein, von denen die A in A eine Curve 3. Ordnung, die b in B eine Curve 3. Classe erzeugen (ein Curvenpaar nach Clebsch). Die 3 mit den constituirenden Connexen verbundenen Collineationen zwischen A und B induciren auch sowohl in der Ebene A, als in der Ebene B drei collineare

Felder; in denen in A z. B. entsprechen sich drei solche Elemente, die je demselben Elemente von B in den drei Collineationen entsprechen. Die Curve 3. Ordnung in A ist die Curve der Punkte A, in denen 3 homologe Gerade a, a', a'' der 3 Felder in A zusammenlaufen, also 3 Gerade, die in unseren Collineationen derselben Geraden b von B entsprechen; auf b liegen dann die 3 Punkte B, B', B'', die dem A entsprechen, also 3 homologe Punkte der drei Felder in B und deshalb umhüllt b eine Curve 3. Classe*).

Irgend 6 von diesen Elementenpaaren können wieder zur Definition des linearen Systems 2. Stufe dienen. —

Gruppirt man die 4 Constituenten eines linearen Systems 3. Stufe in zwei Gruppen von je drei, z. B. die beiden ersten bez. mit der 3. und 4.; so haben wir zunächst durch die beiden den Gruppen gemeinsamen Constituenten eine reciproke Verwandtschaft 2. Grades mit je einem Hauptdreiecke in jeder der beiden Ebenen. Die beiden Gruppen geben uns nun zwei Curven 3. Ordnung in A, welche, ausser den Ecken des Hauptdreiecks in A, noch 6 Punkte A gemein haben, und zwei Curven 3. Classe in B, denen, ausser den Seiten des Hauptdreiecks in B, noch 6 Tangenten gemeinsam sind. Diese 6 Punkte und 6 Geraden bilden die 6 Elementenpaare, welche den 4 Constituenten und demnach allen Mitgliedern des linearen Systems 3. Stufe gemeinsam sind. Da nun ein solches System nur durch 5 Bedingungen definirt sein kann, so können 5 von ihnen zur Definition des Systems dienen, das sechste ist dann durch sie bestimmt.

Es scheint mir kaum zweifelhaft, dass *auf diesem Wege Clebsch selbst zu seinem Theoreme gelangt ist*, und im Wesentlichen ist auch Herr Rosanes S. 247—49 diesen Weg gegangen, nur mehr analytisch verhüllt. — Endlich die 5 (6,...) Constituenten eines linearen Systems 4. (oder höherer) Stufe von linearen Connexen haben im Allgemeinen kein Elementenpaar gemein; womit wir auf den Anfang dieser Nr. zurückkommen: ein durch 5 Constituenten definirtes System 4. Stufe ist allgemeiner, als ein durch 4 Elementenpaare definirtes.

15. Herr Voss zeigt nun a. a. O., dass die 6 Paare der singulären Geraden und Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$ der 6 speciellen Connexe eines linearen 4. Stufe von Connexen (A, b) ein solches System von Elementenpaaren bilden, in dem das sechste so von den 5 andern abhängt, wie es der Satz von Clebsch aussagt, und beweist ihn damit.

Auch Herr Rosanes hat, wie gesagt, ebenfalls den Beweis geführt und zwar mit Hülfe des Begriffs apolarer Connexe (A, b) und (a, B) **).

---

*) Cf. über diese Curven: Schröter, Journal für Math. Bd 62, S. 265; Reye, Zeitschr. f. Math. Bd. 11, S. 180.

**) Herr Rosanes selbst, der mehr die algebraischen Formen im Auge hat, spricht stets von „Formen" statt von Connexen und, dem entsprechend, von „p-

Zwei Connexe (A, b) und (a, B) zwischen denselben Feldern, die nicht derselben Collineation verbunden sind:

$$a_{11}x_1\eta_1 + \cdots = 0$$
und
$$B_{11}\xi_1 y_1 + \cdots = 0$$

heissen apolar, wenn ihre Invariante

$$J = a_{11}B_{11} + \cdots + a_{12}B_{12} + a_{21}B_{21} + \cdots$$

verschwindet.

Herr Rosanes zeigt nun, dass es zu einem linearen Systeme i^{ter} Stufe von Connexen (A, b) oder (a, B) stets ein lineares System $(7-i)^{\text{ter}}$ Stufe von Connexen (a, B) oder (A, b) giebt, von der Beschaffenheit, dass jeder Connex des einen zu jedem des andern apolar ist, und dass gemeinsame Elementenpaare der Connexe des einen Systems die ausgezeichneten Elemente der speciellen Connexe des andern sind, und umgekehrt. So sind die 6 Paare $\mathfrak{a}, \mathfrak{B}$ der speciellen Connexe in dem Systeme 4. Stufe $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_4 f_4 = 0$ die gemeinsamen 6 Elementenpaare (a, B) des apolaren Systems 3. Stufe, von denen 5 zur Definition desselben dienen können und das sechste bestimmen. — Auf die Apolarität selbst komme ich in IV. zurück.

16. Nachdem also die singulären Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{B}$ der sechs speciellen Connexe in einem linearen Systeme 4. Stufe von Connexen (A, b) als ein solches Clebsch'sches System von 6 Elementenpaaren erkannt ist, wollen wir dasselbe nachweisen für die Axen und Centra der 6 Homologien, welche sich in einem linearen Systeme 3. Stufe von Collineationen zwischen von derselben Ebene getragenen Feldern — das ja immer durch [5, 0] definirt werden kann (Nr. 14) — befinden (Nr. 10 am Ende).

---

gliedrigen Gruppen von Formen" statt von $(p-1)$-stufigen Systemen von Connexen. Ferner wendet er das von ihm Math. Ann. Bd. VI, S. 264 (wo er bekanntlich, unabhängig von Smith und Reye, dieselbe Beziehung zweier Kegelschnitte untersuchte, welche Smith mit „harmonisch um-, bez. eingeschrieben", Reye mit „apolar", bez. „stützen" und „ruhen" bezeichnet hat) für das ternäre und schon früher für das binäre Gebiet eingeführte Wort „conjugirt" an, es von dem speciellen Falle der Polarsysteme auf den Fall der Correlation und Collineation übertragend. Ich kann mich nicht entschliessen, ihm darin zu folgen; denn zunächst entsteht schon eine Collision mit der wesentlich verschiedenen Bedeutung, welche der Terminus „conjugirter Connex" durch Clebsch — ebenfalls im Bd. VI dieser Annalen — erhalten hat; vergl. die Note zu Nr. 11. Das Wort „conjugirt" hat aber nachgerade schon so viele Bedeutungen in der Geometrie, von welchen verschiedene nur zu oft in demselben Satze zusammengerathen, dass es empfehlenswerth zu sein scheint, dasselbe etwas sparsamer anzuwenden. Ich ziehe deshalb im vorliegenden Falle Herrn Reye's Wort „apolar" vor, und, wo Clebsch „conjugirt" sagt, bediene ich mich des Wortes „verbunden".

Die Gleichung des Connexes (A, b), der mit einer Homologie verbunden ist, ist bekanntlich*):

$$m(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3) + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + (b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3) = 0,$$

wofern beide Coordinatensysteme (x_i, ξ_i), (y_i, η_i) identisch sind; α_i, b_i sind die Coordinaten der Axe und des Centrums. Die 5 wesentlichen Constanten sind $\alpha_1 : \alpha_3$, $\alpha_2 : \alpha_3$, $b_1 : b_3$, $b_2 : b_3$, $m : \alpha_3 b_3$. Setzt man

$$m + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = - m',$$

so ist die Gleichung des verbundenen Connexes (a, B):

$$m'(y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3)(b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3) = 0;$$

$-\frac{m'}{m}$ ist der constante Modulus $(S \mathfrak{S} AB)$. Wird m verändert, so ergiebt sich ein lineares System (Büschel) von Homologien mit gemeinsamer Axe und gemeinsamem Centrum und ein System von zugehörigen Connexen (A, b); darin, für $m = 0$ ein specieller Connex und für $m = \infty$, der identische Connex, bei welchem bekanntlich jedem Punkte der Ebene jeder durch ihn gehende Strahl gepaart ist**).

Und umgekehrt: *Jeder Büschel, constituirt durch den identischen Connex und einen Homologie-Connex (A, b), enthält einen speciellen Connex, dessen Gerade und Punkt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$ mit Axe und Centrum der Homologie identisch sind, und sonst lauter Homologie-Connexe mit derselben Axe und demselben Centrum.*

Ferner: Jeder Büschel, constituirt aus einem speciellen Connexe $(\mathfrak{a}, \mathfrak{B})$ zwischen Feldern derselben Ebene und dem identischen Connexe, enthält lauter Homologie-Connexe mit $\mathfrak{a}$ als Axe, $\mathfrak{B}$ als Centrum; oder: *Jeder Büschel von Collineationen, welcher durch eine ausgeartete Collineation* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{B})$ *zwischen Feldern derselben Ebene und die Identität* (bei der jedes Element der Ebene sich selbst entspricht) *constituirt ist, besteht aus lauter Homologien mit* $\mathfrak{a}$ *als Axe*, $\mathfrak{B}$ *als Centrum.*

Dies ist auch leicht geometrisch einzusehen: die einem Punkte A, einer Geraden b des einen Feldes A, bez. B in den verschiedenen Collineationen des Büschels entsprechenden Punkte, Geraden bilden eine Punktreihe, einen Strahlbüschel; dem Punkte A entspricht aber in den beiden constituirenden Collineationen der Punkt $\mathfrak{B}$, beziehlich A, dem Strahle b der Strahl $\mathfrak{a}$, beziehlich b; also sind in allen Collineationen des Büschels die Verbindungslinien entsprechender Punkte mit $\mathfrak{B}$, die Schnittpunkte entsprechender Geraden mit $\mathfrak{a}$ incident; wodurch die Collineationen als Homologien charakterisirt sind.

Ist nun ein lineares System 3ter Stufe Σ_3 von Connexen (A, b)

*) Salmon-Fiedler's Kegelschnitte 4. Auflage, Nr. 377.

**) Clebsch, a. in der Einleitung a. O. § 3.

gegeben mit den verbundenen Collineationen und werden aus jedem der in demselben nach Nr. 8 — 10 enthaltenen 6 Homologie-Connexe und dem identischen Connexe Büschel constituirt, so sind deren specielle Connexe die 6, welche sich in dem durch Σ_3 und den identischen Connex constituirten Systeme Σ_4 befinden; und auch umgekehrt, da ein Büschel und ein Σ_3, welche beide in demselben Σ_4 enthalten sind, stets ein Element gemein haben, kann aus der Existenz der 6 speciellen Connexe in Σ_4 auf die der 6 Homologien in Σ_3 geschlossen werden. Man erkennt so, warum die Zahl 6 wiederholt auftritt; aber man erhält noch weiter:

Die Axen und Centra der 6 *Homologien in einem dreifach unendlichen linearen Systeme von Collineationen zwischen Feldern derselben Ebene bilden ein Clebsch'sches System von Elementenpaaren; so dass das System*

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5;\ \ A_0,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5;\ \ b_0,$$

durch welches das Collineationssystem definirt wird, ein zweites nach sich zieht in diesen Axen und Centren.

IV.

17. In diesem Abschnitte will ich eine, wie es scheint, noch nicht bekannte Eigenschaft apolarer (conjugirter) Connexe mittheilen. Ich will aber dabei, um mich der üblicheren Betrachtungsweise, der auch Herr Rosanes meistens folgt, anzuschliessen, die Correlation statt der Collineation voraussetzen. Während die beiden* mit einer Collineation verbundenen Connexe nur durch die Vertauschung der Felder sich unterscheiden, treten hier zwei duale Gebilde auf: die Elementenpaare sind aus gleichartigen Elementen, bei dem einen aus Punkten, bei dem andern aus Geraden gebildet: eben aus conjugirten Punkten, bez. Geraden der Correlation. Es sei gestattet, auch diese Gebilde Connexe zu nennen und, wenn es nothwendig sein sollte, Correlations-Connexe von Collineations-Connexen zu unterscheiden. Vertauscht man in den Gleichungen (1) und (2) von Nr. 11 die Coordinaten y_i und η_i, so erhält man bekanntlich die Gleichungen der jetzigen Connexe, die man entsprechend (A, B) und (a, b) nennen kann.

Sind wiederum die Gleichungen zweier nicht mit derselben Correlation verbundenen Connexe (A, B), (a, b) bez.:

$$a_{11}x_1y_1 + \cdots = 0,$$
$$B_{11}\xi_1\eta_1 + \cdots = 0,$$

so sind diese Connexe nach Herrn Rosanes apolar (conjugirt), wenn ihre Invariante J verschwindet. Nach Herrn Reye's Terminologie

„ruht (A, B) auf (a, b) und dieser stützt jenen.“ Weil aber diese Beziehung invariant ist, so können wir die Coordinatensysteme vereinfachen: wir nehmen als Coordinatendreiecke in A, B bez. die beiden Hauptdreiecke der quadratischen Verwandtschaft, welche durch die mit den beiden Connexen verbundenen Correlationen inducirt wird.

Die Connexgleichungen reduciren sich dann auf:

$$a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 = 0, \tag{3}$$

$$B_{11}\xi_1\eta_1 + B_{22}\xi_2\eta_2 + B_{33}\xi_3\eta_3 = 0 \tag{4}$$

und die Bedingung der Apolarität auf:

$$a_{11}B_{11} + a_{22}B_{22} + a_{33}B_{33} = 0. \tag{5}$$

Dabei mögen, in der üblichen Weise, die Coordinaten x_i, ξ_i so sein, dass die Bedingung der Incidenz ist:

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0,$$

und ebenso die y_i, η_i.

Die harmonische Gerade a' eines Punktes $A = (x_1, x_2, x_3)$ in A in Bezug auf das Hauptdreieck in A hat bekanntlich die Coordinaten $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$; die Polare b von A nach der ersten Correlation hat dann wegen (3) die Coordinaten $a_{11}x_1$, $a_{22}x_2$, $a_{33}x_3$, der Pol B' von a' nach der zweiten wegen (4) die Coordinaten $B_{11}\cdot\frac{1}{x_1}$, $B_{22}\cdot\frac{1}{x_2}$, $B_{33}\cdot\frac{1}{x_3}$; und die Apolaritätsbedingung (5) sagt aus, dass dieser Pol B' und jene Polare b incident sind.

Also, wenn die Connexe (A, B) und (a, b), welche mit zwei Correlationen zwischen den Feldern A *und* B *bez. verbunden sind, apolar sind, so construire man die beiden Hauptdreiecke Δ_A, Δ_B der quadratischen Verwandtschaft, welche durch die beiden Correlationen inducirt wird, dann zu irgend einem Punkte A (oder B) seine harmonische Gerade a' (bez. b') in Bezug auf $\Delta_A(\Delta_B)$ und von $A(B)$ nach der ersten Correlation die Polare $b(a)$, von $a'(b')$ nach der zweiten den Pol $B'(A')$, so sind durchweg B' und b (bez. A' und a) incident. Und umgekehrt, wenn für irgend einen Punkt A (oder B) diese Eigenschaft statt hat, so findet sie durchweg statt.*

Man kann natürlich auch von einer Geraden eines der beiden Felder ausgehen und ihren harmonischen Punkt in Bezug auf das betreffende Hauptdreieck construiren u. s. f. Zu beachten ist, dass, wenn auch das Hauptdreieck nur eine reelle Ecke hat, immer doch noch die harmonische Gerade eines reellen Punktes reell ist, und, wenn etwa die beiden conjugirt imaginären Ecken durch eine Involution definirt sind, leicht construirt werden kann.

18. Nehmen wir an, dass beide Correlationen Polarsysteme (der-

selben Ebene) seien; die beiden Hauptdreiecke vereinigen sich dann in das gemeinsame Polardreieck der beiden Polarsysteme oder Kegelschnitte, und wir haben also, wenn das erste Polarsystem auf dem zweiten ruht, folgende Eigenschaft, in der, auch wenn elliptische Polarsysteme vorkommen oder das gemeinsame Polardreieck nicht ganz reell ist, nur reelle Elemente auftreten: A und a' seien harmonischer Punkt und harmonische Gerade in Bezug auf das gemeinsame Polardreieck, b die Polare von A im ersten, B' Pol von a' im zweiten Polarsystem; b und B' sind durchweg incident; und umgekehrt.

V.

19. Der eben vorgenommenen Specialisirung auf Polarsysteme will ich eine — vom Vorhergehenden unabhängige — Anwendung eines Satzes anschliessen, den ich in den Math. Ann. Bd. XIX, S. 461 in Nr. 10 bewiesen habe. Er lautete:

Wenn bei einer Correlation zweier Felder derselben Ebene drei Paare doppelt (oder in beiderlei Sinne) conjugirter Punkte oder Strahlen so liegen, dass die 3 *Verbindungslinien nicht in einen Punkt zusammenlaufen, bez. die* 3 *Schnittpunkte nicht auf einer Geraden sich befinden; dann ist die Correlation ein Polarsystem.*

Wir denken uns den Satz auf zwei Bündel mit demselben Scheitel übertragen. Es seien nun noch 9 Paare von (windschiefen) Geraden im Raume gegeben:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1;\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2;\ \ldots;\ \mathfrak{a}_9\mathfrak{b}_9;$$

dann giebt es zu jedem Punkte A eine Fläche 6. Ordnung von Punkten B von der Beschaffenheit, dass man die beiden Bündel A, B so correlativ (reciprok) beziehen kann, dass die Ebenen $A(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_9)$ bez. zu den Ebenen $B(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_9)$ conjugirt sind, d. h. die einen ihre Polarstrahlen in den andern haben*). Ebenso giebt es zu jedem Punkte B eine Fläche 6. Ordnung von Punkten A. Suchen wir nun den Ort der vereinigten Punkte A, B, welche C heissen mögen, so erhalten wir, durch eine Correspondenz (6, 6) auf jeder Geraden, eine Fläche 12. Ordnung für die Scheitel C concentrischer reciproker Bündel mit der erwähnten Eigenschaft. Nehmen wir aber an, dass $\mathfrak{a}_7, \mathfrak{b}_7, \mathfrak{a}_8, \mathfrak{b}_8, \mathfrak{a}_9, \mathfrak{b}_9$ bez. mit $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{a}_3$ identisch seien; dann werden die Ebenen $C\mathfrak{a}_1, C\mathfrak{b}_1$; $C\mathfrak{a}_2, C\mathfrak{b}_2$; $C\mathfrak{a}_3, C\mathfrak{b}_3$ doppelt conjugirt sein. Die Fläche 12. Ordnung zerfällt in eine von der 4. und eine von der 8. Ordnung. *Die Fläche* 4. *Ordnung* — eine für sich interessante Fläche — *entsteht durch diejenigen Punkte C, bei denen die* 3 *Schnittstrahlen*

---

*) Vergl. meinen Aufsatz: Math. Ann. Bd. XII, S. 254, Nr. 40, 41; insbes. in Nr. 40, Tab. 1, Signatur [0008], Colonne ν_8 oder auch in Nr. 55, Tab. 2, Signatur [0009], Colonne ζ_{9B}.

$C(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$, $C(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)$, $C(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)$ *in dieselbe Ebene fallen.* Dass es auf einer Geraden $\mathfrak{c}$ 4 solche Punkte giebt, folgt daraus, dass die 3 Hyperboloide $(\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2)$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3)$ 4 nicht durch $\mathfrak{c}$ gehende gemeinsame Tangentialebenen haben. Wenn aber jene 3 Schnittstrahlen in eine Ebene fallen, so ergeben die allgemeinen Eigenschaften der Correlation*), weil alle Schnittstrahlen doppelt conjugirter Ebenen zweier concentrischer Bündel in allgemeiner Correlation in einer Ebene liegen, dass, wenn $C\mathfrak{a}_1$, $C\mathfrak{b}_1$ und ebenso $C\mathfrak{a}_2$, $C\mathfrak{b}_2$ doppelt, $C\mathfrak{a}_3$, $C\mathfrak{b}_3$ einfach conjugirt sind, letztere von selbst auch doppelt conjugirt sind. Folglich reduciren sich für einen Punkt C der Fläche 4. Ordnung die 9 Bedingungen auf 8 : [0008], welche durch eine einzige Correlation befriedigt werden**).

Bei einem Punkte aber der Fläche 8. Ordnung liegen jene 3 Schnittstrahlen nicht in derselben Ebene, also giebt nach dem anfangs erwähnten Satz die Correlation einen Polarbündel.

Demnach ist der Ort der Spitzen der Kegel 2. *Grades, für welche* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1; \ldots; \mathfrak{a}_6, \mathfrak{b}_6$ *in conjugirten Ebenen liegen* (oder selbst conjugirt sind), *eine Fläche* 8. *Ordnung.* Vereinigt sich jedes $\mathfrak{a}_i$ mit $\mathfrak{b}_i$, so erhält man den bekannten Satz über den Ort der Spitzen der Kegel 2. Grades, welche 6 gegebene Gerade tangiren.

Analog kann man andere Sätze finden.

Münster i/W., den 24. Mai 1883.

*) Cf. Schröter, Journ. f. Math. Bd. 77, S. 105 Nr. 4, oder meinen im Anfang dieses Abschnitts erwähnten Aufsatz Nr. 4.

**) Hirst, Proc. Math. Soc. Bd. V, Nr. 42; oder in der ersten, in der vorletzten Note erwähnten, Tabelle Signatur [0008], Colonne $\mathfrak{z}_8$.

In meinem Aufsatze über die Curven auf der cubischen Fläche (Math. Ann. Bd. 21, S. 457) bitte ich, S. 474, Z. 6 „$\mathfrak{z} - 2$ oder" zu streichen, S. 482, Z. 1 das letzte $\leqq$ in $\geqq$, ebenso S. 484, Z. 7, dagegen S. 487, Z. 20 das zweite $\geqq$ in $\leqq$ zu verwandeln. Sodann möchte ich, was freilich bei einer eingehenden Lectüre sich von selber ergiebt, hier noch direct aussprechen, dass durch gleiche Bezeichnung von Curven in den Tabellen S. 493—496 einerseits und 509—511 andererseits nicht nothwendig auch sonstige Uebereinstimmung derselben ausgedrückt werden soll.

Sur la théorie des quaternions*).

Par

M. Cyparissos Stéphanos à Paris.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein).

J'arrive à vos demandes relatives à mes recherches sur les quaternions.

C'est exprès que, dans le Mémoire que je vous ai déjà adressé, je n'ai point envisagé des formes bilinéaires dont tous les coefficients seraient donnés en valeur absolue, et que je n'ai point touché à la représentation géométrique de ces formes, puisque je me reservais d'arriver à ces considérations lorsque j'aurais à traiter de la théorie des quaternions.

Quant à mes recherches sur cette théorie elles ont porté successivement dans diverses directions.

D'abord je me suis proposé d'étudier la représentation des formes bilinéaires binaires, ou bien des quaternions correspondants, par des points pésants. Partant de ce que l'emploi des vecteurs d'après Hamilton était aussi bien admissible sous mon point de vue (et cela d'après l'exemple de Grassmann qui avait introduit les vecteurs, d'en profiter dans le calcul barycentrique de Möbius), j'avais pensé *Strecken*, pour déduire des opérations entre points pésants etc. une explication du côté géométrique de la théorie des quaternions, autant que cela était possible.

Je ne me suis jamais fait illusion sur le manque de toute signification intrinsèque dans l'ensemble d'opérations (addition, multiplication etc.) entre points pésants et vecteurs. Toutefois devant l'irrégularité même de ces opérations il y avait lieu de se demander si elles n'étaient point l'image d'autres opérations, bien régulières, entre des êtres géométriques correspondant d'une manière individuelle aux divers quaternions.

Hamilton avait déjà fait un premier pas vers la solution de cette question. Pour cela il se fondait sur la considération de deux vecteurs A et B dont le quotient BA^{-1} est égal à un quaternion donné Q. Ainsi en supposant que A et B aient leur origine en O (origine des

---

*) Par des explications relatives à diverses notions considérées dans ce qui suit on pourra consulter le Mémoire de M. Stéphanos inséré dans ce volume des Annalen (*Voir* surtout les §§ I, II, VI de la seconde Partie).

coordonnées) on voit que la correspondance entre les extrémités de ces vecteurs constitue une transformation de similitude du plan du quaternion Q en lui même, transformation laissant O immobile.

Il faut bien convenir que cette transformation de similitude du plan de Q constitue un représentant géométrique assez convenable du quaternion correspondant. Et en effet non seulement elle détermine Q d'une manière unique lorsqu'elle est donnée, mais aussi elle permet de donner des constructions géométriques fort simples pour les diverses opérations entre quaternions.

En réflechissant sur ces faits je me suis demandé si la représentation de $a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3$ par l'extrémité d'un vecteur ayant son origine en O, représentation dont l'influence sur les résultats précédents n'est aucunement défavorable, ne doit être érigée plutôt en règle, et si, en accord avec cela, on ne doit point s'attacher à une nouvelle représentation géométrique d'un quaternion complet, laquelle consisterait à représenter $a_0 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3$ par un élément d'une variété à quatre dimensions dans laquelle serait contenu notre espace de points ($a_0 = 0$).

Après examen attentif des circonstances qui accompagnent le calcul des quaternions j'ai été à réconnaître qu'en effet c'est à une pareille représentation des quaternions qu'on devait s'arrêter.

La variété à quatre dimensions dont les élements doivent représenter les divers quaternions est celle formée par les diverses *sphères orientées* de notre espace, (une *sphère orientée*, *semi-sphère* de M. Laguerre, pouvant, être considerée comme une sphère dont le rayon est pris avec un signe déterminé). Un quaternion $Q = a_0 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3$ serait ainsi représenté par la sphère orientée ayant pour centre l'extrémité du vecteur $VQ = a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3$ et dont le rayon serait égal à $SQ \cdot \sqrt{-1} = a_0\sqrt{-1}$.

Il est à remarquer que le cône orienté ayant son sommet en O et circonscrit à la sphère orientée qui représente Q, est caractérisé par cette propriété que chacun de ses plans tangents coupe le cercle à l'infini en deux points x, y qui se correspondent dans l'homographie établie sur le cercle à l'infini par la rotation $\lambda, \mu, \nu = \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}$.
Il est aussi à remarquer que la norme $NQ = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ d'un quaternion Q est égale à la puissance du point O par rapport à la sphère correspondante Q.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable c'est que le carré de la distance tangentielle de deux sphères orientées Q_1 et Q_2, c'est-à-dire de la distance entre les points où un plan orienté touche ces deux sphères orientées, est égal à $N(Q_2 - Q_1)$*). C'est là un fait de la plus grande

*) Ainsi la condition pour que les deux sphères orientées Q_1 et Q_2 se touchent est $N(Q_2 - Q_1) = 0$.

importance pour l'emploi qu'on peut faire des quaternions dans l'étude des correspondances de contact entre sphères orientées.

En partant de cette représentation des quaternions isolés, on a à chercher l'interprétation du rôle que revêtent les sphères correspondantes dans les diverses opérations entre quaternions

Et d'abord pour ce qui concerne l'addition des quaternions on doit supposer qu'une sphère orientée Q représente une translation égale à VQ suivie d'une *dilatation* égale à $SQ\cdot\sqrt{-1}$ (cette dernière opération ayant pour effet d'ajouter au rayon de toute sphère orientée la longueur $SQ\cdot\sqrt{-1}$). L'addition des quaternions n'est ainsi autre chose que l'image de la composition de ces transformations ($Y=Q+X$).

Maintenant, pour ce qui concerne la multiplication, on doit considérer une sphère orientée Q comme définissant une correspondance

$$Y = XQ. \tag{1}$$

Au produit de deux sphères Q_1, Q_2 correspondrait ainsi le produit des deux transformations

$$Y = XQ_1, \quad Y = XQ_2.$$

La transformation (1) fait en général correspondre à des points des sphères orientées. Les seuls points $X=A$ auxquels correspondent ainsi des points $Y=B$ sont situés dans le plan de Q; il en est de même pour les points B. C'est cette même correspondance A, B que nous avons déjà eu à considérer.

Il est à remarquer qu'à des *plans orientés**) parallèles correspondent par cette transformation aussi des plans orientés parallèles. Deux plans correspondants se coupent toujours suivant une droite qui rencontre le cercle à l'infini C_∞. Les deux autres points d'intersection de ces plans avec le cercle C_∞ sont correspondants dans l'homographie établie sur ce cercle par la rotation $\lambda, \mu, \nu = \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}$.

Dans cette transformation les divers cônes de révolution orientés ayant leur centre en O se transforment les uns dans les autres. Deux pareils cônes correspondants sont circonscrits à une infinité de sphères orientées correspondantes. Les puissances par rapport à O de deux sphères X, Y correspondantes sont du reste liées entre elles par la relation $NY = NX\cdot NQ$. Enfin il est à remarquer que les cercles suivant lesquels deux pareilles sphères coupent le plan de Q sont correspondants dans la transformation de similitude $B = AQ$ du plan de Q.

Dans les opérations de l'addition et de la multiplication le point O joue le rôle de *zéro*, tandisque la sphère orientée ayant le point O pour centre et $\sqrt{-1}$ pour rayon jour le rôle d'*unité* ($Q=1$). Enfin ce sont les plans orientés qui se présentent comme des *infinis*. Il est à noter

*) *Semi-plans* de M. Laguerre.

qu'étant donnés le point O et la sphère orientée 1 la somme et le produit de deux sphères orientées sont parfaitement déterminés.

Les propriétés précédentes montrent déjà combien la représentation des quaternions par des sphères orientées est naturelle. Quant au calcul géométrique de Hamilton, envisagé sous son véritable aspect, on peut dire qu'il répose sur la représentation des formes bilinéaires symétriques (vecteurs) par des points de l'espace. Aussi je trouve que les applications de ce calcul doivent être cherchées dans l'étude des propriétés élémentaires des systèmes de points dans l'espace*). Cela tiendrait à ce que les opérations S et V, appliquées aux produits de plusieurs vecteurs pris deux à deux ou trois à trois, conduisent à tous les invariants et covariants des formes quadratiques correspondantes, relatifs à des substitutions linéaires de déterminant égal à 1, et par conséquent à tous les invariants et covariants des points de l'espace correspondants, relatifs à des rotations effectuées autour du point O.

Par contre avec l'extension de la représentation des quaternions, par l'emploi de sphères orientées, le champ des applications de ce calcul paraît s'étendre de lui-même dans les limites de la Géométrie des sphères de M. Lie.

Ainsi par exemple A, B, C, D désignant des quaternions arbitraires et X, Y deux quaternions variables la relation

$$XAY + XB + CY + D = 0$$

représente la transformation de contact la plus générale entre sphères orientées.

Pour $A = 0$ on a des transformations entre plans orientés; etc. etc.

En se servant de la correspondance entre sphères (orientées) et droites de M. Lie on pourrait aussi représenter les quaternions par des droites de l'espace. On aurait ainsi une nouvelle application du calcul des quaternions qui ne serait peut-être moins intéressante.

Ce n'est que dernièrement que je suis parvenu à cette interprétation des quaternions au moyen de sphères orientées. Ainsi je n'ai pas encore eu le temps d'achever l'exposé dont je parlais en commençant. Malheureusement le temps va, paraît-il, encore me manquer, de sorte que je ne sais pas si je pourrai vous envoyer ce travail de sitôt, d'autant plus que d'autres recherches me pressent également. C'est pourquoi je me suis permis de vous en présenter ici les traits principaux.

Paris, le 3. Mai 1883.

*) Ou tout au plus à des études relatives au groupe des transformations par rayons vecteurs réciproques.

Verlag von **B. G. Teubner** in **Leipzig.**

Clebsch, Dr. **A.**, Prof. an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe [† als Professor in Göttingen], Theorie der Elasticität fester Körper. (XI u. 424 S.) gr. 8. 1862. geh. n. *M.* 9.—

„Der Herr Verfasser hatte als Lehrer an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe Gelegenheit und Beruf, sich ausführlicher mit den Anwendungen der allgemeinen Theorie der Elastizität auf die in der Technik besonders wichtigen Fälle zu beschäftigen. Die Resultate dieser Studien liegen uns jetzt in einem ziemlich umfangreichen Werke vor, und man kann dem Verfasser nur Dank wissen, dafs er unsere deutsche Litteratur um eine Schrift bereichert hat, welche einerseits dem Techniker das Erlernen der strengen Theorie ermöglicht, ihm über die Genauigkeit seiner Resultate und die Zulässigkeit der in der Praxis üblichen Voraussetzungen Aufschlufs giebt, andererseits den Mathematiker belehrt, wie man von den allgemeinsten Gleichungen der Bewegungen und des Gleichgewichts elastischer Körper zu speziellen Fällen gelangen kann, und ihm die grofse Mühe und Zeit erspart, in den Arbeiten der Techniker den Weizen von der Spreu zu sondern. Es ergänzt daher dieses Handbuch das berühmte Werk des französischen Physikers Lamé, welches vorzüglich die allgemeinen Differentialgleichungen, ihre eleganten Transformationen, die Theorie der krystallinischen Körper und ihre optischen Eigenschaften behandelt, während Herr Clebsch ausschliefslich unkrystallinische Körper und deren Verschiebungen durch äufsere Kräfte in Betrachtung zieht." [Literarisches Centralblatt 1863, No. 31.]

——— Theorie der binären algebraischen Formen. (VIII u. 467 S.) gr. 8. 1871. geh. n. *M.* 11.—

Gegenüber dem von Hrn. Fiedler übersetzten Salmonschen Lehrbuche, welches bisher das Hauptmittel für das Studium der neuern Algebra war, wird man in dem vorliegenden Werke einerseits eine Beschränkung, andrerseits Erweiterungen finden. Die Beschränkung besteht darin, dafs nur binäre Formen behandelt sind. Dies wurde fast geboten durch den Umstand, dafs nur die Theorie der binären Formen bis jetzt in gewissem Grade abgeschlossen scheint. Der Verfasser geht davon aus, Invarianten und Kovarianten durch symbolische Produkte zu definieren; ein Standpunkt, welcher ihm schon vor 10 Jahren als der richtigste erschien. Diese Ansicht hat im Laufe der Zeit um so mehr sich bei ihm festigen müssen, als gerade hiervon ausgehend Herr Gordan den wichtigen Satz fand, dafs die Anzahl der zu jeder Form gehörigen Invarianten und Kovarianten eine endliche sei; und mit diesem Satze waren denn wieder Fragen gegeben, welche nur bei binären Formen aufgestellt und beantwortet werden können, und welche eben der Theorie der binären Formen jenen vorzugsweise entwickelten Charakter geben.

Indem diese und andere, auf frühern Arbeiten des Verfassers beruhenden Untersuchungen ausführlich behandelt sind, ist dem erwähnten Werke gegenüber eine sehr wesentliche Fortentwickelung gegeben, welche bis zu dem neuesten Stande dieser Disziplin führt.

Andrerseits wird in dem Werke die geometrische Interpretation berücksichtigt, welche neben den algebraischen Untersuchungen hergeht, und welche zugleich die Grundlage der synthetischen Geometrie liefert, nämlich die Theorie der Punktreihen und Strahlenbüschel.

Es ist endlich ein grofses Gewicht auf ausführliche Behandlung einiger Probleme gelegt, welche dem Studierenden als Muster für die Behandlung algebraischer Fragen dienen können, und welche ihn so auch praktisch in einen der wichtigsten Teile der neuern Mathematik einführen.

——— Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Erster Band. (XII u. 1050 S.) gr. 8. 1875. geh. n. *M.* 24.—

Auch in zwei Teilen:
I. Teil [S. 1—496] n. *M.* 11.20.
II. „ [S. I—XII u. 497—1050]. n. *M.* 12.80.

Es bedarf wohl kaum einer nähern Erklärung, wenn nach dem nur allzu früh erfolgten Hinscheiden von A. Clebsch alsbald der Gedanke entstand, seine Vorlesungen über Geometrie, welche für das Studium der Wissenschaft von so hervorragendem Einflusse waren, allgemein zugänglich zu machen. Es bezieht sich dies sowohl auf die ausschliefslich geometrischen, als auch auf einzelne Abschnitte anderer Vorlesungen, soweit in letzteren geometrische Probleme gelegentlich behandelt wurden. Dem Herausgeber fiel somit die Aufgabe zu, in möglichstem Anschlusse an den Vortrag, wofür ihm mehrere nachgeschriebene Hefte zur Verfügung standen, und teilweise unter Benutzung von Clebsch herrührender Manuskripte ein zusammenhängendes Bild der verschiedenen geometrischen Disziplinen zu entwerfen, besonders unter Wahrung des einheitlichen Gedankenganges, welcher den Vorlesungen von Clebsch so sehr eigentümlich war. Während sonach in den ersten Abteilungen die rein geometrischen Gesichtspunkte vorwalten, drängt sich schon bei den Kegelschnitten, bez. den Flächen 2. Ordnung die Notwendigkeit eines eingehenden Studiums der Invariantentheorie auf; und dieser algebraische Charakter kommt bei weiterem Fortschreiten immer mehr zur Geltung. Andererseits soll das Buch auch in jene überaus fruchtbaren Untersuchungen einführen, welche aus der Theorie der elliptischen und Abelschen Funktionen, sowie der eindeutigen Transformationen für die Geometrie erwachsen. Die erwähnten Ziele bezeichnen zugleich die Stellung dieser Vorlesungen gegenüber den von Herrn Fiedler übersetzten und bearbeiteten Salmonschen Lehrbüchern, indem der Stoff, im einzelnen mehr beschränkt, im ganzen doch ein weiteres Gebiet umfafst.

In dem ersten Bande wird in dem angegebenen Sinne die Geometrie der Ebene behandelt. Den Schlufs bildet die Darstellung der Grundzüge einer Theorie der Konnexe, jener von Clebsch noch zuletzt in die Geometrie eingeführten Gebilde.

[illegible]

[illegible]

[illegible]